

В. И. СЕТКОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

*Допущено
Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов учреждений среднего
профессионального образования, обучающихся по специальностям
строительного профиля*

Москва



2003

УДК 531.8:624.04(076.1)(075.32)
ББК 30.12
С334

621.01(07)
С 33

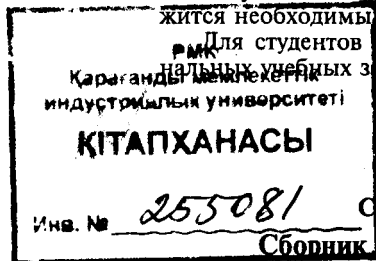
Рецензенты:
преподаватель дисциплины «Техническая механика» Махачкалинского техникума строительства и экономики *Т.М. Мирзоев*;
преподаватель дисциплины «Строительные конструкции» Махачкалинского техникума строительства и экономики, канд. техн. наук, доц. *М.Г. Магомедов*;
заместитель директора по учебной работе Березниковского строительного техникума *Н.В. Шварева*;
зав. кафедрой «Строительные конструкции» Пермского государственного технического университета, проф. *Б.И. Десятов*

Сетков В.И.

С334 Сборник задач по технической механике: Учеб. пособие для сред. проф. образования / Владимир Иванович Сетков. — М.: Издательский центр «Академия», 2003. — 224 с.
ISBN 5-7695-1086-2

Приведены задания для расчетно-аналитических и расчетно-графических работ по всем разделам курса технической механики. Каждое задание включает описание решения задач с краткими методическими указаниями, даны примеры решения. В приложениях содержится необходимый справочный материал.

Для студентов строительных специальностей средних профессиональных учебных заведений.



УДК 531.8:624.04(076.1)(075.32)
ББК 30.12

Учебное издание

Сетков Владимир Иванович

Сборник задач по технической механике

Учебное пособие

Редактор *Б.П. Святос*
Технический редактор *О.С. Александрова*
Компьютерная верстка: *В.Н. Канивец*
Корректор *Н.В. Шувалова*

Изд. № А-536. Подписано в печать 25.02.2003. Формат 60×90/16.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Бумага тип. № 2. Усл. печ. л. 14,0.
Тираж 30 000 экз. (1-й завод 1 – 10 000 экз.). Заказ № 2753.

Лицензия ИД № 02025 от 13.06.2000. Издательский центр «Академия».
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.02.953.Д.002682.05.01 от 18.05.2001.
117342, Москва, ул. Бутлерова, 17-Б. 223. Тел./факс: (095)330-1092, 334-8337.

Отпечатано на Саратовском полиграфическом комбинате.
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

© Сетков В.И., 2003
© Издательство «Мастерство», 2003
© Оформление. Издательский центр «Академия», 2003

ISBN 5-7695-1086-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач составлен в соответствии с программой дисциплины «Техническая механика», утвержденной Управлением кадров и учебных заведений Госстроя Российской Федерации и предназначенной для реализации Государственных образовательных стандартов среднего профессионального образования по специальностям 2900 группы Классификатора специальностей «Строительство и архитектура».

Сборник содержит 22 индивидуальных задания для контрольных (аудиторных) и расчетно-графических (домашних) работ по тридцати темам теоретической механики, сопротивления материалов и статике сооружений. Объем и содержание расчетно-графических и контрольных (самостоятельных) работ разработаны в соответствии с рекомендуемым перечнем расчетно-графических работ и примерной тематикой контрольных работ, предусмотренных Программой. Каждое задание содержит 36 вариантов, что делает его исключительно индивидуальным и наглядным.

Содержание и построение сборника имеют свои особенности.

Во-первых, все задания и задачи максимально ориентированы на строительные специальности и прежде всего на изучение специальной дисциплины «Строительные конструкции».

Расчетные схемы балок, рам, ферм, арок и т.д., поперечные сечения их элементов, виды внешних нагрузок наиболее характерны для конструкций и сооружений, встречающихся в строительстве. В то же время, они вполне вписываются в рамки общепрофессиональной дисциплины «Техническая механика».

В сборнике сделана попытка подготовить студентов к выполнению расчетов с учетом Строительных норм и правил (СНиПов), что предусмотрено программой.

Во-вторых, по каждой теме задания составлены двухуровневой сложности: контрольные или самостоятельные — более простые, а расчетно-графические — более сложные. Поэтому к расчетно-графической работе рекомендуется приступать после выполнения самостоятель-

ной работы по той же теме. Каждому заданию предшествует описание порядка решения задач с краткими методическими указаниями. Сборник содержит 38 примеров решения задач, близких по содержанию к задачам расчетных и контрольных работ.

Самостоятельные работы предназначены не только для контроля, но и для обучения. Для этого, по усмотрению преподавателя, они могут быть перегруппированы или сокращены.

В приложениях приведен справочный материал, необходимый для решения задач.

РАЗДЕЛ I

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ГЛАВА 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА

1.1. Определение реакций идеальных связей аналитическим способом

1. *Указывают точку, равновесие которой рассматривается.* В задачах для самостоятельной работы такой точкой является центр тяжести тела или точка пересечения всех стержней и нитей.

2. *Прикладывают к рассматриваемой точке активные силы.* В задачах для самостоятельной работы активными силами являются собственный вес тела или вес груза, которые направлены вниз (правильнее — к центру тяжести земли). При наличии блока вес груза действует на рассматриваемую точку вдоль нити. Направление действия этой силы устанавливается из чертежа. Вес тела принято обозначать буквой G .

3. *Мысленно отбрасывают связи, заменяя их действие реакциями связей.* В предлагаемых задачах используются три вида связей — идеально гладкая плоскость, идеально жесткие прямолинейные стержни и идеально гибкие нити, — в дальнейшем именуемые соответственно плоскостью, стержнем и нитью.

При замене связей их реакциями следует помнить, что реакция плоскости направлена по нормали (перпендикулярно) к ней в точке контакта (соприкосновения), а реакции стержня и нити — по их осям. При этом реакция плоскости направлена от нее и проходит через центр тяжести тела, а реакция нити — от рассматриваемой точки или тела (нить всегда испытывает растяжение). Направление реакции стержня заранее неизвестно, поэтому оно может быть принято произвольно. Если направление реакции стержня трудно определить из схемы, то его принимают растянутым, и реакцию направляют от рассматриваемой точки. Истинное направление будет установлено после решения уравнений.

Реакции нити и стержня принято называть усилиями. Реакцию плоскости обозначают буквой R , а усилие в нити и стержне — S или N . В дальнейшем, если не указывается вид связи или говорится о разных связях, то будет применяться термин «реакция».

К рассматриваемой точке прикладывают реакции связей. Лучше сделать это на отдельном чертеже, выполненном схематически, придерживаясь масштаба при изображении углов. В результате получают систему трех сходящихся сил. Активная сила (груз или собственный вес тела) известна, а реакции связей (их две) неизвестны.

4. *Выбирают положение прямоугольной системы координат.* Начало координат совмещают с точкой, равновесие которой рассматривается. Положение осей может быть выбрано произвольно и на конечном результате при правильном решении это не отражается. Обычно используют один из двух приемов для выбора направления осей координат. Первый: одну из осей (любую) направляют так, чтобы она совпала с направлением одной из неизвестных реакций, а другая при этом составляла бы с первой угол 90° . Второй: ось y направляют вертикально, а ось x — горизонтально. В частном случае возможен еще один прием для расположения осей: если система сил имеет ось симметрии, то одну из координатных осей совмещают с ней.

Во всех случаях следует определить углы между реакциями и координатными осями и указать их на чертеже.

5. *Составляют уравнения равновесия вида:*

$$1) \sum X = 0; \quad 2) \sum Y = 0.$$

Напомним, что проекцией силы на ось является произведение модуля (величины) этой силы на косинус угла между направлением действия силы и оси. Если угол между направлениями силы и оси острый, то перед величиной проекции ставится знак «плюс», т.е. сила и ось направлены в одну сторону, если они направлены в противоположные стороны, то ставится знак «минус».

Решают систему двух уравнений с двумя неизвестными. При этом если одна из осей совпадает с неизвестной реакцией, то одно из двух уравнений содержит только одно неизвестное, что упрощает решение системы.

Если ответ получится со знаком «минус», то это означает, что направление реакции на чертеже было выбрано неверно, т.е. если до составления уравнений равновесия стержень предполагался растянутым, то в действительности он будет сжатым, и наоборот. Такой ответ не является ошибкой решения (если оно выполнено верно), так как чертеж и ответ вместе дают возможность указать истинное направление реакции.

6. *Выполняют проверку решения.* Обычно она делается графическим или другими способами, но может быть выполнена и аналитически. Для этого следует изменить положение осей координат и решить задачу в новой системе. Ответы должны быть одинаковыми.

Пример 1. Определить величину и направление реакций связей для схемы, приведенной на рис. 1, а под действием груза $G = 30$ кН. Проверить правильность определения реакций.

Решение. 1. В задаче рассматривается равновесие тела, опирающегося на плоскость и подвешенного на нити. *Заменим тело точкой 0, совпадающей с центром тяжести.*

2. *Приложим к точке 0 активную силу, которой является собственный вес тела G .* Направим ее вниз (рис. 1, б).

3. *Мысленно отбросим связи — плоскость и нить.* Заменим их действие на точку 0 реакциями связей. Реакция плоскости (обозначим ее R) проходит по нормали к плоскости в точке A , а реакция или усилие в нити (обозначим ее S) — по нити от точки. Обе реакции и вес тела или линии их действия должны пересекаться в точке 0.

Изобразим действующие силы в виде системы трех сходящихся сил на отдельном чертеже (рис. 1, в).

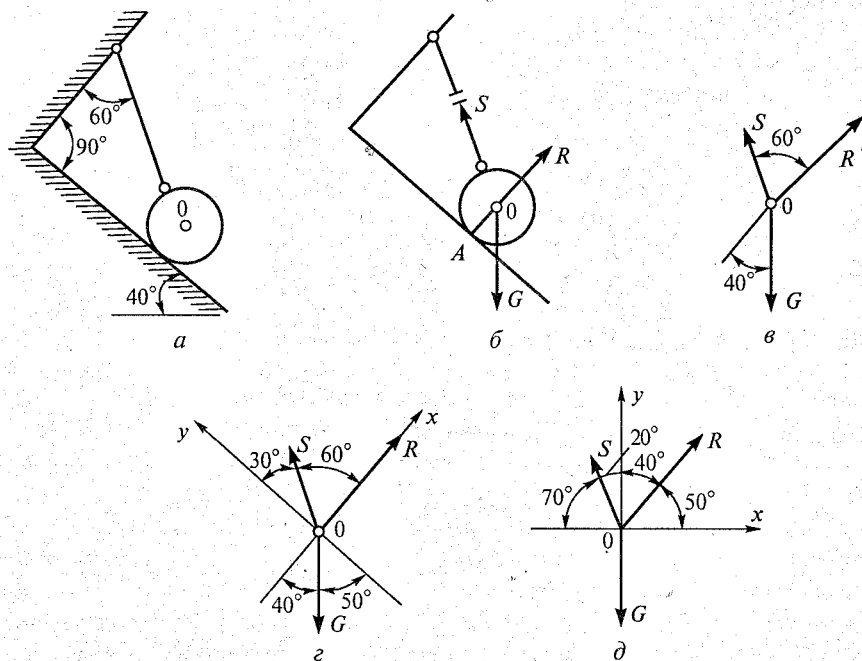


Рис. 1

4. Выберем положение системы координат. Начало координат совмещаем с точкой 0. Ось x совмещаем с направлением линии действия реакции R , а ось y направим перпендикулярно оси x (рис. 1, $з$). Определим углы между осями координат и реакциями R и S . Обычно рис. 1, $б$ и 1, $в$ не выполняют отдельно, а сразу от рис. 1, $а$ переходят к рис. 1, $з$. Можно было ось y совместить с усилием S , и ось x направить по углом 90° , тогда решение было бы другим.

5. Составим сумму проекций всех сил на оси координат:

$$1) \sum X = R + S \cos 60^\circ - G \cos 40^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = S \cos 30^\circ - G \cos 50^\circ = 0.$$

Решим систему уравнений. Из второго уравнения находим

$$S = \frac{G \cos 50^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{30 \cdot 0,643}{0,866} = 22,27 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения находим

$$R = G \cos 40^\circ - S \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,766 - 22,27 \cdot 0,5 = 11,84 \text{ кН.}$$

6. Проверим решение, для чего расположим оси координат, как показано на рис. 1, $д$. Составим уравнения равновесия для вновь принятых осей:

$$1) \sum X = R \cos 50^\circ - S \cos 70^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = R \cos 40^\circ + S \cos 20^\circ - G = 0.$$

Решим систему уравнений способом подстановки.

Из первого уравнения найдем R :

$$R = S \frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$S \frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ} \cos 40^\circ + S \cos 20^\circ - G = 0,$$

откуда

$$S = \frac{G}{\frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ} \cos 40^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{30}{\frac{0,342}{0,643} \cdot 0,766 + 0,94} = 22,27 \text{ кН.}$$

Теперь найдем R :

$$R = 22,27 \frac{0,342}{0,643} = 11,84 \text{ кН.}$$

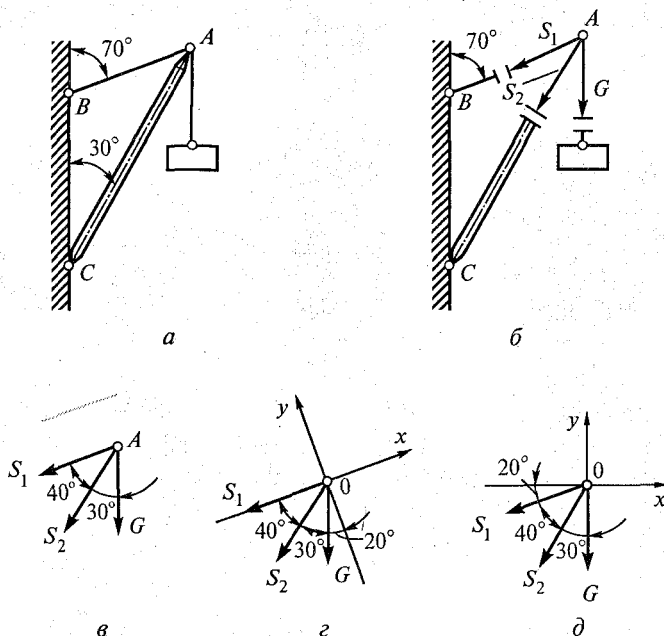


Рис. 2

Очевидно, что при расположении осей, как показано на рис. 1, д, вычисления оказались более сложными.

Ответ: $R = 11,84 \text{ кН}$; $S = 22,27 \text{ кН}$.

Пример 2. Определить усилия в нити и стержне кронштейна, показанного на рис. 2, а, если $G = 20 \text{ кН}$.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие точки A (или узла A), в которой сходятся все стержни и нити.

2. Активной силой является вес груза G , направленный вниз (рис. 2, б).

3. Отбросим связи: стержень и нить. Усилие в нити обозначим S_1 и направим от точки A , так как нить может испытывать только растяжение. Усилие в стержне обозначим S_2 и тоже направим от точки A , предполагая что стержень AC растянут (рис. 2, б).

Выполним на отдельном чертеже схему действия сил в точке A (рис. 2, в).

4. Выберем положение системы координат. Начало координат совмещаем с точкой A (рис. 2, г). Ось x совмещаем с линией действия усилия S_1 , а ось y располагаем перпендикулярно оси x . Укажем углы между осями координат и усилиями S_1 и S_2 .

5. Составим уравнения равновесия:

$$1) \sum X = -S_1 - S_2 \cos 40^\circ - G \cos 70^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = -S_2 \cos 50^\circ - G \cos 20^\circ = 0.$$

Из второго уравнения находим

$$S_2 = -G \frac{\cos 20^\circ}{\cos 50^\circ} = -\frac{20 \cdot 0,94}{0,643} = -29,24 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения находим

$$\begin{aligned} S_1 &= -S_2 \cos 40^\circ - G \cos 70^\circ = \\ &= 29,24 \cdot 0,766 - 20 \cdot 0,342 = 15,56 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак «минус» перед S_2 свидетельствует о том, что стержень AC не растянут, как предполагалось, а сжат.

6. Проверку решения предлагаем выполнить самостоятельно, расположив оси координат так, как показано на рис. 2, д.

Ответ: $S_1 = 15,56 \text{ кН}$, $S_2 = -29,24 \text{ кН}$ (при принятом на чертеже направлении усилий).

Величина усилий зависит от углов наклона стержня и нити. Например, если на рис. 2, а угол 70° заменить на 60° , сохранив угол 30° , то усилия будут равны: $S_1 = 20 \text{ кН}$, $S_2 = -34,64 \text{ кН}$. А при угле 50° $S_1 = 29,26 \text{ кН}$, $S_2 = -44,8 \text{ кН}$. Оба усилия растут и становятся больше веса груза.

Пример 3. Как изменятся усилия в стержне и нити, если груз будет перекинут через блок, как показано на рис. 3, а?

Остальные данные — в примере 2.

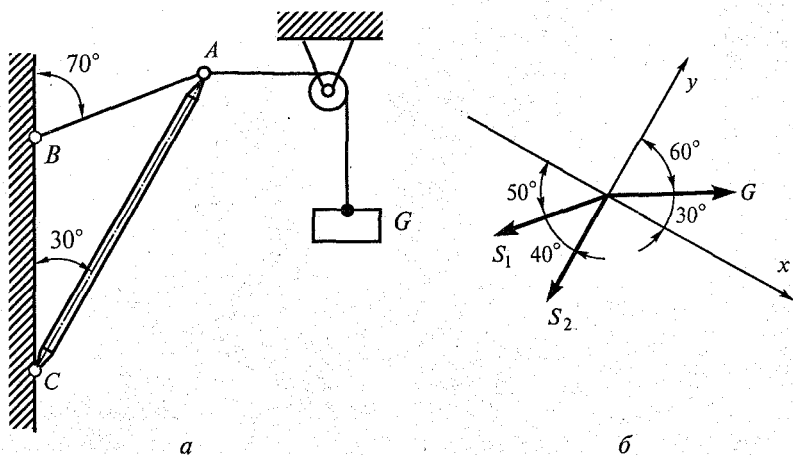


Рис. 3

- Решение.** 1. Рассматриваемой точкой остается точка A .
 2. Активная сила (вес груза G) действует на точку горизонтально слева направо, так как груз перекинут через блок.
 3. Усилия S_1 и S_2 прикладываем к точке A , как в примере 2.
 4. Выбираем систему координат, как показано на рис. 3, б.
 5. Составляем и решаем уравнения равновесия:

$$1) \sum X = G \cos 30^\circ - S_1 \cos 50^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = G \cos 60^\circ - S_2 - S_1 \cos 40^\circ = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$S_1 = G \frac{\cos 30^\circ}{\cos 50^\circ} = 20 \frac{0,866}{0,643} = 26,94 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения находим

$$S_2 = G \cos 60^\circ - S_1 \cos 40^\circ = 20 \cdot 0,5 - 26,94 \cdot 0,766 = -10,64 \text{ кН}.$$

Ответ: $S_1 = 26,94 \text{ кН}$; $S_2 = -10,64 \text{ кН}$ при принятом направлении усилий на чертеже. Усилие S_1 увеличилось, S_2 — уменьшилось, а знаки не изменились.

Задание для самостоятельной работы 1. Определить величину и направление реакций связей по данным одного из вариантов, показанных на рис. 4.

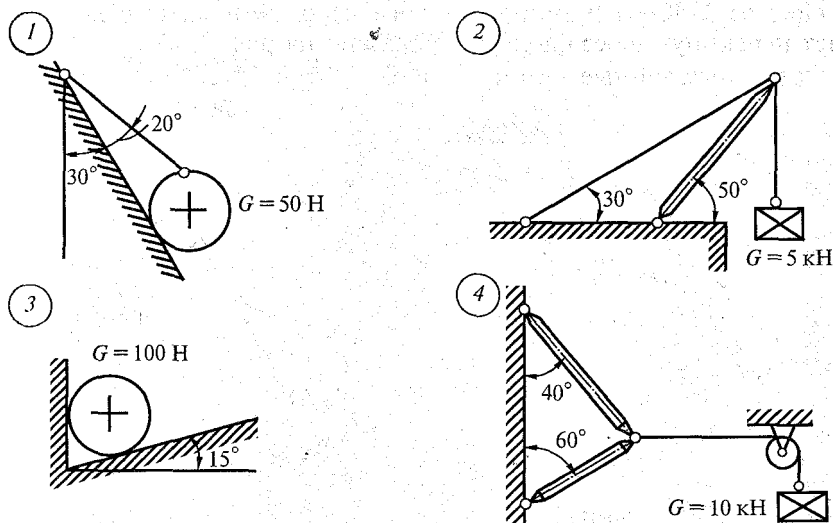


Рис. 4

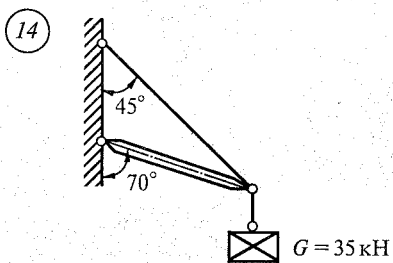
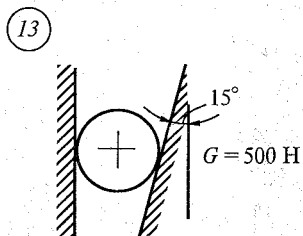
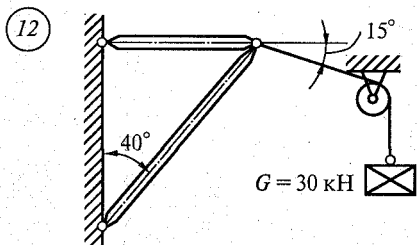
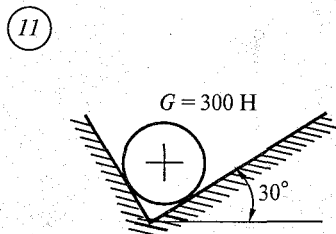
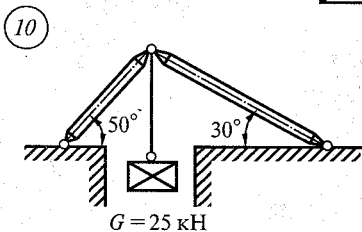
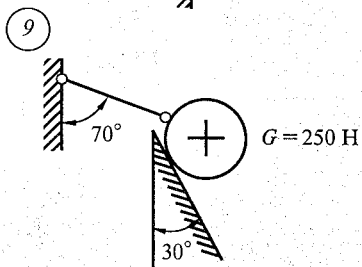
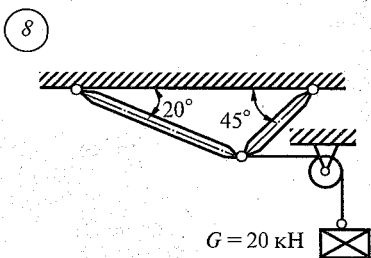
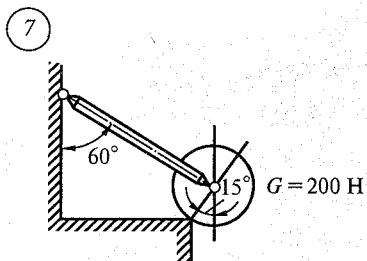
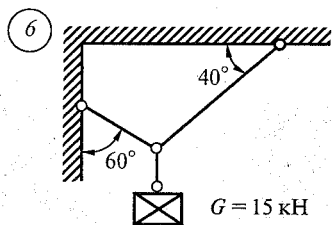
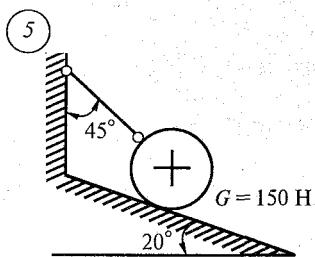


Рис. 4. Продолжение

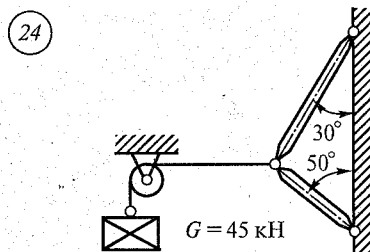
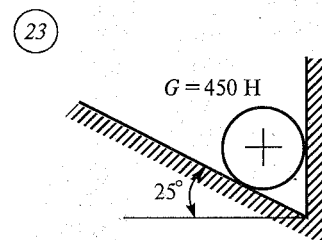
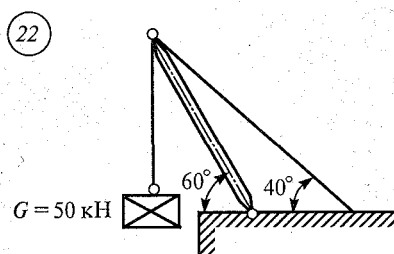
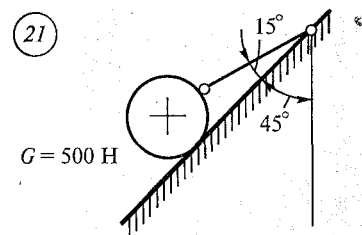
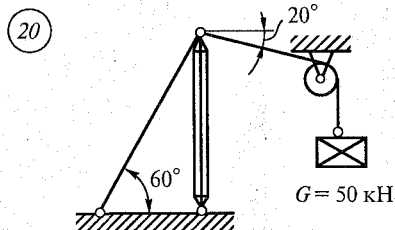
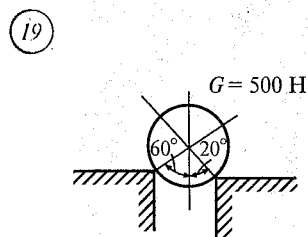
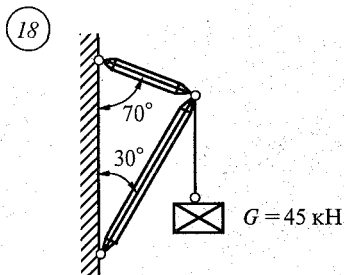
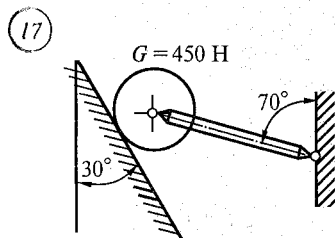
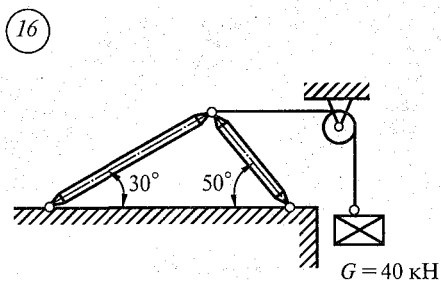
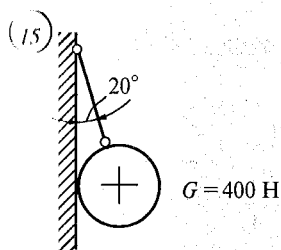
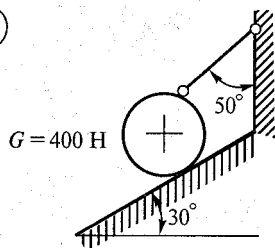
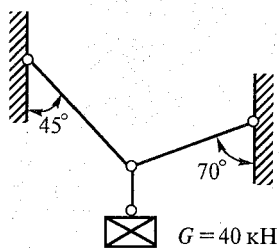


Рис. 4. Продолжение

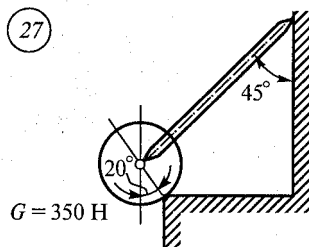
25



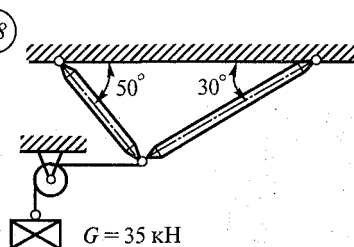
26



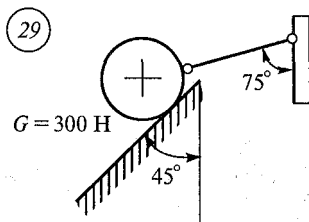
27



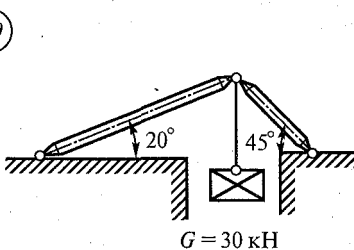
28



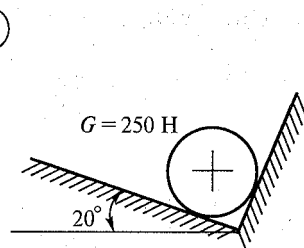
29



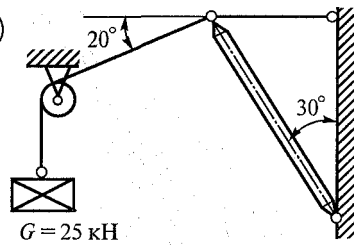
30



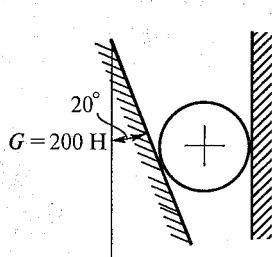
31



32



33



34

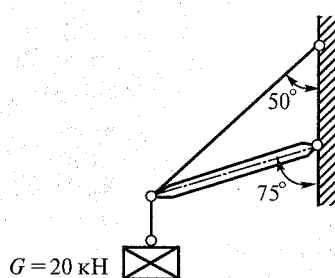
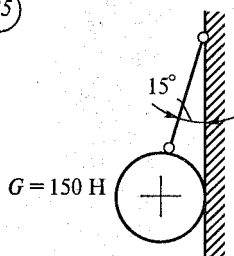


Рис. 4. Продолжение

35



36

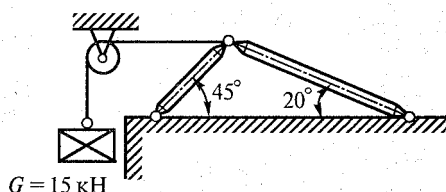


Рис. 4. Окончание

1.2. Определение опорных реакций балки на двух опорах при действии вертикальных нагрузок

1. *Заменяют распределенную нагрузку ее равнодействующей, которая является сосредоточенной силой. Для равномерно распределенной нагрузки равнодействующая равна произведению интенсивности нагрузки q на длину участка l_1 , на котором она действует: $F_q = ql_1$ (рис. 5).*

В задачах для самостоятельной работы возможны следующие основные случаи действия распределенной нагрузки в зависимости от ее положения относительно опор:

а) нагрузка действует на всем участке балки между опорами (рис. 5, а);

б) нагрузка действует на части балки между опорами (рис. 5, б);

в) нагрузка действует на всей длине одно- или двухконсольной балки (рис. 5, в, г);

г) нагрузка действует на консольной части и участке между опорами (рис. 5, д);

д) нагрузка действует симметрично относительно одной из опор (рис. 5, е).

В задачах возможны и другие случаи действия нагрузки, мало отличающиеся от приведенных на рис. 5. Перед решением задач рекомендуется уяснить и закрепить порядок нахождения равнодействующей и определения расстояний от нее до опор. При отсутствии навыков решения таких задач необходимо указывать положение равнодействующей относительно опор. В дальнейшем этого можно не делать.

2. *Обозначают опоры.* Общепринято их обозначать буквами A и B . Простая балка имеет одну шарнирно-неподвижную и вторую шарнирно-подвижную опору. Подробнее об опорах можно узнать в работе [4, с. 15].

3. *Освобождаются от опор и заменяют их действие на балку реакциями.* В задачах для самостоятельной работы на балку действу-

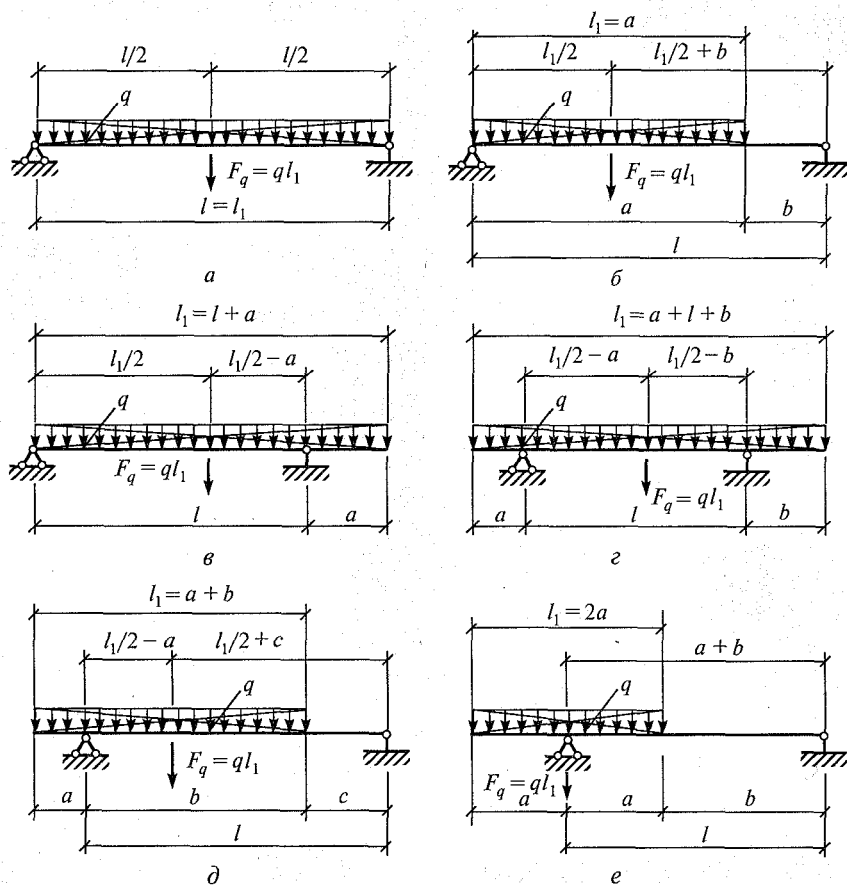


Рис. 5

ют только вертикальные нагрузки и сосредоточенные моменты. Реакции опор при такой нагрузке будут только вертикальными. Обычно их направляют вверх (против действия основной нагрузки) и обозначают реакцию опоры A — V_A , а опоры B — V_B .

4. Составляют уравнения равновесия вида:

$$1) \sum M_A = 0; \quad 2) \sum M_B = 0.$$

Напомним, что моментом силы относительно точки называется произведение этой силы на плечо — кратчайшее расстояние от этой точки приложения силы (в общем случае до линии действия силы).

Если сила стремится повернуть балку относительно рассматриваемой точки по часовой стрелке, то будем считать ее момент положительным, а если против — отрицательным. Сосредото-

численный момент не умножается на расстояние до опоры, а правило знаков остается тем же, что для момента силы.

Решают уравнения и находят реакции V_A и V_B .

5. *Выполняют проверку решения.* Для этого составляют уравнение равновесия: $\sum Y = 0$.

Если оно удовлетворено, то реакции найдены правильно, а если нет, то в решении допущена ошибка.

Пример 4. Определить опорные реакции балки, изображенной на рис. 6, а.

Решение. 1. Заменяем распределенную нагрузку равнодействующей. На балку действуют нагрузки разной интенсивности, поэтому для каждой из них найдем равнодействующую:

$$F_{q_1} = q_1 l_1 = 20 \cdot 4,5 = 90 \text{ кН}; \quad F_{q_2} = q_2 l_2 = 15 \cdot 3 = 45 \text{ кН},$$

где $l_1 = a + b = 1 + 3,5 = 4,5 \text{ м}$; $l_2 = d + d = 1,5 + 1,5 = 3 \text{ м}$.

Укажем расстояния от этих сил до каждой из опор (рис. 6, б).

2. Обозначим опоры A и B .

3. Укажем опорные реакции V_A и V_B . Обычно рис. 6, а и б совмещают в одном.

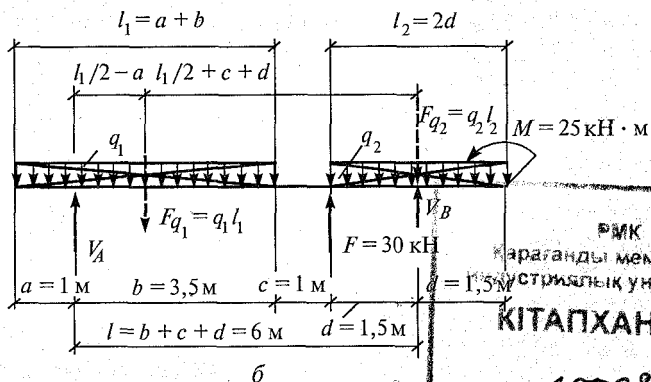
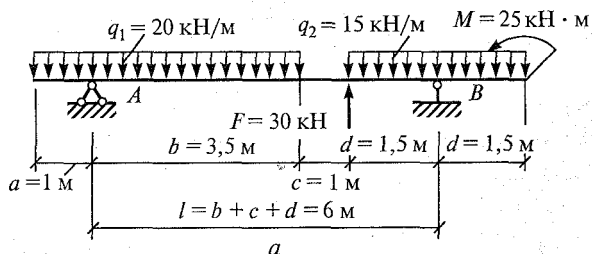


Рис. 6

РМК
Қарағанды мемлекеттік
техникалық университеті
КІТАПХАНАСЫ

Инв. № 255081

4. Составляем уравнения равновесия. Первое уравнение для нашей задачи примет вид

$$F_{q_1}(l_1/2 - a) - F(b + c) + F_{q_2}l - V_B l - M = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} V_B &= [F_{q_1}(l_1/2 - a) - F(b + c) + F_{q_2}l - M]/l = \\ &= \frac{90(4,5/2 - 1) - 30(3,5 + 1) + 45 \cdot 6 - 25}{6} = 37,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Второе уравнение примет вид

$$V_A l - F_{q_1}(d + c + l_1/2) + Fd - M = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} V_A &= [F_{q_1}(d + c + l_1/2) - Fd + M]/l = \\ &= \frac{90(1,5 + 1 + 4,5/2) - 30 \cdot 1,5 + 25}{6} = 67,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

5. Выполним проверку, используя уравнение $\sum Y = 0$, которое примет вид

$$V_A - F_{q_1} + F + V_B - F_{q_2} = 0$$

или

$$67,9 - 90 + 30 + 37,1 - 45 = 0, \text{ откуда } 135 - 135 = 0.$$

Реакции определены правильно.

Ответ: $V_A = 67,9 \text{ кН}$; $V_B = 37,1 \text{ кН}$.

Задание для самостоятельной работы 2. Определить опорные реакции балки на двух опорах по данным одного из вариантов, показанных на рис. 7. Проверить правильность их определения.

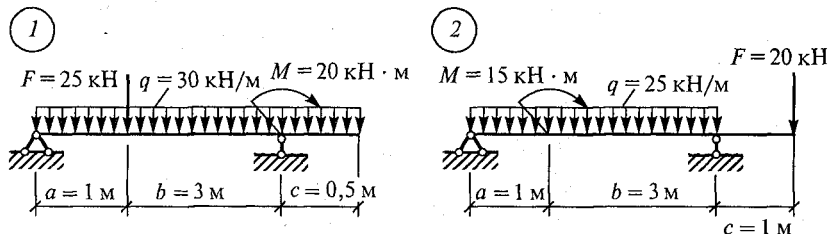
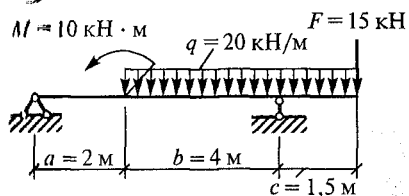
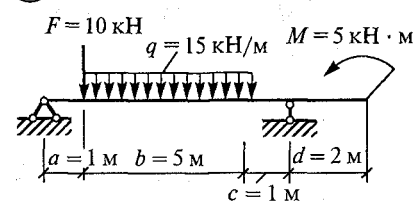


Рис. 7

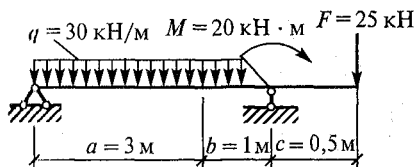
3



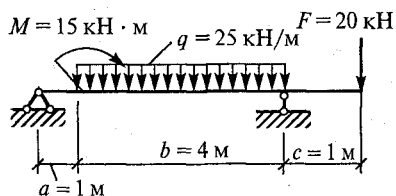
4



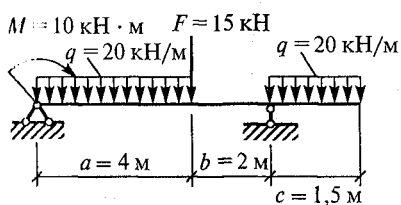
5



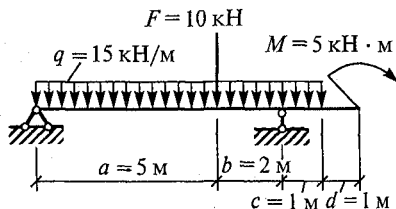
6



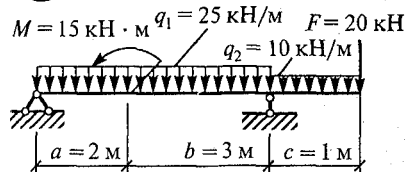
7



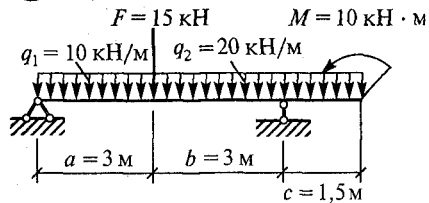
8



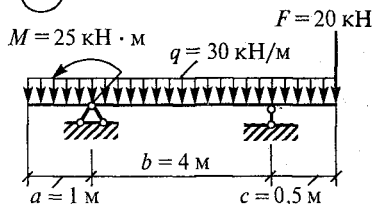
9



10



11



12

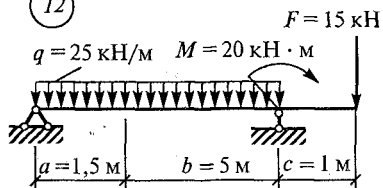


Рис. 7. Продолжение

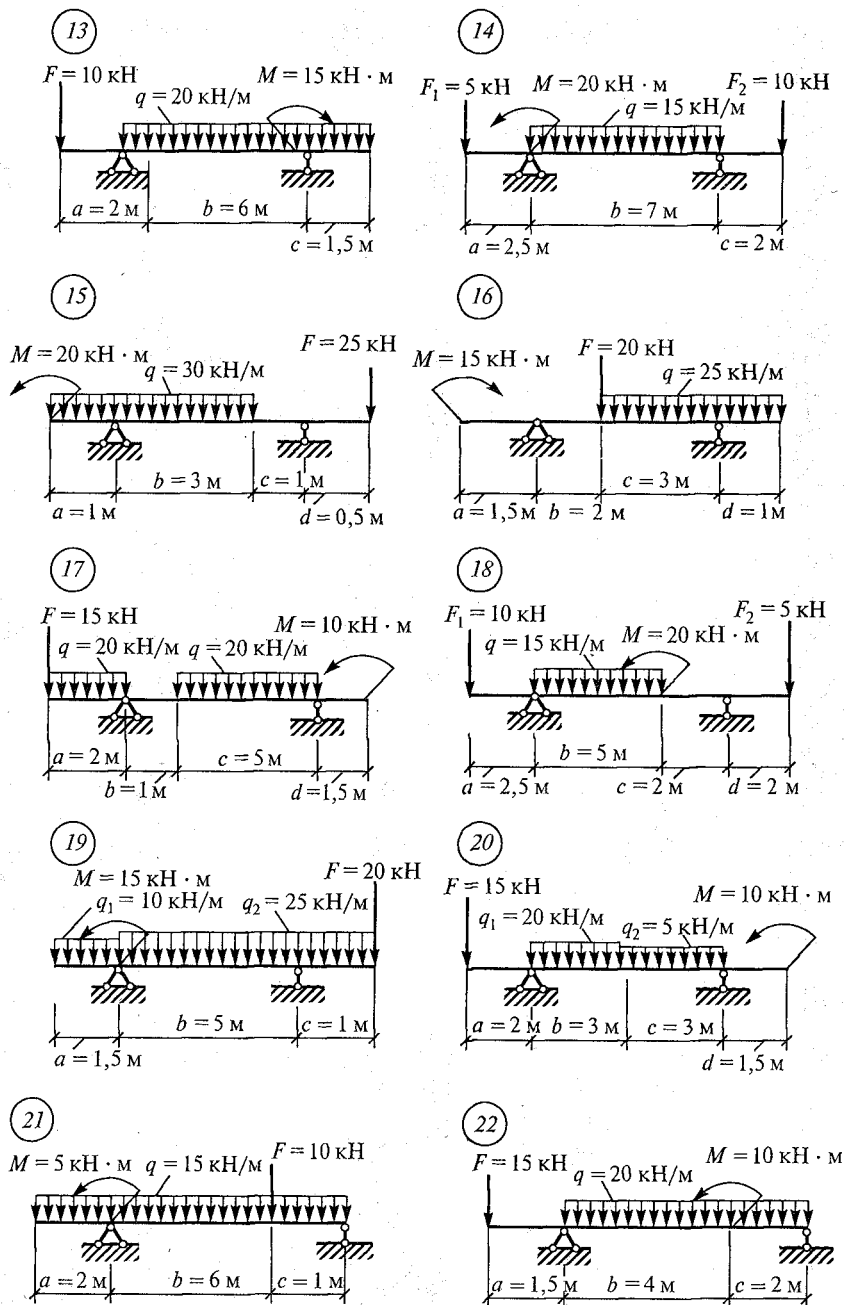


Рис. 7. Продолжение

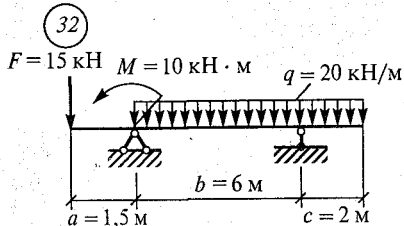
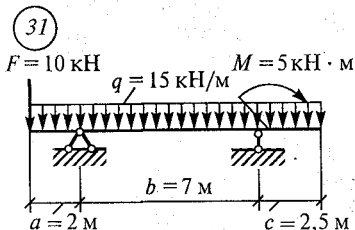
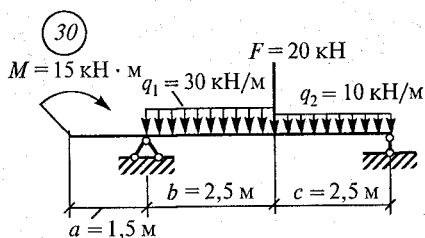
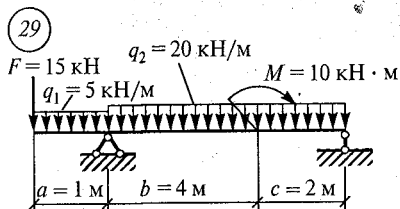
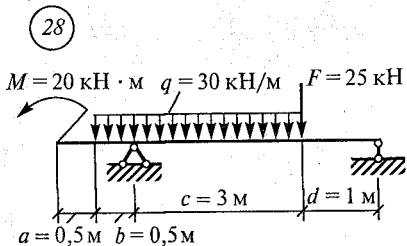
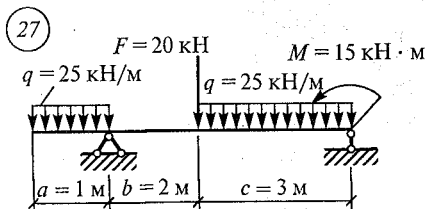
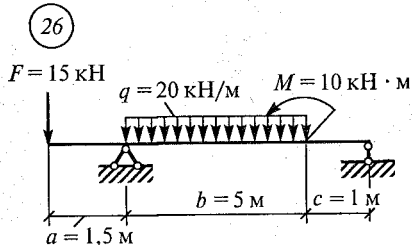
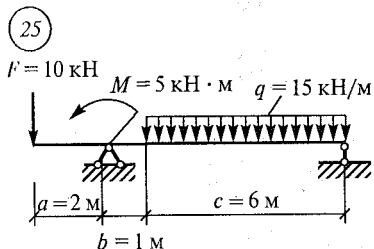
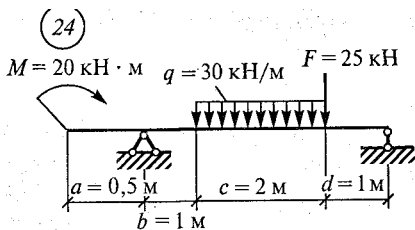
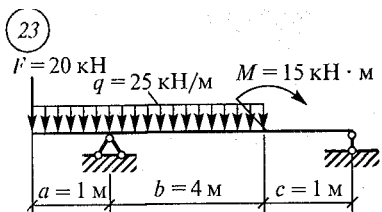


Рис. 7. Продолжение

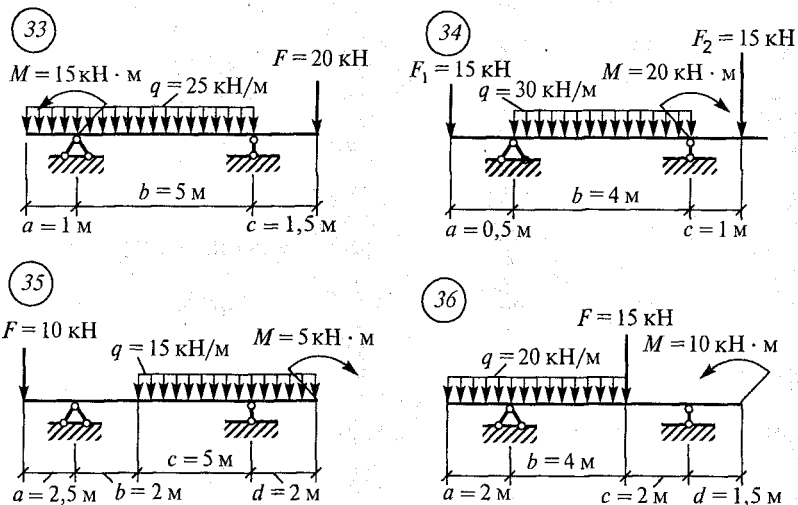


Рис. 7. Окончание

1.3. Определение положения центра тяжести сечения

1. *Разбивают сечение на простые фигуры.* В задачах для самостоятельной работы такими фигурами являются стандартные профили проката, размеры которых приведены в прил. I. Обычно профили прокатной стали, образующие сечение, обозначают цифрами 1, 2, 3, ...

2. *Указывают центры тяжести каждого профиля (фигуры) и обозначают их C_1, C_2, \dots, C_n , используя таблицы ГОСТов (см. прил. I).*

3. *Выбирают систему координатных осей.* В задачах для самостоятельной работы все сечения имеют одну ось симметрии, поэтому рекомендуется одну из координатных осей совмещать с ней. Вторую ось координат направляют перпендикулярно первой так, чтобы она пересекла центры тяжести одной или нескольких фигур. При этом начало координат может совпадать (или не совпадать) с центром тяжести одной из фигур. Вторую ось можно направить так, чтобы она прошла через нижнюю (крайнюю) точку сечения. В первом случае вычисления будут более простыми.

4. *Составляют формулы для определения координат центра тяжести сечения:*

$$1) x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n};$$

$$2) y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

Пользуясь таблицами ГОСТов (см. прил. I), определяют площади профилей проката A_1, A_2, \dots, A_n , координаты их центров тяжести x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_n относительно выбранных осей координат. Число слагаемых в числителе и знаменателе формул зависит от числа профилей, из которых состоит сечение. Полученные величины подставляют в формулу и находят x_C и y_C .

Следует помнить, что если ось x совмещена с осью симметрии, то координата $y_C = 0$, а если ось y совмещена с осью симметрии, то $x_C = 0$.

5. *Указывают положение центра тяжести на рисунке*, придерживаясь определенного масштаба, и показывают расстояние от центра тяжести до координатных осей.

6. *Выполняют проверку правильности решения*, для чего можно изменить положение координатных осей (или одной оси) и найти координаты центра тяжести относительно новых осей. Положение центра тяжести не зависит от того, как выбрана система координатных осей.

Пример 5. Определить координаты центра тяжести сечения, показанного на рис. 8, а. Сечение состоит из двух уголков (\angle) 56×4 и швеллера (I) № 18. Выполнить проверку правильности определения положения центра тяжести. Указать его положение на сечении.

Решение. 1. *Разобьем сечение на профили проката:* два уголка 56×4 и швеллер № 18. Обозначим их 1, 2, 3 (см. рис. 8, а).

2. *Укажем центры тяжести каждого профиля, используя табл. 1 и 4 прил. I*, и обозначим их C_1, C_2, C_3 .

3. *Выберем систему координатных осей.* Ось y совместим с осью симметрии, а ось x проведем через центры тяжести уголков.

4. *Определим координаты центра тяжести всего сечения.* Так как ось y совпадает с осью симметрии, то она проходит через центр тяжести сечения, поэтому $x_C = 0$. Координату y_C определим по формуле

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$

Пользуясь табл. 1 и 4 прил. I, определим площади каждого профиля и координаты центров тяжести:

$$A_1 = 4,38 \text{ см}^2, \quad y_1 = 0; \quad A_2 = 4,38 \text{ см}^2, \quad y_2 = 0;$$

$$A_3 = 20,7 \text{ см}^2, \quad y_3 = z_{0(\text{уг})} + z_{0(\text{шв})} = 1,52 + 1,94 = 3,46 \text{ см}.$$

Координаты y_1 и y_2 равны нулю, так как ось x проходит через центры тяжести уголков. Подставим полученные значения в формулу для определения y_C :

$$y_C = \frac{4,38 \cdot 0 + 4,38 \cdot 0 + 20,7 \cdot 3,46}{4,38 + 4,38 + 20,7} = \frac{71,62}{29,46} = 2,43 \text{ см}.$$

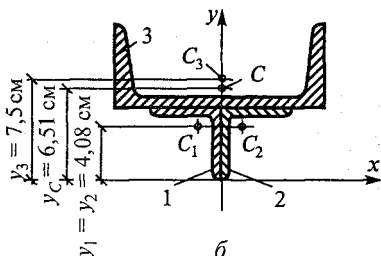
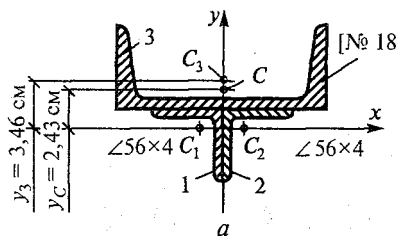


Рис. 8

5. Укажем центр тяжести сечения на рис. 8, а и обозначим его буквой C . Покажем расстояние $y_C = 2,43$ см от оси x до точки C .

Поскольку уголки симметрично расположены, имеют одинаковую площадь и координаты, то $A_1 = A_2$, $y_1 = y_2$. Поэтому формула для определения y_C может быть упрощена:

$$y_C = \frac{2A_1y_1 + A_3y_3}{2A_1 + A_3}.$$

6. Выполним проверку. Для этого ось x проведем по нижнему краю полки уголка (рис. 8, б). Ось y оставим, как в первом решении. Формулы для определения x_C и y_C не изменяются:

$$x_C = 0; \quad y_C = \frac{2A_1y_1 + A_3y_3}{2A_1 + A_3}.$$

Площади профилей останутся такими же, а координаты центров тяжести уголков и швеллера изменятся. Выпишем их:

$$A_1 = A_2 = 4,38 \text{ см}^2; \quad y_1 + y_2 = b_{\text{ут}} - z_{0(\text{ут})} = 5,6 - 1,52 = 4,08 \text{ см};$$

$$A_3 = 20,7 \text{ см}^2; \quad y_3 = b_{\text{ут}} + z_{0(\text{шв})} = 5,6 + 1,94 = 7,54 \text{ см}.$$

Находим координату центра тяжести:

$$y_C = \frac{2 \cdot 4,38 \cdot 4,08 + 20,7 \cdot 7,54}{2 \cdot 4,38 + 20,7} = 6,51 \text{ см}.$$

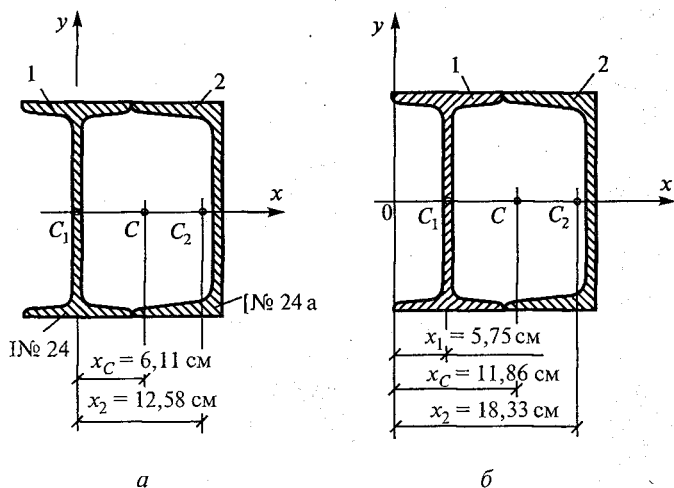


Рис. 9

По найденным координатам x_C и y_C наносим на рисунок точку C . Найденное двумя способами положение центра тяжести находится в одной и той же точке. Проверим это. Разница между координатами y_C , найденными при первом и втором решении, составляет: $6,51 - 2,43 = 4,08$ см.

Это равно расстоянию между осями x при первом и втором решении: $5,6 - 1,52 = 4,08$ см.

Ответ: $y_C = 2,43$ см, если ось x проходит через центры тяжести уголков, или $y_C = 6,51$ см, если ось x проходит по нижнему краю полки уголка.

Пример 6. Определить координаты центра тяжести сечения, изображенного на рис. 9, а. Сечение состоит из двутавра (I) № 24 и швеллера № 24а. Показать положение центра тяжести на сечении.

Решение. 1. Разобьем сечение на профили проката: двутавр и швеллер. Обозначим их цифрами 1 и 2.

2. Укажем центры тяжести каждого профиля C_1 и C_2 , используя табл. 3 и 4 прил. I.

3. Выберем систему осей координат. Ось x совместим с осью симметрии, а ось y проведем через центр тяжести двутавра.

4. Определим координаты центра тяжести сечения. Координата $y_C = 0$, так как ось x совпадает с осью симметрии. Координату x_C определим по формуле

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2}.$$

По табл. 3 и 4 прил. I и схеме сечения определим

$$A_1 = 34,8 \text{ см}^2; \quad x_1 = 0;$$

$$A_2 = 32,9 \text{ см}^2; \quad x_2 = b_{\text{дв}}/2 + b_{\text{шв}} - z_{0(\text{шв})} = \frac{11,5}{2} + 9,5 - 2,67 = 12,58 \text{ см}.$$

Подставим числовые значения в формулу и получим

$$x_C = \frac{34,8 \cdot 0 + 32,9 \cdot 12,58}{34,8 + 32,9} = 6,11 \text{ см}.$$

5. Нанесем точку *C* (центр тяжести сечения) по найденным значениям x_C и y_C (см. рис. 9, а).

6. Проверку решения необходимо выполнить самостоятельно при положении осей, как показано на рис. 9, б. В результате решения получим $x_C = 11,86$ см. Разница между значениями x_C при первом и втором решении равна $11,86 - 6,11 = 5,75$ см, что равно расстоянию между осями y при тех же решениях $b_{\text{дв}}/2 = 5,75$ см.

Ответ: $x_C = 6,11$ см, если ось y проходит через центр тяжести двутавра; $x_C = 11,86$ см, если ось y проходит через левые крайние точки двутавра.

Задание для самостоятельной работы 3. Определить координаты центра тяжести сечения по данным одного из вариантов, показанных на рис. 10. Показать положение центра тяжести на сечении.

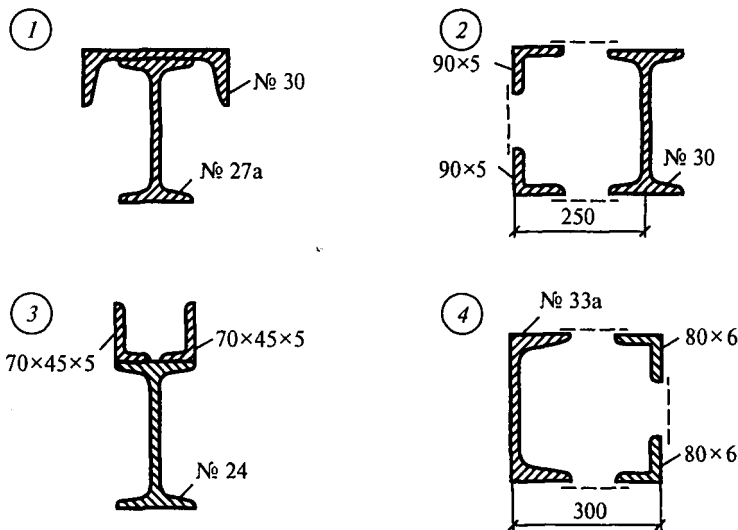


Рис. 10

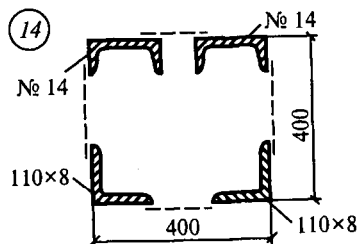
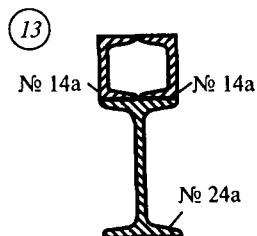
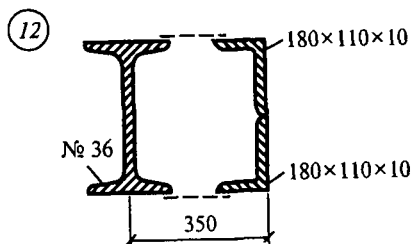
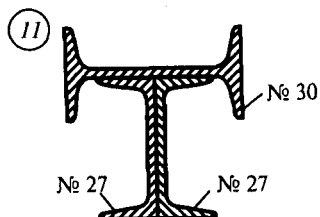
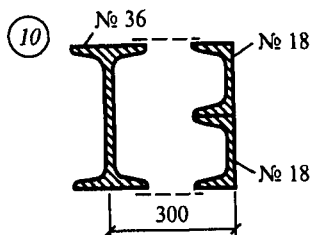
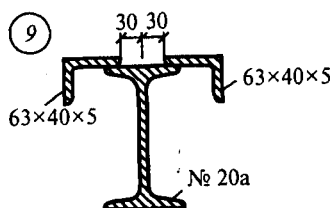
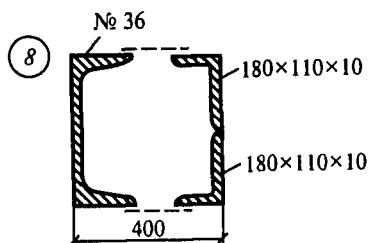
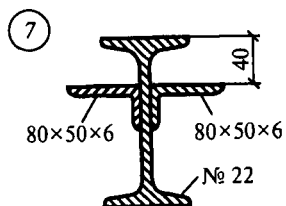
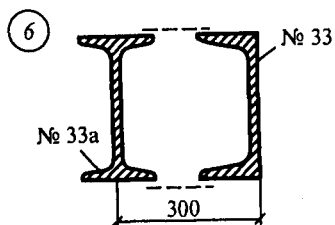
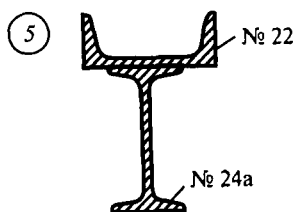


Рис. 10. Продолжение

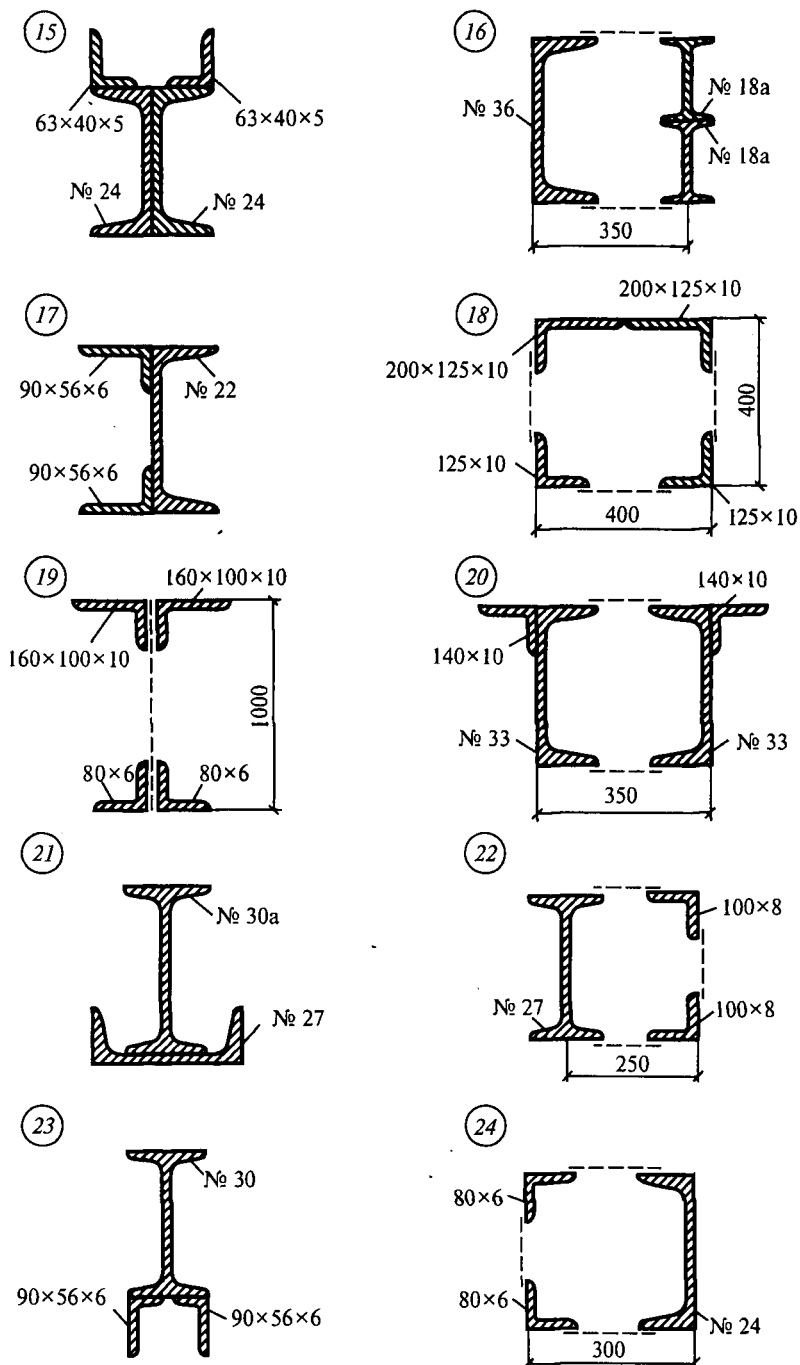


Рис. 10. Продолжение

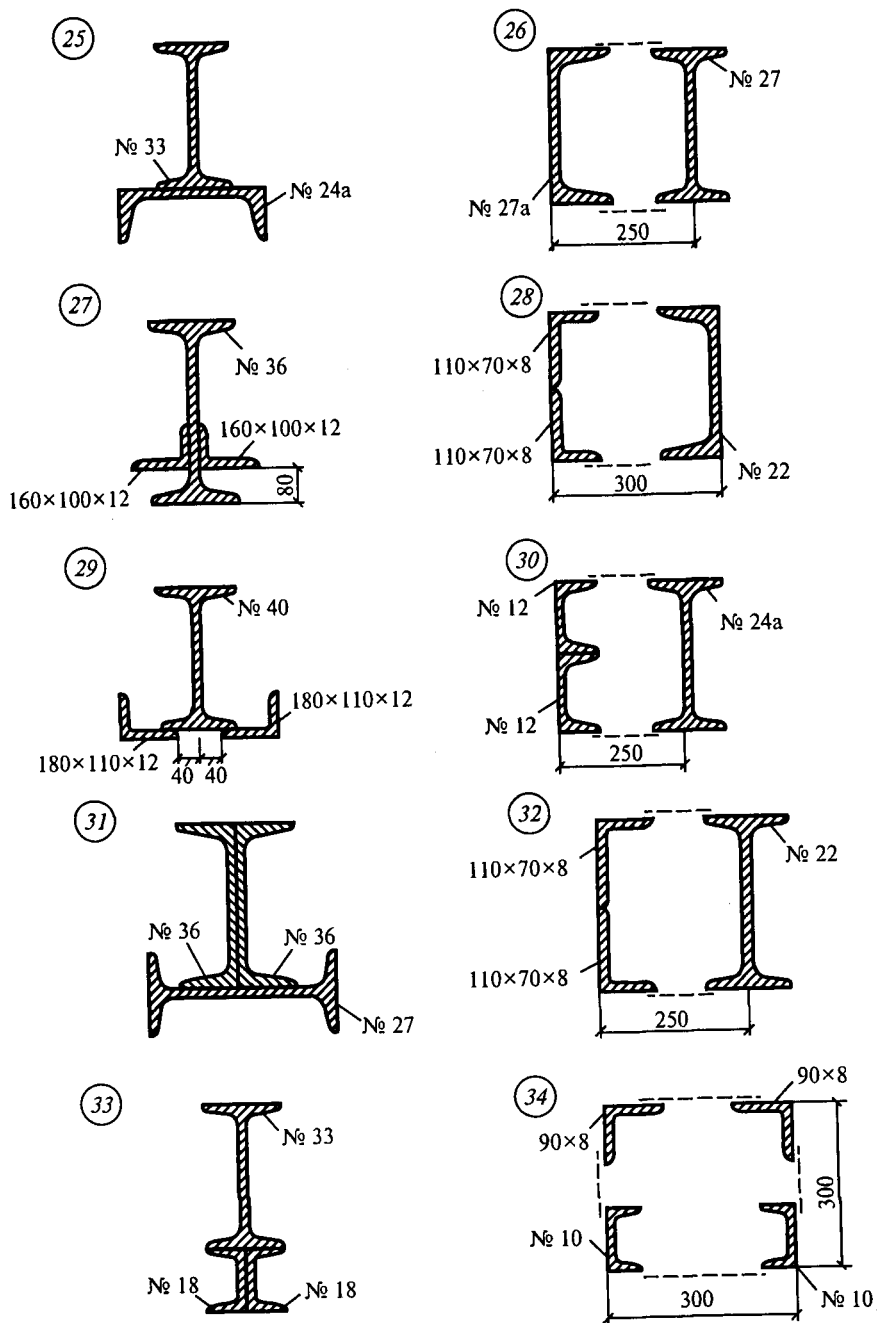


Рис. 10. Продолжение

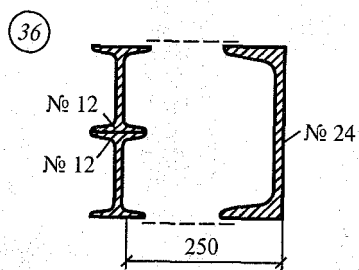
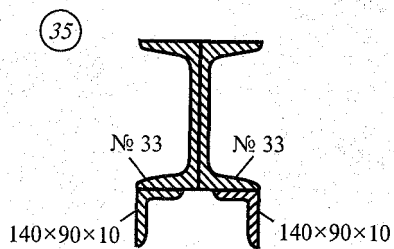


Рис. 10. Окончание

ГЛАВА 2

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

2.1. Подбор сечений стержней из расчета на прочность

1. Мысленно отбрасывают связи и заменяют их действие на брус реакциями. В задачах для самостоятельной работы абсолютно жесткий брус удерживается в равновесии шарнирно-неподвижной опорой и одиночным стержнем (подвеской или колонной).

По условию задачи требуется рассчитать только стержень, поэтому рекомендуется показать усилие в стержне N и не показывать реакций опоры, определение которых выходит за рамки самостоятельной работы.

Направление неизвестного усилия можно принять произвольно, но можно руководствоваться и более конкретной рекомендацией: усилие направлено по оси стержня в сторону, противоположную действию нагрузки. Приведенные схемы нагрузок дают возможность безошибочно определить направление действия усилия.

2. Определяют величину усилия N в стержне. Для этого составляют всего одно уравнение равновесия — сумма моментов всех сил относительно неподвижной опоры должна быть равна нулю: $\sum M_{A(B)} = 0$. Неподвижная опора в одних заданиях может быть обозначена A , в других — B .

Проверка решения не выполняется, так как не определялись опорные реакции неподвижной опоры.

3. Определяют требуемую площадь поперечного сечения стержня из условия прочности по формуле

$$A_{\text{тр}} \geq N/R, \quad (\text{a})$$

где N — усилие в стержне; R — расчетное сопротивление материала подвески по прил. VIII.

Следует обратить внимание на то, что в отличие от СНиПа, в расчетной формуле коэффициент условия работы γ_c принят равным 1 и исключен из знаменателя, а также вместо R_y принято R .

Это сделано из-за отсутствия сведений о назначении элементов стальных конструкций и для получения единообразных формул при расчете конструкций из разных материалов (стали прокатной фасонной, стали арматурной, алюминия).

Подбор сечения сжатого стержня предлагается выполнить только из расчета на прочность без учета потери устойчивости.

При пользовании формулой (а) следует помнить, что усилие N имеет размерность кН, расчетное сопротивление R — МПа, а требуемую площадь $A_{тр}$ измеряют в см^2 для удобства пользования прил. I, поэтому необходимы преобразования в размерностях. Они будут показаны в примере 7.

4. По найденной площади *определяют требуемый профиль прокатной стали или диаметр арматурного стержня* согласно заданию.

Требуемый профиль прокатной стали определяют по площади $A_{тр}$, используя прил. I, а диаметр стержня можно найти по формуле

$$d_{тр} = \sqrt{4A_{тр}/\pi}. \quad (б)$$

При назначении диаметра стержня полученный результат в формуле (б) рекомендуется округлить до размера, кратного 2 мм в большую сторону.

5. *Выполняют проверку прочности принятого сечения по формуле*

$$N/A \leq R, \quad (в)$$

где A — принятая площадь поперечного сечения стержня. Она не равна требуемой площади, полученной по формуле (а), так как за редким исключением площадь сечения, приведенная в прил. I, не совпадает с требуемой, кроме того, принятый диаметр, как правило, округляется и принимается большим, чем требуемый.

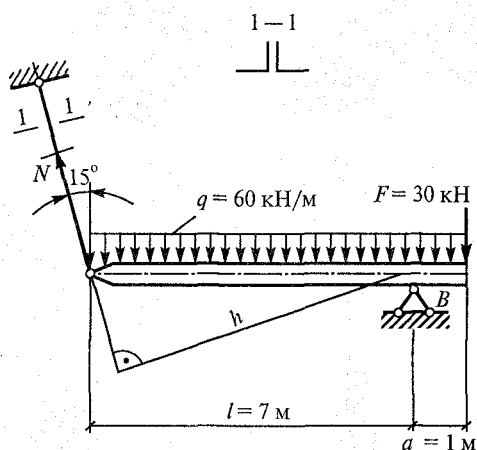


Рис. 11

Прочность стержня считается обеспеченной, если условие (в) удовлетворено, и необеспеченной, если оно не удовлетворено.

Пример 7. Подобрать сечение стержня (подвески), поддерживающего брус AB , как показано на рис. 11. Материал — сталь марки С-235.

Решение. 1. Мысленно отбрасываем стержень, заменяя его действие на брус усилием N . Направим его вверх, полагая, что он уравновешивает нагрузку, направленную вниз.

2. Определим величину усилия N , составив уравнение равновесия $\sum M_e = 0$, которое для заданной схемы примет вид

$$Nh - q(l + a) \left(\frac{l + a}{2} - a \right) + Fa = 0,$$

где $h = l \cos 15^\circ = 7 \cdot 0,966 = 6,76$ м.

После подстановки известных величин получим

$$N \cdot 6,76 - 60 \cdot 8 \cdot 3 + 30 \cdot 1 = 0,$$

откуда

$$N = \frac{60 \cdot 8 \cdot 3 - 30 \cdot 1}{6,76} = \frac{1410}{6,76} = 208,6 \text{ кН}.$$

3. Определим требуемую площадь поперечного сечения стержня по формуле (а):

$$A_{\text{тр}} = \frac{208,6 \text{ кН}}{230 \text{ МПа}} = \frac{208,6 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{230 \text{ МПа}} = 0,907 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 9,07 \text{ см}^2,$$

где $R = 230$ МПа для стали марки С-235 (см. прил. VIII).

4. По найденной площади определим требуемый профиль (номер) равнополочного уголка. На два уголка требуется $9,07 \text{ см}^2$, на один — $A_1 = 4,535 \text{ см}^2$. По табл. 1 прил. I подбираем уголок 50×5 площадью $4,80 \text{ см}^2$. На два уголка площадь $A = 9,6 \text{ см}^2$.

5. Выполним проверку прочности принятого сечения по формуле (в):

$$\frac{N}{A} = \frac{208,6 \text{ кН}}{9,6 \text{ см}^2} = \frac{208,6 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{9,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 217,3 \text{ МПа} < 230 \text{ МПа},$$

учитывая, что $1 \text{ МН/м}^2 = 1 \text{ МПа}$. Прочность стержня обеспечена, так как условие (в) удовлетворено.

Ответ: Для стержня принято сечение из двух уголков 50×5 .

Аналогично ведется расчет на подбор сечения колонны из швеллеров, которые приведены в задании для самостоятельной работы.

Пример 8. По условию примера 7 подобрать диаметр стержня-подвески из арматурной стали класса А-II.

Решение. 1, 2. Усилие $N = 208,6$ кН остается без изменения, как и в примере 7, так как не изменилась схема и нагрузка на брус.

3. Определим требуемую площадь сечения стержня по формуле (а):

$$A_{\text{тр}} = \frac{N}{R} = \frac{208,6 \text{ кН}}{280 \text{ МПа}} = \frac{208,6 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{280 \text{ МПа}} = 0,745 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 7,45 \text{ см}^2,$$

где $R = 280$ МПа для арматурной горячекатаной стали класса А-II (см. прил. VIII).

4. Определим требуемый диаметр стержня по формуле (б):

$$d_{\text{тр}} = \sqrt{4A_{\text{тр}}/\pi} = \sqrt{4 \cdot 7,45/3,14} \text{ см} = 3,07 \text{ см} = 30,7 \text{ мм}.$$

Округляя полученный результат до размера, кратного 2 мм, в большую сторону, получим диаметр стержня $d = 32$ мм или 3,2 см.

5. Выполним проверку прочности сечения стержня по формуле (в):

$$\frac{N}{A} = \frac{208,6 \text{ кН}}{8,04 \text{ см}^2} = \frac{208,6 \cdot 10^{-3} \text{ МН}}{8,04 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 259 \text{ МПа} < 280 \text{ МПа},$$

$$\text{где } A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 3,2^2}{4} \text{ см}^2 = 8,04 \text{ см}^2.$$

Прочность стержня обеспечена, так как условие (в) удовлетворено.

Задание для самостоятельной работы 4. Подобрать сечение стержня-подвески (или колонны), поддерживающего брус AB по данным одного из вариантов, приведенных на рис. 12. Материал стержня для фасонных профилей — прокатная сталь С-245, для круглого сечения — сталь арматурная горячекатаная класса А-I.

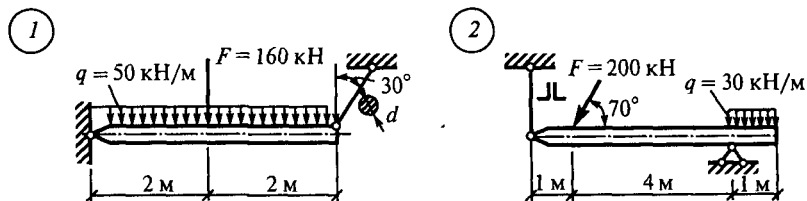


Рис. 12

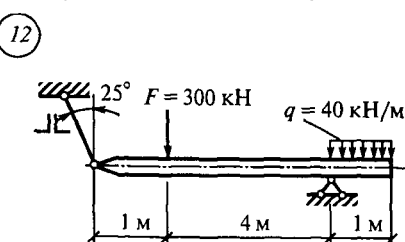
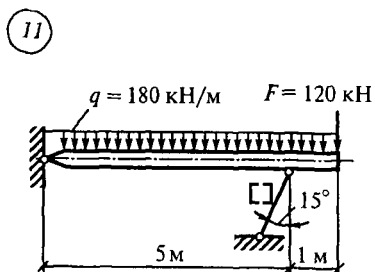
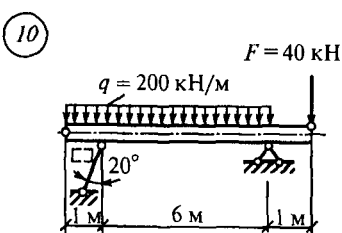
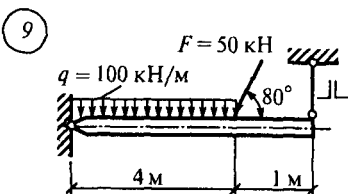
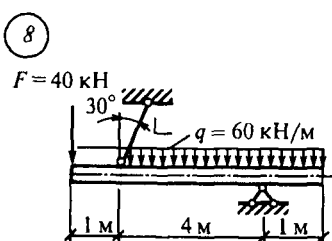
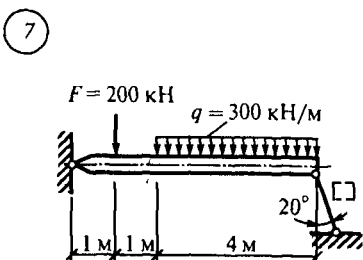
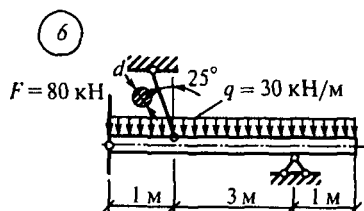
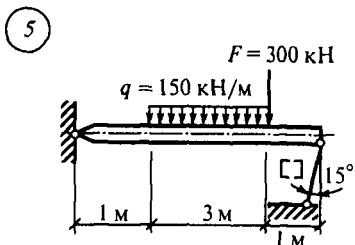
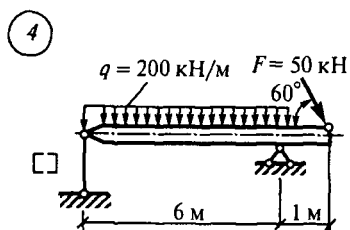
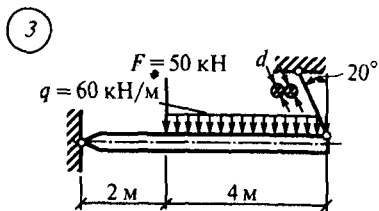
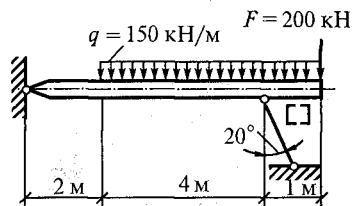
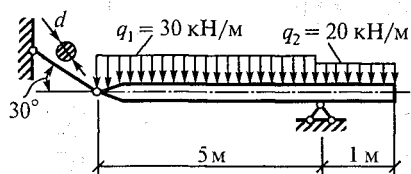


Рис. 12. Продолжение

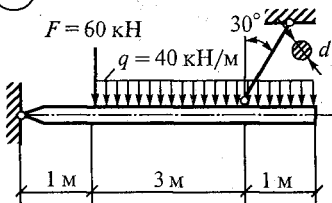
13



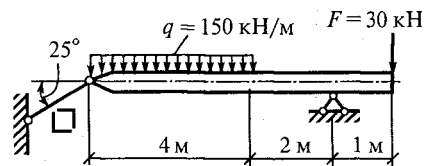
14



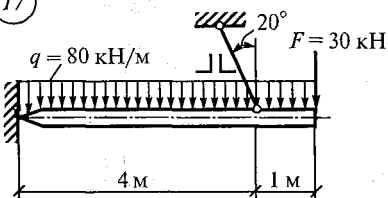
15



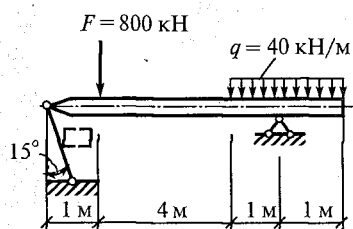
16



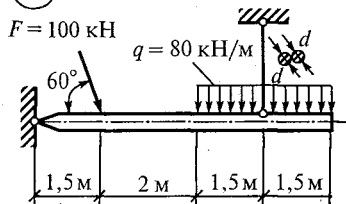
17



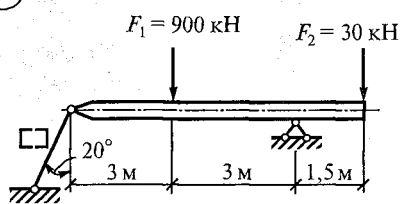
18



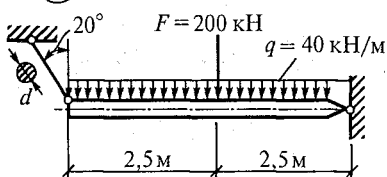
19



20



21



22

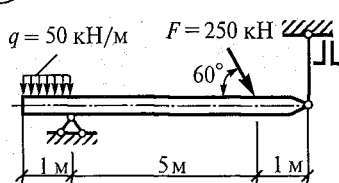
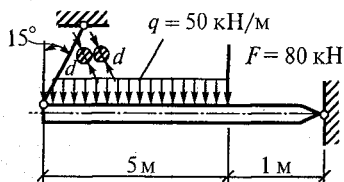
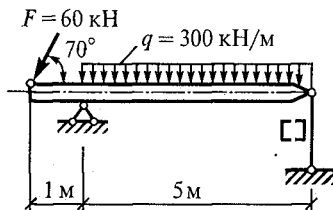


Рис. 12. Продолжение

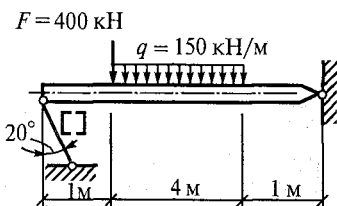
23



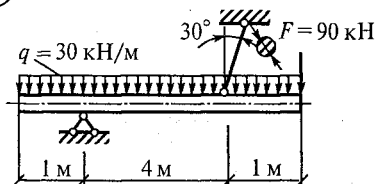
24



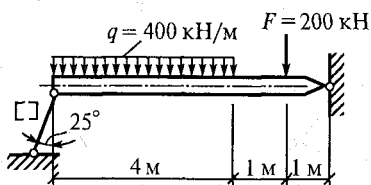
25



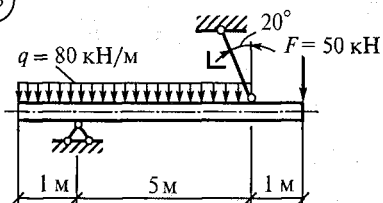
26



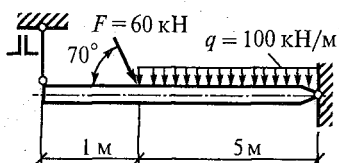
27



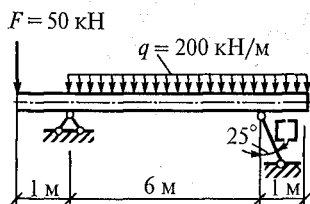
28



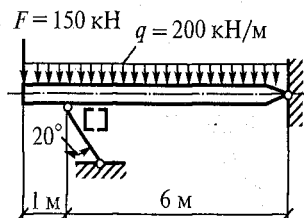
29



30



31



32

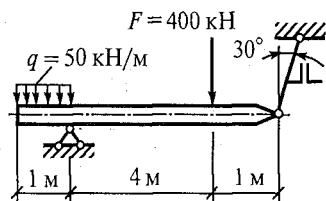
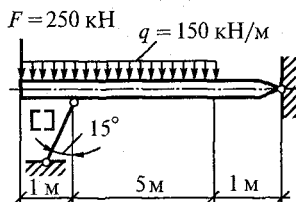
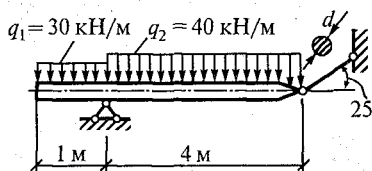


Рис. 12. Продолжение

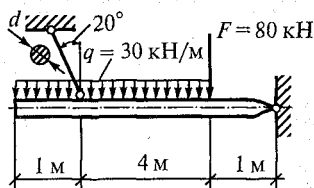
33



34



35



36

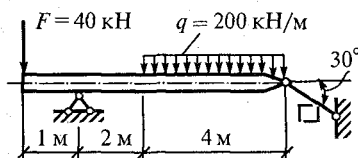


Рис. 12. Окончание

2.2. Определение главных центральных моментов инерции сечения

1. *Определяют положение центра тяжести сечения* (см. порядок решения задачи для самостоятельной работы 3).

2. *Проводят центральные оси для каждого профиля проката или простой геометрической фигуры.* Эти оси называются центральными осями. Для первой фигуры проводят оси x_1 и y_1 , для второй — x_2 и y_2 и т.д.

3. *Проводят главные центральные оси.* Они проходят через центр тяжести всего сечения. Одну из осей совмещают с осью симметрии (в задании все сечения имеют такую ось), а вторую проводят через центр тяжести сечения перпендикулярно первой. Вертикальная ось обозначается v , а горизонтальная — u .

4. *Находят моменты инерции сечения относительно главных центральных осей.* В общем виде моменты инерции сечения определяют по формулам:

относительно оси u

$$J_u = J_u^I + J_u^{II} + \dots + J_u^n;$$

относительно оси v

$$J_v = J_v^I + J_v^{II} + \dots + J_v^n,$$

где J_u и J_v — моменты инерции сечения относительно главных центральных осей u и v (главные центральные моменты инерции); $J_u^I, J_u^{II}, \dots, J_u^n$ — моменты инерции простых фигур (1, 2, ..., n) относительно главной центральной оси u ; $J_v^I, J_v^{II}, \dots, J_v^n$ — то же, относительно оси v .

Моменты инерции простых фигур относительно осей u и v определяются по формулам:

относительно оси u

$$J_u^I = J_{x_1}^I + a_1^2 A_1; \quad J_u^{II} = J_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2; \quad \dots;$$

$$J_u^n = J_{x_n}^n + a_n^2 A_n;$$

относительно оси v

$$J_v^I = J_{y_1}^I + b_1^2 A_1; \quad J_v^{II} = J_{y_2}^{II} + b_2^2 A_2; \quad \dots;$$

$$J_v^n = J_{y_n}^n + b_n^2 A_n,$$

где $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_n}$ — моменты инерции простых фигур (1, 2, ..., n) относительно собственных центральных осей x_1, x_2, \dots, x_n . Они определяются по таблицам ГОСТов (см. прил. I) для профилей прокатной стали и формулам для простых геометрических фигур (см. прил. II); $J_{y_1}, J_{y_2}, \dots, J_{y_n}$ — то же, относительно осей y_1, y_2, \dots, y_n ; a_1, a_2, \dots, a_n — расстояние от главной центральной оси u до центральных осей x_1, x_2, \dots, x_n ; b_1, b_2, \dots, b_n — то же, от оси v до осей y_1, y_2, \dots, y_n ; A_1, A_2, \dots, A_n — площади сечений профилей прокатной стали или простых геометрических фигур.

Если главная центральная ось совпадает с собственной центральной осью какого-нибудь профиля или фигуры, то момент инерции ее относительно главной центральной оси равен моменту инерции относительно собственной оси, так как расстояние между ними равно нулю.

При определении геометрических характеристик необходимо учитывать, что профили проката на заданном сечении могут быть ориентированы иначе, чем в ГОСТах. Например, вертикальная по ГОСТу ось y на заданном сечении может оказаться горизонтальной, а горизонтальная ось x — вертикальной. Поэтому необходимо внимательно следить за тем, относительно каких осей следует брать геометрические характеристики. На это будет обращено особое внимание в рассматриваемых примерах.

Пример 9. Определить главные моменты инерции сечения, показанного на рис. 13. Сечение состоит из двух уголков 56×4 и швеллера № 18.

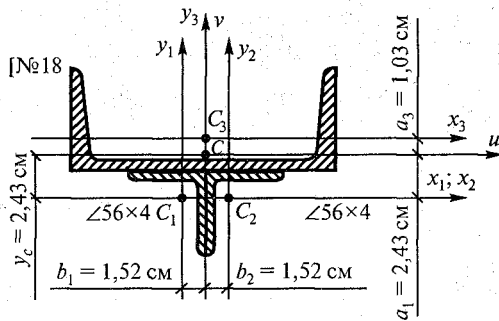


Рис. 13

Решение. 1. Определим положение центра тяжести сечения (см. пример 5). Координаты центра тяжести: $x_C = 0$; $y_C = 2,43$ см.

2. Проведем центральные оси x_1, x_2, x_3 и оси y_1, y_2, y_3 через центры тяжести фигур 1, 2, 3.

3. Проведем главные центральные оси. Ось v совместим с осью симметрии y_3 . Ось u проведем через центр тяжести сечения C перпендикулярно оси v . Оси v и y_3 совпали.

4. Определим главный момент инерции относительно оси u :

$$J_u = J_u^I + J_u^{II} + J_u^{III}.$$

Из рис. 13 следует, что уголки одинаковые и расположены на одинаковом расстоянии от оси u , т.е. $A_1 = A_2$ и $a_1 = a_2$.

Поэтому формулу для определения J_u можно записать:

$$J_u = 2J_u^I + J_u^{III},$$

где $J_u = J_x^I + a_1^2 A_1 = 13,1 + 2,43^2 \cdot 4,38 = 38,96$ см⁴; $J_u^{III} = J_{x_3}^{III} + a_3^2 A_3 = 86 + 1,03^2 \cdot 20,7 = 107,96$ см⁴, где $J_{x_1}^I = 13,1$ см⁴; $a_1 = 2,43$ см; $A_1 = 4,38$ см²; $J_{x_3}^{III} = 86$ см⁴; $a_3 = z_{0(yf)} + z_{0(шв)} - y_C = 1,52 + 1,95 - 2,43 = 1,03$ см; $A_3 = 20,7$ см² (см. табл. 4, прил. I).

Тогда $J_u = 2 \cdot 38,96 + 107,96 = 185,88$ см⁴.

Определим главный момент инерции относительно оси v :

$$J_v = J_v^I + J_v^{II} + J_v^{III}.$$

В этой формуле

$$J_v^I = J_{y_1}^I + b_1^2 A_1 = 13,1 + (-1,52)^2 \cdot 4,38 = 23,22$$
 см⁴;

$$J_v^{II} = J_{y_2}^{II} + b_2^2 A_2 = 13,1 + 1,52^2 \cdot 4,38 = 23,22$$
 см⁴;

$$J_v^{III} = J_{y_3}^{III} + b_3^2 A_3 = 1090$$
 см⁴,

где $J_{y_1}^I = 13,1 \text{ см}^4$; $b_1 = -z_{0(y_1)} = -1,52 \text{ см}$;
 $A_1 = 4,38 \text{ см}^2$; $J_{y_2}^{II} = 13,1 \text{ см}^4$; $b_2 = -z_{0(y_2)} =$
 $= 1,52 \text{ см}$ $A_2 = 4,38 \text{ см}^2$; $J_{y_3}^{III} = 1090 \text{ см}^4$;
 $b_3 = 0$; $A_3 = 20,7 \text{ см}^2$ (см. табл. 4 при-
 ложения I).

Тогда $J_v = 23,22 + 23,22 + 1090 =$
 $= 1136,4 \text{ см}^4$.

Ответ: $J_u = 185,88 \text{ см}^4$;

$J_v = 1136,4 \text{ см}^4$.

Пример 10. Определить момент инерции сечения, показанного на рис. 14, относительно главной центральной оси, не являющейся осью симметрии сечения. Сечение состоит из двутавра № 24 и швеллера № 24а.

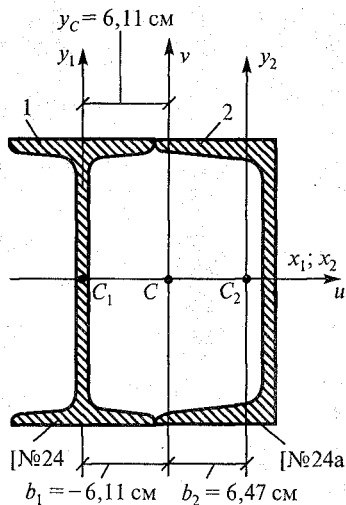


Рис. 14

Решение. 1. Центр тяжести сечения найден в примере 7 ($x_C = 6,11 \text{ см}$; $y_C = 0$).

2. Проведем центральные оси x_1, x_2 и y_1, y_2 . Оси x_1 и x_2 совпали.

3. Проведем главные центральные оси. Ось u совмещаем с осью симметрии, а ось v проводим через центр тяжести C перпендикулярно оси u . Оси u, x_1 и x_2 совпали.

4. Определим момент инерции сечения относительно оси v , так как по условию требуется найти момент инерции только относительно оси, не являющейся осью симметрии. Запишем формулу

$$J_v = J_v^I + J_v^{II}.$$

В этой формуле

$$J_v^I = J_{y_1}^I + b_1^2 A_1 = 198 + (-6,11)^2 \cdot 34,8 = 1497 \text{ см}^4;$$

$$J_v^{II} = J_{y_2}^{II} + b_2^2 A_2 = 254 + (6,47)^2 \cdot 32,9 = 1631 \text{ см}^4,$$

где $J_{y_1}^I = 198 \text{ см}^4$; $A_1 = 34,8 \text{ см}^2$ (см. табл. 3, прил. I); $J_{y_2}^{II} = 254 \text{ см}^4$;

$A_2 = 32,9 \text{ см}^2$ (см. табл. 4, прил. I); $b_1 = -6,11 \text{ см}$; $b_2 = \frac{b_{дв}}{2} + b_{шв} -$
 $-z_{0(шв)} = \frac{11,5}{2} + 9,5 - 6,11 - 2,67 = 6,47 \text{ см}$ (см. рис. 14 и табл. 3 и 4, прил. I).

Тогда $J_v = 1497 + 1631 = 3128 \text{ см}^4$.

Ответ: $J_v = 3128 \text{ см}^4$.

Задание для самостоятельной работы 5. Определить момент инерции сечения относительно главной центральной оси, не являющейся осью симметрии, по данным одного из вариантов, показанных на рис. 10.

2.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для простой балки

1. *Определяют опорные реакции балки* (см. порядок решения задачи самостоятельной работы 2).

2. *Обозначают характерные сечения (точки) балки.* Ими являются концевые сечения балки, опоры, точки приложения сосредоточенных сил и моментов, начало и конец распределенной нагрузки.

3. *Строят эпюру поперечных сил Q_x .* Для этого определяют значения поперечных сил в характерных точках. Напомним, что поперечная сила в сечении равна сумме проекций всех сил, расположенных только слева или только справа от рассматриваемого сечения, на ось, перпендикулярную оси элемента. Силу, расположенную слева от рассматриваемого сечения и направленную вверх, считают положительной (со знаком «плюс»), а направленную вниз — отрицательной (со знаком «минус»). Для правой части балки — наоборот.

В сечениях, соответствующих точкам приложения сосредоточенных сил, в том числе в точках приложения опорных реакций, необходимо определить два значения поперечной силы: чуть левее рассматриваемой точки и чуть правее ее. Поперечные силы в этих сечениях обозначаются соответственно $Q_{\text{лев}}$ и $Q_{\text{прав}}$.

Найденные значения поперечных сил в характерных точках откладываются в некотором масштабе от нулевой линии. Эти значения соединяются прямыми линиями по следующим правилам:

а) если к участку балки нет распределенной нагрузки, то под этим участком значения поперечных сил соединяются прямой линией, параллельной нулевой линии;

б) если на участке балки приложена распределенная нагрузка, то под этим участком значения поперечных сил соединяются прямой, наклонной к нулевой линии. Она может пересекать или не пересекать нулевую линию.

Соединив все значения поперечных сил по указанным правилам, получим график изменения поперечных сил по длине балки. Такой график называется эпюрой Q_x .

4. *Строят эпюру изгибающих моментов M_x .* Для этого определяют изгибающие моменты в характерных сечениях. Напомним, что изгибающий момент в рассматриваемом сечении равен сумме моментов всех сил (распределенных, сосредоточенных, в том

числе и опорных реакций, а также внешних сосредоточенных моментов), расположенных только слева или только справа от этого сечения. Если любое из перечисленных силовых воздействий стремится повернуть левую часть балки по часовой стрелке, то оно считается положительным (со знаком «плюс»), если против — отрицательным (со знаком «минус»), а для правой части наоборот.

В сечениях, соответствующих точкам приложения сосредоточенных моментов, необходимо определить два значения изгибающего момента: чуть левее рассматриваемой точки и чуть правее ее. Изгибающие моменты в этих точках обозначаются соответственно $M^{\text{лев}}$ и $M^{\text{прав}}$. В точках приложения сил определяется одно значение изгибающего момента.

Полученные значения откладываются в некотором масштабе от нулевой линии. Эти значения соединяются в соответствии со следующими правилами:

а) если на участке балки нет распределенной нагрузки, то под этим участком балки два соседних значения изгибающих моментов соединяются прямой линией;

б) если к участку балки приложена распределенная нагрузка, то под этим участком значения изгибающих моментов для двух соседних точек соединяются по параболе.

Парабола имеет выпуклость в сторону действия нагрузки (при действии нагрузки сверху парабола обращена выпуклостью вниз). При этом, если эпюра Q_x на рассматриваемом участке не пересекает нулевую линию, то эпюра M_x (она является параболой) может быть построена по двум точкам, так как все значения изгибающих моментов в промежуточных точках находятся между значениями в характерных сечениях. Если эпюра Q_x пересекает нулевую линию, то под этим сечением эпюра M_x будет иметь экстремальное (максимальное или минимальное) значение или вершину параболы. Положение этой точки находят по эпюре из подобия треугольников (см. примеры 11, 12). Затем находят значение изгибающего момента в этом сечении и строят эпюру M_x на участке с распределенной нагрузкой по трем точкам.

Соединив все значения изгибающих моментов по указанным правилам, получают график изменения изгибающих моментов по длине балки. Такой график называется эпюрой M_x .

Приведенный способ построения эпюр Q_x и M_x назовем способом построения эпюр по характерным сечениям. Такой способ является частным случаем более общего, хотя и более трудоемкого способа, который называется способом построения эпюр по участкам. Порядок построения эпюр при этом способе следующий. Балку разбивают на участки. Границами участков являются характерные сечения. Для каждого участка записывается

закон изменения усилий Q_x и M_x и определяются их величины при граничных значениях. По найденным величинам усилий строят соответствующие эпюры.

Существует несколько способов проверки правильности построения эпюр. Наиболее простой способ проверки заключается в том, что суммы моментов всех левых и всех правых сил, взятые отдельно, в любой точке балки должны быть равны между собой.

Пример 11. Построить эпюры Q_x и M_x для балки, показанной на рис. 15, а.

Решение. 1. Определим опорные реакции балки. Составим уравнения:

$$1) \sum M_A = 0; \quad 2) \sum M_B = 0.$$

Из первого уравнения найдем V_B :

$$-F(a+b) + q(b+c)\left(\frac{b+c}{2} - b\right) - V_B(c+d) - M = 0$$

или

$$-15 \cdot 2 + 20 \cdot 6 \cdot 2 - V_B \cdot 7 - 25 = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{-15 \cdot 2 + 20 \cdot 6 \cdot 2 - 25}{7} = 26,4 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения найдем V_A :

$$-F(a+b+c+d) + V_A(c+d) - q(b+c)\left(\frac{b+c}{2} + d\right) - M = 0$$

или

$$-15 \cdot 9 + V_A \cdot 7 - 20 \cdot 6 \cdot 5 - 25 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{15 \cdot 9 + 20 \cdot 6 \cdot 5 + 25}{7} = 108,6 \text{ кН.}$$

Выполним проверку:

$$\sum Y = V_A + V_B - F - q(b+c) = 0$$

или

$$108,6 + 26,4 - 15 - 20 \cdot 6 = 0, \text{ откуда } 135 - 135 = 0.$$

2. Обозначим характерные сечения балки С, D, А, Е, В, К.

3. Строим эпюру Q_x . Определим значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_C = -F = -15 \text{ кН}; \quad Q_D = -F = -15 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{лев}} = -F - qb = -15 - 20 \cdot 1 = -35 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{прав}} = -F - qb + V_A = -15 - 20 \cdot 1 + 108,6 = 73,6 \text{ кН};$$

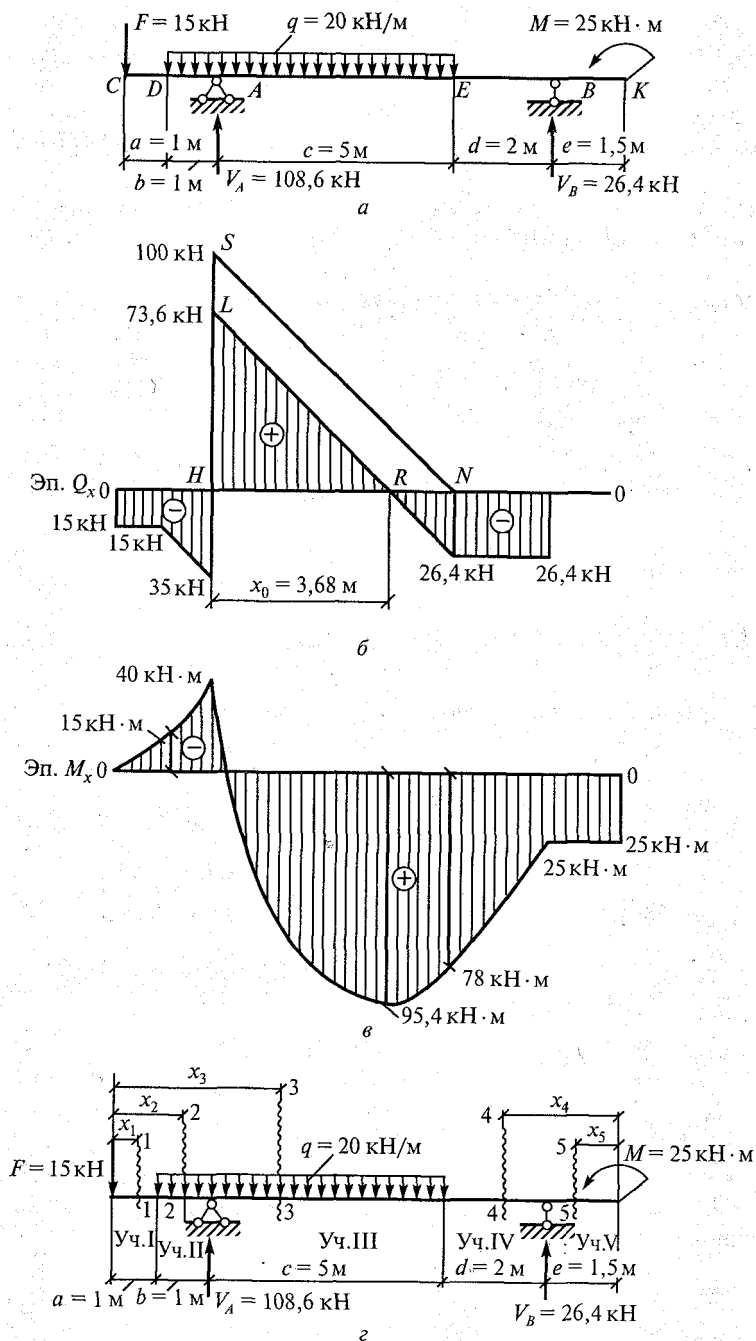


Рис. 15

$$Q_E = -F - q(b+c) + V_A = -15 - 20 \cdot 6 + 108,6 = -26,4 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{лев}} = Q_E = -26,4 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{прав}} = Q_B^{\text{лев}} + V_B = -26,4 + 26,4 = 0; \quad Q_K = 0.$$

Соединим полученные значения прямыми линиями (рис. 15, б) и получим эпюру Q_x . Эпюра Q_x на участке AE пересекает нулевую линию. Определим положение точки, в которой эпюра Q_x пересекает нулевую линию. Рассмотрим подобие треугольников HRL и HNS (см. рис. 15, б), откуда $HR/HN = HL/HS$, или $x_0/5 = 73,6/100$, откуда

$$x_0 = \frac{73,6 \cdot 5}{100} = 3,68 \text{ м}.$$

Это сечение считается также характерным для эпюры Q_x и M_x .

4. *Строим эпюру M_x .* Определим изгибающие моменты в характерных точках:

$$M_C = 0; \quad M_D = -Fa = -15 \cdot 1 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_A = -F(a+b) - (qb)(b/2) = -15 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned} M_E &= -F(a+b+c) + V_A c - q(b+c)(b+c)/2 = \\ &= -15 \cdot 7 + 108,6 \cdot 5 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{x_0} = 3,68 &= -F(a+b+x_0) - q(b+x_0)(b+x_0)/2 + V_A x_0 = \\ &= -15 \cdot 5,68 - 20 \cdot 4,68 \cdot 2,34 + 108,6 \cdot 3,68 = 95,4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$M_B = M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рассмотрена правая часть балки ВК);}$$

$$M_K = M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. *Строим эпюру M_x на участках между характерными точками:*

а) на участке CD нагрузки нет, поэтому эпюра M_x — прямая линия, соединяющая значения $M_C = 0$ и $M_D = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

б) на участке DA действует распределенная нагрузка, поэтому эпюра M_x — парабола. Так как эпюра Q_x на этом участке не пересекает нулевую линию, то парабола не имеет экстремального значения, поэтому величины изгибающих моментов в сечениях D и A соединим кривой, значения которой находятся в интервале $-15 \text{ кН} \cdot \text{м} \dots -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

в) на участке AE действует распределенная нагрузка, поэтому эпюра M_x — парабола. Так как эпюра Q_x на этом участке пересекает нулевую линию, то парабола имеет экстремальное значение (вершину), поэтому эпюру M_x строим по трем значениям:

$$M_D = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{x_0} = 95,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ и } M_E = 78 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

г) на участке EB нет нагрузки, поэтому эпюра M_x — прямая, соединяющая значения $M_E = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_B = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

д) на участке BK нет нагрузки, поэтому эпюра M_x — прямая линия, соединяющая значения $M_B = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_K = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Эпюра M_x построена (рис. 15, в).

В качестве проверки возьмем сумму моментов всех сил относительно точки, расположенной на расстоянии x_0 от левой опоры, но рассмотрим правую часть балки:

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= q(c - x_0)(c - x_0)/2 + V_B(c - x_0 + d) + M = \\ &= -20 \cdot 1,32 \cdot 0,66 + 26,4 \cdot 3,32 + 25 = 95,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Разница в значениях M_x при рассмотрении левых и правых сил возможна из-за округления величин опорных реакций и расстояния x_0 .

На том же примере покажем построение эпюр Q_x и M_x другим способом, который называется «по участкам». Опорные реакции балки определены. Балку разбиваем на пять участков, в каждом из которых проведем сечения балки. При определении усилий на участках I, II и III будем рассматривать левую часть балки, а на участках IV и V — правую часть, так как в этом случае уравнения для определения усилий будут проще (рис. 15, г).

Строим эпюру Q_x . Для этого определим закон изменения поперечной силы для каждого участка.

Участок I. Проведем на этом участке сечение 1—1 на расстоянии x_1 от левой опоры, причем x_1 может принимать значения от 0 до 1 м, т.е. $0 \leq x_1 \leq 1$ м. Поперечная сила в сечении 1—1

$$Q_{x_1} = -F.$$

На всем участке эпюра Q_x — прямая линия, параллельная оси абсцисс, совпадающей с осью балки. В этом можно убедиться, определив поперечную силу при граничных значениях:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad Q_{x_1=0} = -15 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_1 = 1 \text{ м} \quad Q_{x_1=1} = -15 \text{ кН}.$$

Участок II. Проведем сечение 2—2 на расстоянии x_2 от левого конца балки, причем $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$. Поперечная сила в этом сечении

$$Q_{x_2} = -F - q(x_2 - 1).$$

Эпюра Q_x на этом участке — прямая линия, наклоненная к оси абсцисс. Ее можно построить по двум точкам, соответствующим граничным значениям x_2 :

$$\text{при } x_2 = 1 \text{ м} \quad Q_{x_2=1} = -15 - 20(1 - 1) = -15 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_2 = 2 \text{ м} \quad Q_{x_2=2} = -15 - 20(2 - 1) = -35 \text{ кН.}$$

Участок III. Проведем сечение 3—3 на расстоянии x_3 от левого конца балки, причем $2 \text{ м} \leq x_3 \leq 7 \text{ м}$. Поперечная сила в этом сечении

$$Q_{x_3} = -F - q(x_3 - 1) + V_A.$$

Эпюра Q_x на этом участке — прямая линия. Определим значения поперечной силы для граничных значений x_3 :

$$\text{при } x_3 = 2 \text{ м} \quad Q_{x_3=2} = -15 - 20(2 - 1) + 108,6 = 73,6 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_3 = 7 \text{ м} \quad Q_{x_3=7} = -15 - 20(7 - 1) + 108,6 = -26,4 \text{ кН.}$$

Участок IV. Проведем сечение 4—4 на расстоянии x_4 от правого конца балки, причем $1,5 \text{ м} \leq x_4 \leq 3,5 \text{ м}$. Поперечная сила в этом сечении

$$Q_{x_4} = -V_B.$$

Эпюра Q_x — прямая, параллельная оси абсцисс. Проверим это, подставив в выражение для Q_x граничные значения:

$$\text{при } x_4 = 1,5 \text{ м} \quad Q_{x_4=1,5} = -26,4 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_4 = 3,5 \text{ м} \quad Q_{x_4=3,5} = -26,4 \text{ кН.}$$

Участок V. Проведем сечение 5—5 на расстоянии x_5 от правого конца балки, причем $0 \leq x_5 \leq 1,5 \text{ м}$. Поперечная сила в этом сечении $Q_{x_5} = 0$, эпюра совпадает с нулевой линией при $x_5 = 0$. Величина

$$Q_{x_5=0} = 0; \quad \text{при } x_5 = 1,5 \text{ м} \quad Q_{x_5=1,5} = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру Q_x (см. рис. 15, б).

Строим эпюру M_x . Для этого определим закон изменения изгибающего момента на каждом участке.

Участок I, сечение 1—1, $0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$; $M_{x_1} = -Fx_1$.

Эпюра M_x на этом участке — прямая линия, которую можно построить по двум значениям:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_{x_1=0} = -15 \cdot 0 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 1 \text{ м} \quad M_{x_1=1} = -15 \cdot 1 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Участок II, сечение 2—2, $1 \text{ м} \leq x_2 \leq 2 \text{ м}$;

$$M_{x_2} = -F \cdot x_3 - q(x_2 - 1)^2 / 2.$$

Эпюра M_x на этом участке представляет собой параболу.

Построим ее, подставив в выражение для M_x граничные значения x :

$$\text{при } x_2 = 1 \text{ м} \quad M_{x_2=1} = -15 \cdot 1 - \frac{20(1-1)^2}{2} = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_2 = 2 \text{ м} \quad M_{x_2=2} = -15 \cdot 2 - \frac{20(2-1)^2}{2} = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Поскольку эпюра Q_x на этом участке не пересекает нулевую линию, то эпюра M_x не будет иметь экстремума и ее можно построить по двум точкам.

Участок III, сечение 3—3, $2 \text{ м} \leq x_3 \leq 7 \text{ м}$;

$$M_{x_3} = -F \cdot x_3 - q(x_3 - 1)^2/2 + V_A(x_3 - 2).$$

Эпюра M_x на этом участке представляет собой параболу. Построим ее, подставив граничные значения:

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = 2 \text{ м} \quad M_{x_3=2} &= -15 \cdot 2 - \frac{20(2-1)^2}{2} + 108,6(2-2) = \\ &= -40 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x_3 = 7 \text{ м} \quad M_{x_3=7} &= -15 \cdot 7 - \frac{20(7-1)^2}{2} + 108,6(7-2) = \\ &= 78 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Поскольку эпюра Q_x на этом участке пересекает нулевую линию, то эпюра M_x должна иметь экстремум. Для определения положения сечения приравняем первую производную закона изменения M_x нулю:

$$\frac{dM_{x_3}}{dx_3} = 0$$

или

$$F - q(x_3 - 1) + V_A = 0.$$

Подставим числовые значения:

$$-15 - 20(x_3 - 1) + 108,6 = 0,$$

откуда

$$x_3 = \frac{-15 + 20 + 108,6}{20} = 5,68 \text{ м},$$

т.е. это сечение расположено на расстоянии

$$x_0 = 5,68 - 2 = 3,68 \text{ м от опоры } A.$$

Изгибающий момент в этом сечении

$$M_{x_3=5,68} = -15 \cdot 5,68 - \frac{20(5,68-1)^2}{2} + 108,6(5,68-2) = 95,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок IV, сечение 4—4, $1,5 \text{ м} \leq x_4 \leq 3,5 \text{ м}$;

$$M_{x_4} = M + V_B (x_4 - 1,5).$$

Эпюра M_x на этом участке — прямая линия:

$$\text{при } x_4 = 1,5 \text{ м} \quad M_{x_4=1,5} = 25 + 26,4(1,5 - 1,5) = 25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_4 = 3,5 \text{ м} \quad M_{x_4=3,5} = 25 + 26,4(3,5 - 1,5) = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок V, сечение 5—5, $0 \leq x_5 \leq 1,5 \text{ м}$; $M_{x_5} = M$,

$$\text{при } x_5 = 0 \quad M_{x_5=0} = 25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_5 = 1,5 \text{ м} \quad M_{x_5=1,5} = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x (см. рис. 15, в).

Пример 12. Построить эпюры Q_x и M_x для балки, изображенной на рис. 16, а.

Решение. 1. Определим опорные реакции из уравнений:

$$1) \sum M_A = 0; \quad 2) \sum M_B = 0.$$

Из первого уравнения находим V_B :

$$M + q_2(c + d) \left(a + b + \frac{c + d}{2} \right) - V_B(a + b + c) + F(a + b + c + d) = 0$$

или

$$20 + 15 \cdot 4,5 \cdot 4,75 - V_B \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{20 + 15 \cdot 4,5 \cdot 4,75 + 5 \cdot 7}{6} = 62,6 \text{ кН}.$$

Из второго уравнения находим

$$V_A(a + b + c) - q_1 2a(c + b + a) + M - q_2(c + d) \left(\frac{c + d}{2} - d \right) + Fd = 0$$

или

$$V_A \cdot 6 - 10 \cdot 3 \cdot 6 + 20 - 15 \cdot 4,5 \cdot 1,25 + 5 \cdot 1 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{10 \cdot 3 \cdot 6 - 20 + 15 \cdot 4,5 \cdot 1,25 - 5 \cdot 1}{6} = 39,9 \text{ кН}.$$

Выполним проверку

$$\sum Y = V_A + V_B + q_1 2a - q_2(c + d) - F = 0$$

или

$$39,9 + 62,5 - 10 \cdot 3 - 15 \cdot 4,5 - 5 = 0,$$

откуда $102,5 - 102,5 = 0$.

2. Обозначим характерные точки балки C, A, D, E, B, K.

3. Определим поперечные силы в характерных сечениях:

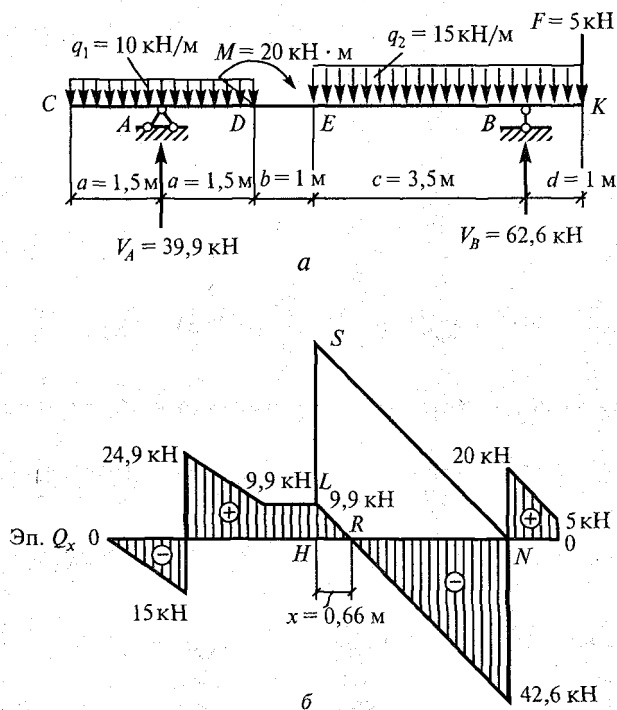


Рис. 16

$$Q_C = 0;$$

$$Q_A^{\text{лев}} = -q_1 a = -10 \cdot 1.5 = -15 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{прав}} = -q_1 a + V_A = -15 + 39.9 = 24.9 \text{ кН};$$

$$Q_D = Q_A^{\text{прав}} - q_1 a = 24.9 - 15 \cdot 3 = 9.9 \text{ кН};$$

$$Q_E = Q_D = 9.9 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{лев}} = Q_E - q_2 c = 9.9 - 15 \cdot 3.5 = -42.6 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{прав}} = Q_B^{\text{лев}} + V_A = -42,6 + 62,6 = 20 \text{ кН};$$

$$Q_K^{\text{лев}} = Q_B^{\text{прав}} - q_2 d = 20 - 15 \cdot 1 = 5 \text{ кН}.$$

Соединим полученные значения прямыми линиями (рис. 16, б) и получим эпюру Q_x . Эпюра Q_x на участке EB пересекает нулевую линию. Определим положение точки, в которой происходит это пересечение, из подобия треугольников HRL и HNS

$$x_0/3,5 = 9,9/52,5,$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{9,9 \cdot 3,5}{52,5} = 0,66 \text{ м}.$$

Это сечение считается также характерным для эпюр Q_x и M_x .

4. Определим изгибающие моменты в характерных точках:

$$M_C = 0;$$

$$M_A = -q_1 a a / 2 = -10 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -11,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D^{\text{лев}} = -q_1 2a a + V_A a = -10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 39,9 \cdot 1,5 = 14,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D^{\text{прав}} = M_D^{\text{лев}} + M = 14,9 + 20 = 34,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = -q_1 2a(a+b) + V_A(a+b) + M = -10 \cdot 3 \cdot 2,5 + 39,9 \cdot 2,5 + 20 = 44,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_0} = -q_1 2a(a+b+x_0) + V_A(a+b+x_0) + M - q_2 x_0 x_0 / 2 = \\ = -10 \cdot 3 \cdot 3,16 + 39,9 \cdot 3,16 + 20 - 15 \cdot 0,66 \cdot 0,33 = 48,03 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = Fd - q_2 d d / 2 = -5,1 - 15 \cdot 1 \cdot 0,5 = -12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad \text{рассмотрена} \\ \text{правая часть балки; } M_K = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x :

участок CA — эпюра M_x представляет собой параболу, так как этом участке действует распределенная нагрузка. Но параболы не имеет экстремума (вершины), так как эпюра Q_x не пересекает нулевую линию между точками C и A ;

участок AD — тоже параболы, соединяющая значения $M_A = -11,25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_D^{\text{лев}} = 14,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

участок DE — эпюра M_x — прямая линия, соединяющая значения $M_D^{\text{прав}} = 34,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_E = 44,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

участок EB — эпюра M_x — параболы с вершиной на расстоянии $x_0 = 0,66 \text{ м}$ от точки E . Строим ее по трем точкам: $M_E = 44,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{x_0} = 48,03 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_B = -12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

участок BK — эпюра M_x — парабола, построенная между значениями $M_B = -12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и $M_K = 0$.

Строим эпюру M_x (рис. 16, в).

Проверим значение M_x в точке, расположенной на расстоянии $x_0 = 0,66 \text{ м}$ правее точки E . Рассмотрим правую часть балки:

$$M_{x_0} = -q_2(c - x_0 + d) \left(\frac{c - x_0 + d}{2} \right) + V_B(c - x_0) - F(c - x_0 + d) = -15 \cdot 3,84 \cdot 1,92 + 62,6 \cdot 2,84 - 5 \cdot 3,84 = 48,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Задание для самостоятельной работы 6. Построить эпюры Q_x и M_x по данным одного из вариантов, показанных на рис. 7.

2.4. Определение допустимого значения центрально-сжимающей силы

1. *Определяют величину расчетного сопротивления материала на сжатие R , как правило, по справочникам или строительным нормам. Для решения задач самостоятельной работы можно воспользоваться прил. VIII.*

2. *Находят площадь поперечного сечения A стойки.*

В задании для самостоятельной работы заданы размеры сечения или тип и номер профиля проката, по которым и находят площадь сечения.

3. *Определяют коэффициент продольного изгиба φ в следующем порядке:*

а) вначале определяют расчетную (эффективную) длину стержня

$$l_{ef} = \mu l,$$

где μ — коэффициент приведения длины, который зависит от способа закрепления концов стержня (см. прил. III); l — геометрическая длина стержня;

б) потом определяют моменты инерции сечения J_x и J_y относительно главных центральных осей. Формулы для определения моментов инерции простых геометрических фигур относительно собственных осей приведены в прил. II. Моменты инерции профилей проката приведены в ГОСТах (см. прил. I);

в) находят радиусы инерции сечения относительно осей x и y :

$$i_x = \sqrt{J_x/A}; \quad i_y = \sqrt{J_y/A}.$$

Если i_x и i_y не равны между собой, то для дальнейших расчетов принимают наименьший из них, обозначив его i_{\min} . Если $i_x = i_y$, то расчет можно вести по любому из них. Для единообра-

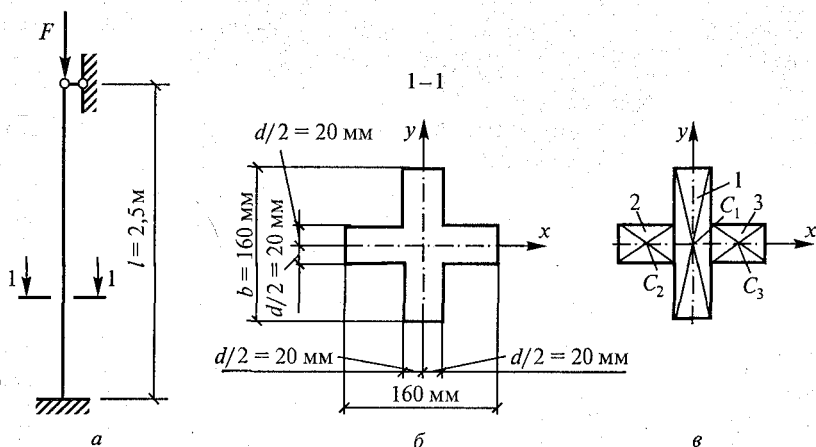


Рис. 17

зия дальнейших расчетов принимают обозначение i_{\min} , которое для сечения с двумя осями симметрии будет равно i_x и i_y ;

г) определяют гибкость стержня:

$$\lambda = l_{ef} / i_{\min};$$

д) по найденному значению гибкости в зависимости от материала стержня определяют коэффициент продольного изгиба (см. прил. IV). При этом, как правило, приходится пользоваться интерполяцией (см. примеры 13, 14).

4. Определяют величину допускаемого значения сжимающей силы:

$$N = R\varphi A.$$

Пример 13. Определить значение допускаемой силы для центрально-сжатой стойки, показанной на рис. 17, а. Материал стойки — алюминий марки АД31Т.

Решение. 1. Расчетное сопротивление алюминия $R = 54$ МПа (прил. VIII).

2. Площадь поперечного сечения стержня (рис. 17, б)

$$A = 16 \cdot 4 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 112 \text{ — м}^2 = 112 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

3. Определим коэффициент продольного изгиба φ :

а) расчетная длина стержня

$$l_{ef} = \mu l = 0,7 \cdot 2,5 = 1,75 \text{ м},$$

где $\mu = 0,7$ (см. прил. III);

б) моменты инерции сечения $J_x = J_y$, так как сечение имеет две оси симметрии (рис. 17, в):

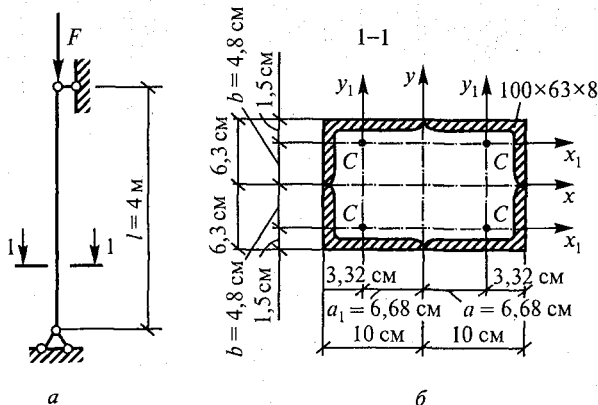


Рис. 18

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} = 1365 + 32 + 32 = 1429 \text{ см}^4,$$

где $J_x^I = \frac{db^3}{12} = \frac{4 \cdot 16^3}{12} = 1365 \text{ см}^4;$

$$J_x^{II} = J_x^{III} = \frac{\left(\frac{b-d}{2}\right)d^3}{12} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32 \text{ см}^4;$$

в) радиус инерции сечения

$$i_x = i_y = i_{\min} = \sqrt{J_x/A} = \sqrt{\frac{1429}{112}} = 3,57 \text{ см};$$

г) гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{ef}}{i_{\min}} = \frac{175}{3,57} = 46,7;$$

д) коэффициент продольного изгиба (см. прил. IV) с помощью интерполяции $\lambda = 40$ ($\varphi = 0,88$) и $\lambda = 50$ ($\varphi = 0,835$)

$$\varphi = 0,88 - \frac{0,88 - 0,835}{10}(46,7 - 40) = 0,85.$$

4. Определим величину сжимающей силы

$$N = R\varphi A = 54 \cdot 0,85 \cdot 112 \cdot 10^{-4} = 5141 \cdot 10^{-4} \text{ МН} = 514,1 \text{ кН}.$$

Ответ: $N = 514,1 \text{ кН}$.

Пример 14. Определить допускаемое значение сжимающей силы для центрально-сжатого стержня, показанного на рис. 18, а. Материал стержня сталь — марки С-245.

Сечение стержня состоит из четырех уголков $100 \times 63 \times 8$.

Решение. 1. Расчетное сопротивление стали $R = 240$ МПа (прил. VIII).

2. Площадь поперечного сечения стержня (рис. 18, б)

$$A = 4 \cdot 12,6 = 50,4 \text{ см}^2 = 50,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ (см. табл. 1, прил. I)}.$$

3. Определим коэффициент продольного изгиба φ :

а) расчетная длина стержня

$$l_{ef} = \mu l = 1 \cdot 4,0 = 4 \text{ м},$$

где $\mu = 1$ (прил. III);

б) определим моменты инерции сечения относительно осей x и y . Поскольку сечение состоит из неравнополочных уголков, то момент инерции относительно оси x не будет равен моменту инерции относительно оси y . Момент инерции относительно оси y

$$J_y = 4J_{y1}^I + 4a_1^2 A_1 = 4 \cdot 127 + 4 \cdot 6,68^2 \cdot 12,6 = 2757 \text{ см}^4,$$

где $J_{y1}^I = 127 \text{ см}^4$, принято по табл. 1 и 2, прил. I.

Момент инерции относительно оси x

$$J_x = 4J_{x1}^I + 4b_1^2 A_1 = 4 \cdot 39,2 + 4 \cdot 4,8^2 \cdot 12,6 = 1318 \text{ см}^4,$$

где $J_{x1}^I = 39,2 \text{ см}^4$, принято по табл. 1 и 2, прил. I.

Момент инерции относительно оси x является наименьшим;

в) минимальный радиус инерции сечения

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{1318}{50,4}} = 5,1 \text{ см};$$

г) наибольшая гибкость стержня

$$\lambda = \frac{l_{ef}}{i_{\min}} = \frac{400}{5,1} = 78,4;$$

д) коэффициент φ определим по прил. IV, интерполируя значения гибкости $\lambda = 70$ ($\varphi = 0,754$) и $\lambda = 80$ ($\varphi = 0,686$):

$$\varphi = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10}(78,4 - 70) = 0,697.$$

4. Допустимая сжимающая сила

$$N = R\varphi A = 240 \cdot 0,697 \cdot 50,4 \cdot 10^{-4} = 8431 \cdot 10^{-4} \text{ МН} = 843,1 \text{ кН}.$$

Задание для самостоятельной работы 7. Определить величину допускаемого значения центрально-сжимающей силы по данным одного из вариантов, показанных на рис. 19. Для нечетных вариантов материал для стержня — алюминий марки АМг2М, для четных — сталь марки С-345.

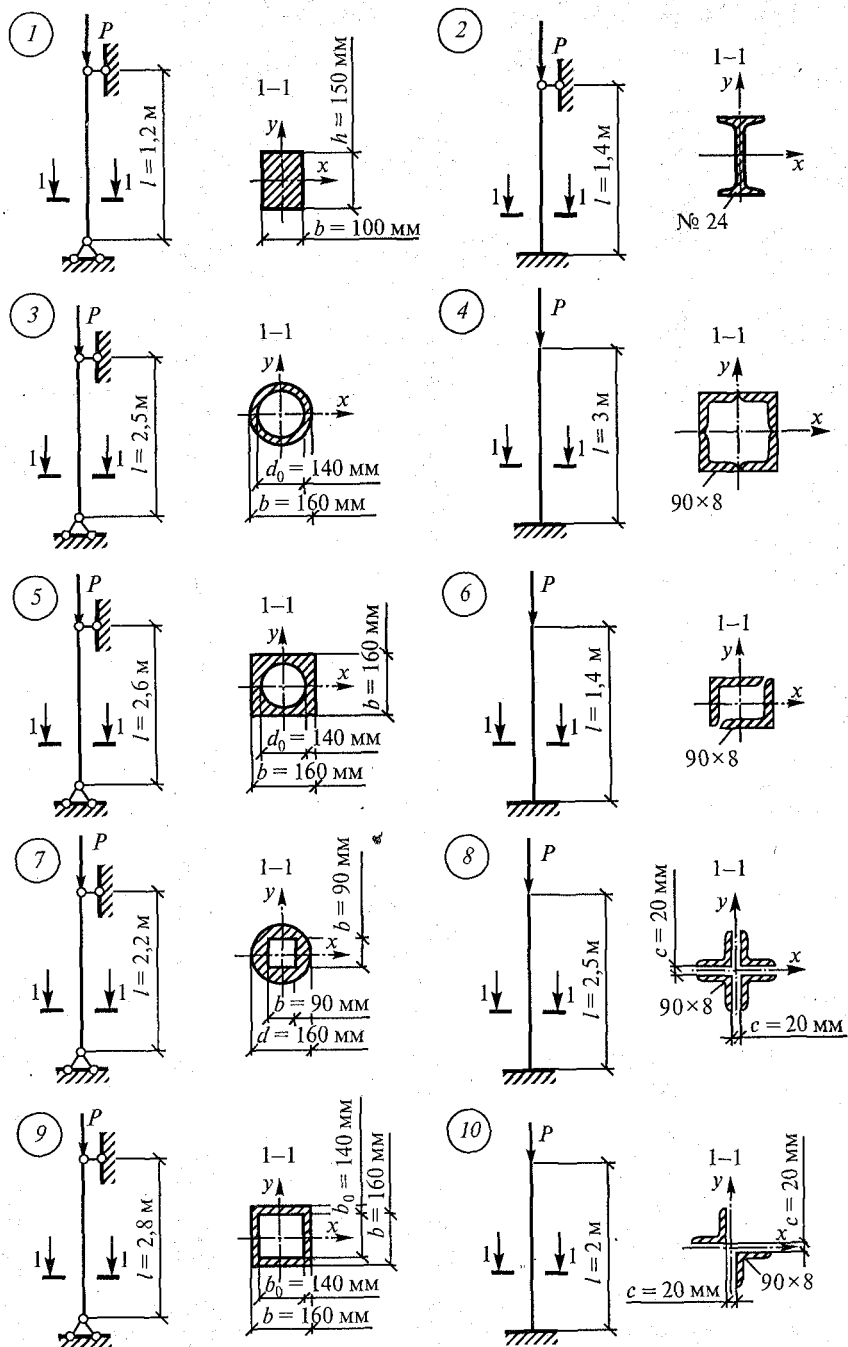


Рис. 19

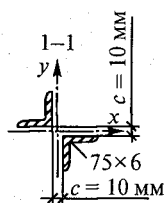
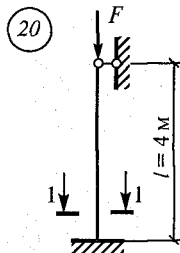
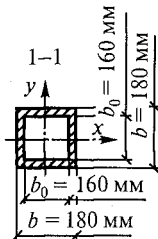
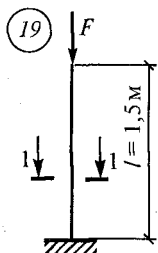
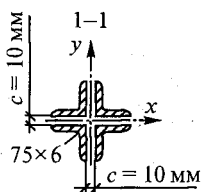
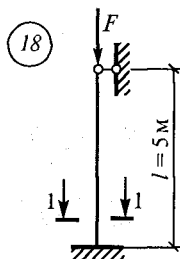
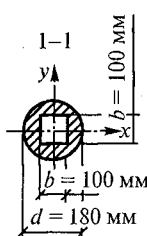
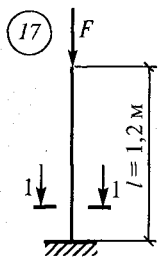
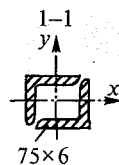
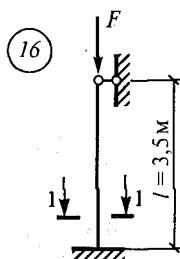
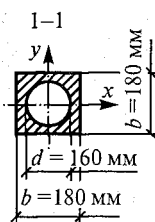
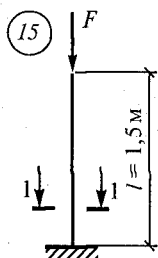
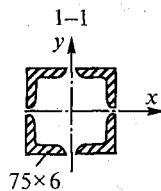
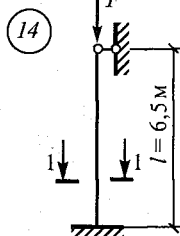
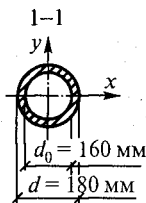
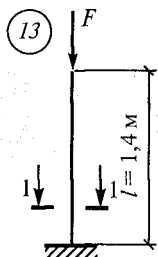
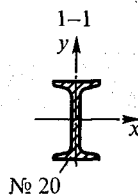
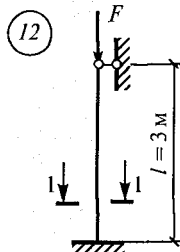
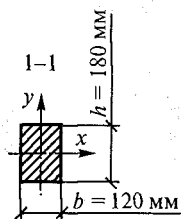
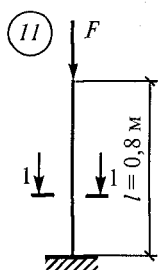


Рис. 19. Продолжение

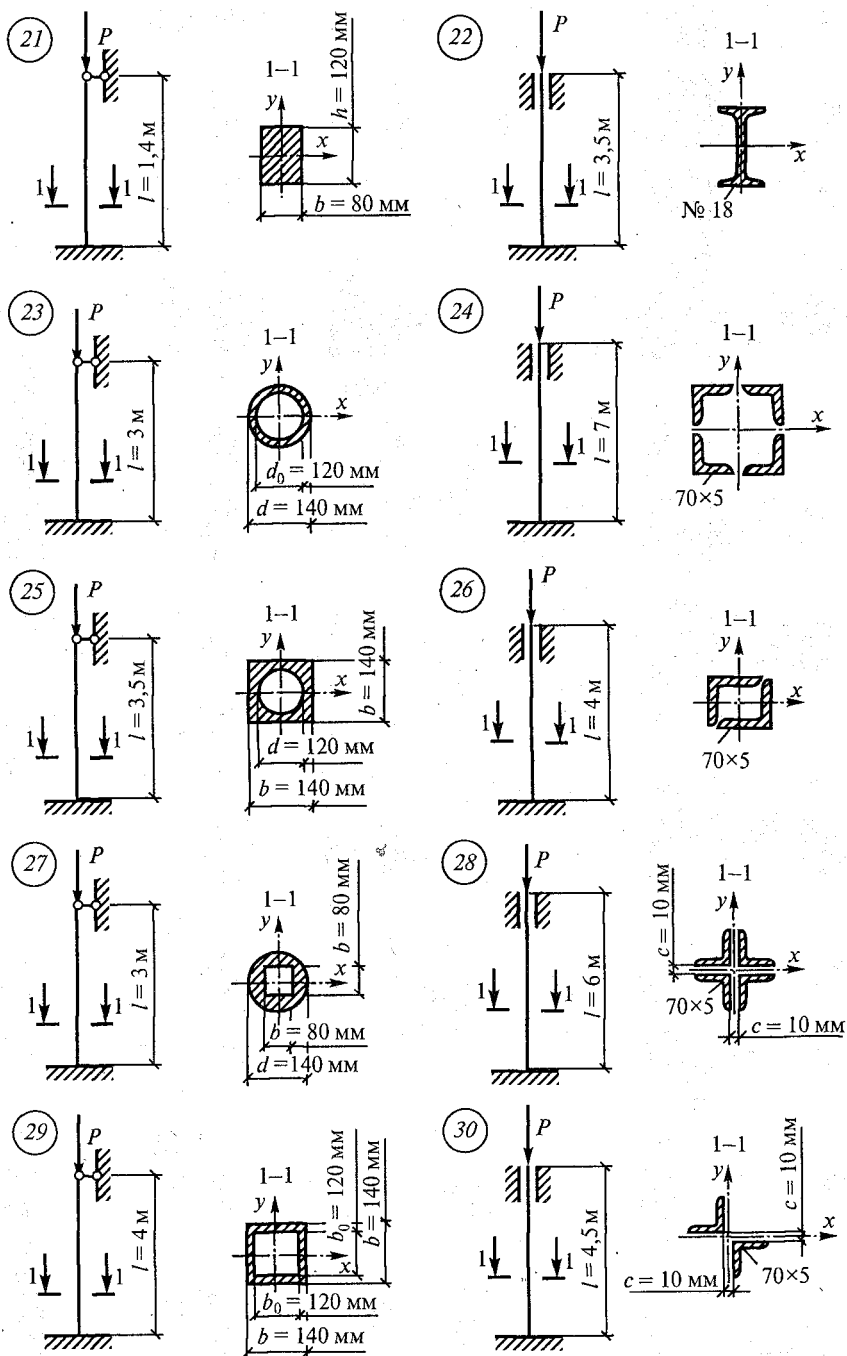


Рис. 19. Продолжение

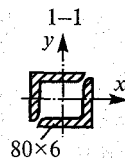
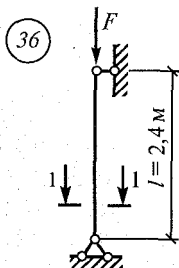
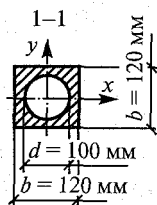
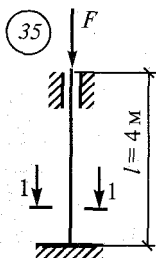
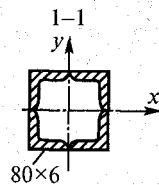
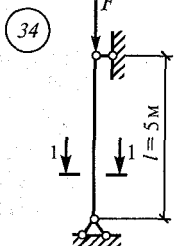
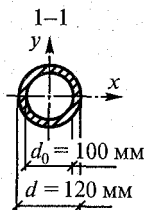
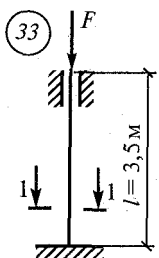
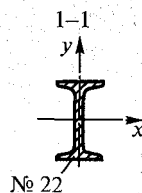
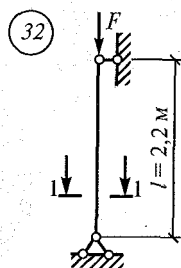
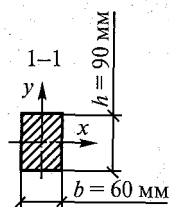
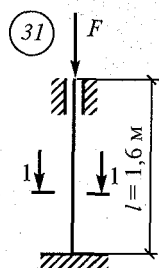


Рис. 19. Окончание

ГЛАВА 3

СТАТИКА СООРУЖЕНИЙ

3.1. Построение эпюр внутренних усилий для простейшей одноконтурной рамы

1. *Определяют опорные реакции рамы.* Для рам, не имеющих промежуточных шарниров, опорные реакции могут быть определены из трех уравнений равновесия вида:

$$\text{I. } 1) \sum M_A = 0; \quad 2) \sum M_B = 0; \quad 3) \sum X = 0.$$

Для рам, имеющих промежуточный шарнир, необходимо иметь четыре уравнения для определения неизвестных реакций (точнее, составляющих реакций), например:

$$\text{II. } 1) \sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad 2) \sum X = 0; \quad 3) \sum M_A = 0; \quad 4) \sum M_B = 0.$$

где C — промежуточный шарнир; A, B — опоры рамы.

При составлении уравнений нужно стремиться к тому, чтобы каждое из них содержало по одному неизвестному. Этого можно достичь, выбирая для каждой рамы свой порядок составления уравнений. Правильность определения вертикальных реакций можно проверить, используя уравнение $\sum Y = 0$.

2. *Обозначают характерные сечения рамы.* Эти сечения соответствуют точкам приложения сил, точкам опор, узлов, шарниров. Обозначают стойки и ригель рамы.

3. *Определяют значения поперечных сил* в характерных сечениях. При этом, если раму обходить изнутри, правила определения поперечных сил остаются такими же, как для балок (см. порядок решения задачи самостоятельной работы 6). По найденным значениям строят эпюру Q_x . Положительные значения поперечных сил откладывают на чертеже снаружи рамы, а отрицательные — изнутри.

4. *Определяют значения изгибающих моментов* в характерных сечениях. Правила определения их остаются такими же, как для балок. По найденным значениям строят эпюру M_x . Ординаты моментов откладывают со стороны растянутого волокна, и знак на эпюре при этом не ставят. Это правило совпадает с правилом, принятым в сопротивлении материалов.

5. *Определяют значения продольных сил* в элементах рамы: стойках и ригеле. Продольная сила в сечении равна сумме проекций

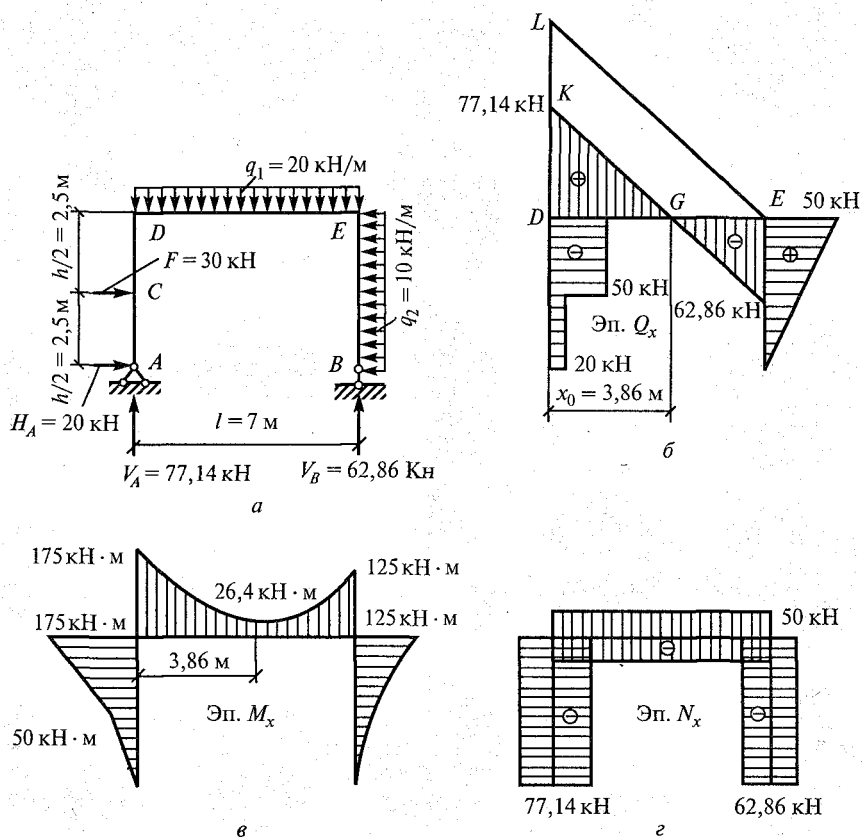


Рис. 20

всех сил, расположенных по одну сторону от этого сечения (только слева или только справа) на ось элемента. Если сила вызывает сжатие, ее считают отрицательной (со знаком «минус»), если растяжение — положительной (со знаком «плюс»). Значения N_x принято откладывать по обе стороны от оси элемента.

Проверка правильности построения эпюр не входит в выполнение задачи. С правилами ее выполнения можно ознакомиться в работе [3, гл. IV].

Пример 15. Построить эпюры M_x , Q_x и N_x для рамы, показанной на рис. 20, а.

Решение. 1. *Определим опорные реакции.* Рама не имеет промежуточных шарниров, поэтому используем уравнения равновесия вида I.

Из первого уравнения определим V_B :

$$Fh/2 + q_1 ll/2 - q_2 hh/2 - V_B l = 0$$

или

$$20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 30 \cdot 2,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - V_B \cdot 7 = 0,$$

откуда $V_B = (20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 30 \cdot 2,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5)/7 = 62,86$ кН.

Из второго уравнения определим V_A :

$$V_A l + Fh/2 - q_1 l l/2 - q_2 h h/2 = 0$$

или $V_A \cdot 7 + 30 \cdot 2,5 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0,$

откуда $V_A = (-30 \cdot 2,5 + 20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5)/7 = 77,14$ кН.

Из третьего уравнения найдем

$$H_A + F - q_2 h = 0,$$

откуда $H_A = q_2 h - F = 10 \cdot 5 - 30 = 20$ кН.

Проверим правильность определения вертикальных реакций:

$$\sum Y = V_A + V_B - q_1 l$$

или

$$62,86 + 77,14 - 20 \cdot 7 = 0, \text{ откуда } 140 - 140 = 0.$$

2. Обозначим характерные точки A, C, D, E, B . Рама состоит из двух стоек AD, BE и ригеля DE . Стойки и ригель жестко соединены между собой в узлах D и E .

3. Определим поперечные силы в характерных точках, обходя раму по часовой стрелке изнутри.

Стойка AD :

$$Q_A = -H_A = -20 \text{ кН}; \quad Q_C^{\text{лев}} = -H_A = -20 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\text{прав}} = -H_A - F = -20 - 30 = -50 \text{ кН};$$

$$Q_D^{\text{лев}} = -H_A - F = -50 \text{ кН}.$$

Ригель DE :

$$Q_D^{\text{прав}} = -V_A = 77,14 \text{ кН};$$

$$Q_E^{\text{лев}} = V_A - q_1 l = 77,14 - 20 \cdot 7 = 62,86 \text{ кН}.$$

Стойка BE : рассмотрим правую часть рамы (при взгляде изнутри)

$$Q_B = 0; \quad Q_E^{\text{прав}} = q_2 h = 10 \cdot 5 = 50 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру Q_x (рис. 20, б). На участке D_E эпюра Q_x пересекает ось ригеля на расстоянии x_0 от точки D . Из подобия треугольников DKG и DEL :

$$\frac{x_0}{7} = \frac{77,14}{140}, \text{ откуда } x_0 = \frac{77,14 \cdot 7}{140} = 3,86 \text{ м.}$$

4. Определим значения изгибающих моментов в характерных точках.

Стойка AD :

$$M_A = 0; \quad M_C = -H_A h/2 = -20 \cdot 2,5 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = -H_A h - Fh/2 = -20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 = -175 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ригель DE :

$$M_D = -H_A h - Fh/2 = -20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 = -175 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_0=3,86 \text{ м}} = -V_A x_0 - Hh - Fh/2 - q_1 x_0 x_0/2 = \\ = 77,14 \cdot 3,86 - 20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 - 20 \cdot 3,86 \cdot 1,93 = -26,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = V_A l - H_A h - Fh/2 - q_1 l l/2 = \\ = 77,14 \cdot 7 - 20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 = -125 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Стойка BE : для правой части рамы

$$M_B = 0; \quad M_E = -q_2 h h/2 = -10 \cdot 5 \cdot 2,5 = -125 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру M_x (рис. 20, в).

5. Определим значения продольных сил.

Стойка AD :

$$N_{AD} = -V_A = -77,14 \text{ кН}.$$

Ригель DE :

$$N_{DE} = -H_A - F = -20 - 30 = -50 \text{ кН}.$$

Стойка BE :

$$N_{BE} = -V_B = -62,86 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру N_x (рис. 20, г).

Пример 16. Построить эпюры M_x , Q_x и N_x для рамы, показанной на рис. 21, а.

Решение. 1. Определим опорные реакции рамы, для чего составим уравнения:

$$1) \sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad 2) \sum X = 0; \quad 3) \sum M_A = 0; \quad 4) \sum M_B = 0.$$

Из первого уравнения найдем H_A :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = -H_A h - F_1 a = 0$$

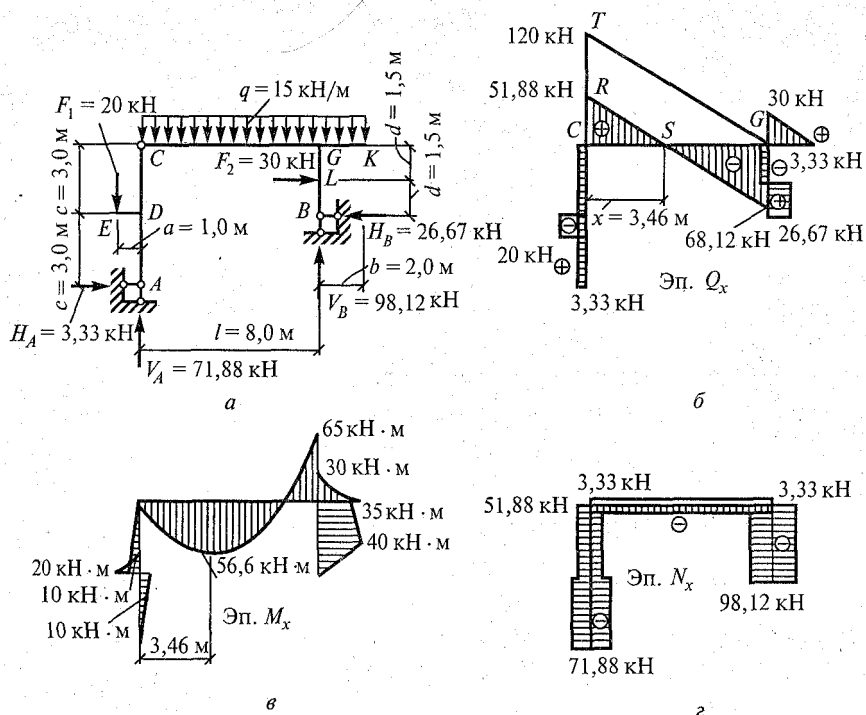


Рис. 21

или

$$H_A \cdot 6 - 20 \cdot 1 = 0, \text{ откуда } H_A = -(20 \cdot 1)/6 = -3,33 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения найдем H_B :

$$\sum X = H_A + F_2 - H_B = 0, \text{ откуда } H_B = H_A + F_2 = -3,33 + 30 = 26,67 \text{ кН.}$$

Из третьего уравнения найдем V_B :

$$\sum M_A = -F_1 a + q(l + b) \left(\frac{l + b}{2} \right) + F_2(c + d) - H_B c - V_B l = 0$$

или

$$-20 \cdot 1 + 15(8 + 2) \left(\frac{8 + 2}{2} \right) + 30(3 + 1,5) - 26,67 \cdot 1,5 - V_B \cdot 8 = 0,$$

откуда

$$V_B = \frac{-20 \cdot 1 + 15 \cdot 10 \cdot 5 + 30 \cdot 4,5 - 26,67 \cdot 1,5}{8} = 98,12 \text{ кН.}$$

Из четвертого уравнения определим V_A :

$$V_A l - H_A c - F_1(l + a) - q(l + b) \left(\frac{l + b}{2} - b \right) + F_2 d = 0$$

или

$$V_A \cdot 8 + 3,33 \cdot 3 - 20(8 + 1) - 15(8 + 2) \left(\frac{8 + 2}{2} - 2 \right) + 30 \cdot 1,5 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{-3,33 \cdot 3 + 20 \cdot 9 + 15 \cdot 10 \cdot 3 - 30 \cdot 1,5}{8} = 71,88 \text{ кН.}$$

Выполним проверку правильности определения V_A и V_B :

$$\sum Y = V_A - q(l + b) - F_1 + V_B = 0$$

или

$$71,88 - 15(8 + 2) - 20 + 98,12 = 0, \text{ откуда } 170 - 170 = 0.$$

2. Обозначим характерные точки A, D, E, C, G, K, L, B . Рама состоит из двух стоек AC и BG , ригеля CK и консоли ED . Консольный участок GK является частью ригеля CK .

3. Определим поперечные силы в характерных точках.

Стойка AC :

$$Q_A = -H_A = 3,33 \text{ кН}; \quad Q_D^{\text{лев}} = Q_D^{\text{прав}} = -H_A = 3,33 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\text{лев}} = -H_A = 3,33 \text{ кН.}$$

Консоль ED :

$$Q_E = Q_E^{\text{прав}} = -F_1 = -20 \text{ кН}; \quad Q_D^{\text{лев}} = -F_1 = -20 \text{ кН.}$$

Ригель CK :

$$Q_C^{\text{прав}} = V_A - F_1 = 71,88 - 20 = 51,88 \text{ кН};$$

$$Q_G^{\text{лев}} = V_A - F_1 - ql = 71,88 - 20 - 15 \cdot 8 = -68,12 \text{ кН};$$

$$Q_G^{\text{прав}} = V_A - F_1 - ql + V_B = -68,12 + 98,12 = 30 \text{ кН};$$

$$Q_K = Q_G^{\text{прав}} - qb = 30 - 15 \cdot 2 = 0.$$

Стойка BG :

$$Q_B = -H_B = -26,67 \text{ кН}; \quad Q_L^{\text{прав}} = H_B = 26,67 \text{ кН};$$

$$Q_L^{\text{лев}} = H_B - F_2 = 26,67 - 30 = -3,33 \text{ кН};$$

$$Q_G^{\text{прав}} = H_B - F_2 = 26,67 - 30 = -3,33 \text{ кН.}$$

По найденным значениям строим эпюру Q_x (рис. 21, б). На участке CG эпюры Q_x пересекает ось ригеля (нулевую линию) на расстоянии x_0 от точки C . Из подобия треугольников CRS и CTG :

$$\frac{x_0}{8} = \frac{51,88}{120}, \text{ откуда } x_0 = \frac{8 \cdot 51,88}{120} = 3,46 \text{ м.}$$

4. Определим изгибающие моменты в характерных точках.

Стойка АС:

$$M_A = 0; \quad M_D^{\text{лев}} = -H_A c = 3,33 \cdot 3 \approx 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D^{\text{прав}} = -H_A c - F_1 a = 3,33 \cdot 3 - 20 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$M_C^{\text{лев}} = -H_A h - F_1 a = 3,33 \cdot 6 - 20 \cdot 1 = 0$, момент в шарнире всегда должен быть равным нулю.

Ригель СК:

$$M_C^{\text{прав}} = 0; \quad M_{x_0=3,46} = V_A x_0 - H_A h - F_1(x_0 + a) - qx_0 x_0/2 = \\ = 71,88 \cdot 3,46 + 3,33 \cdot 6 - 20(3,46 + 1) - 15 \cdot 3,46 \cdot 1,73 = 56,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_G^{\text{лев}} = V_A l - H_A h - F_1(l + a) - ql l/2 =$$

$$= 71,88 \cdot 8 + 3,33 \cdot 6 - 20(8 + 1) - 15 \cdot 8 \cdot 4 = -65 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$M_G^{\text{прав}} = -qbb/2 = -15 \cdot 2 \cdot 1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$, рассмотрено равновесие консольного участка GK;

$$M_K = 0.$$

Стойка BG:

$$M_B = 0; \quad M_L = -H_B d = -26,67 \cdot 1,5 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_G^{\text{прав}} = H_B d - F_2 d = -26,67 \cdot 3 + 30 \cdot 1,5 = -80 + 45 = -35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис. 21, в).

5. Определим продольные силы.

Стойка АС:

$$N_{AD} = -V_A = -71,88 \text{ кН};$$

$$N_{DC} = -V_A + P_1 = -71,88 + 20 = -51,88 \text{ кН}.$$

Ригель СК:

$$N_{CG} = -H_A = 3,33 \text{ кН}; \quad N_{GK} = 0.$$

Стойка BG:

$$N_{BG} = -V_B = -98,12 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру N_x (рис. 21, г).

Задание для самостоятельной работы 8. Построить эпюры Q_x , M_x и N_x по данным одного из вариантов, показанных на рис. 22.

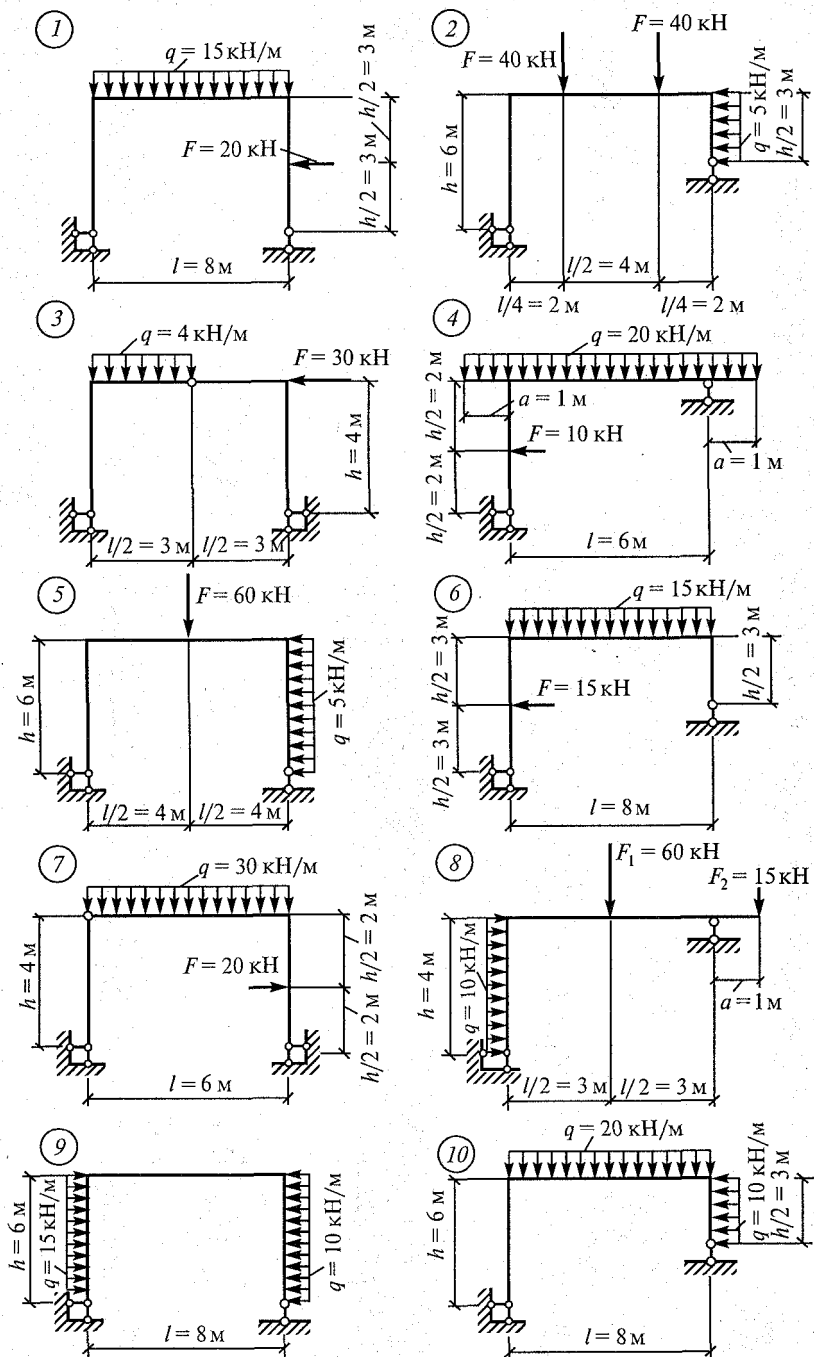


Рис. 22

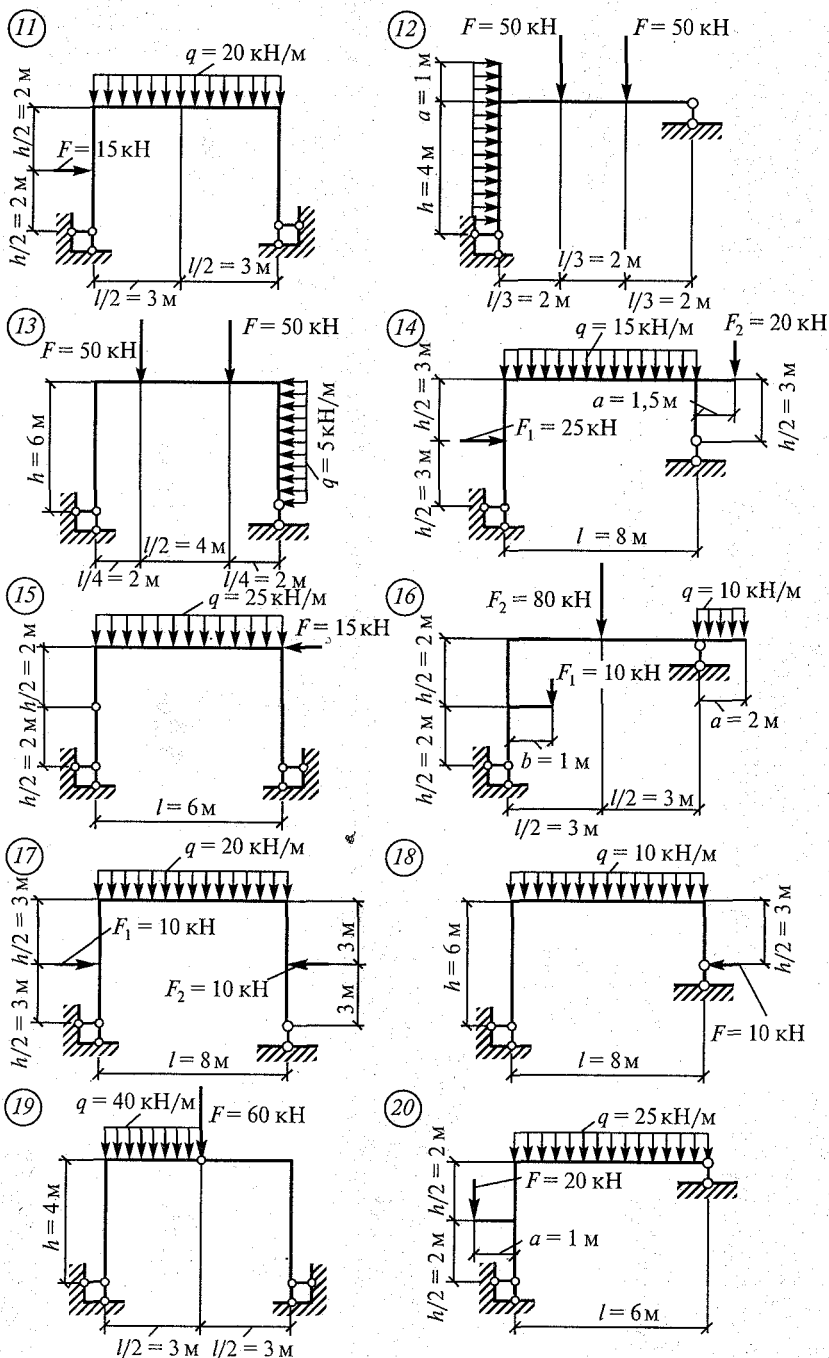


Рис. 22. Продолжение

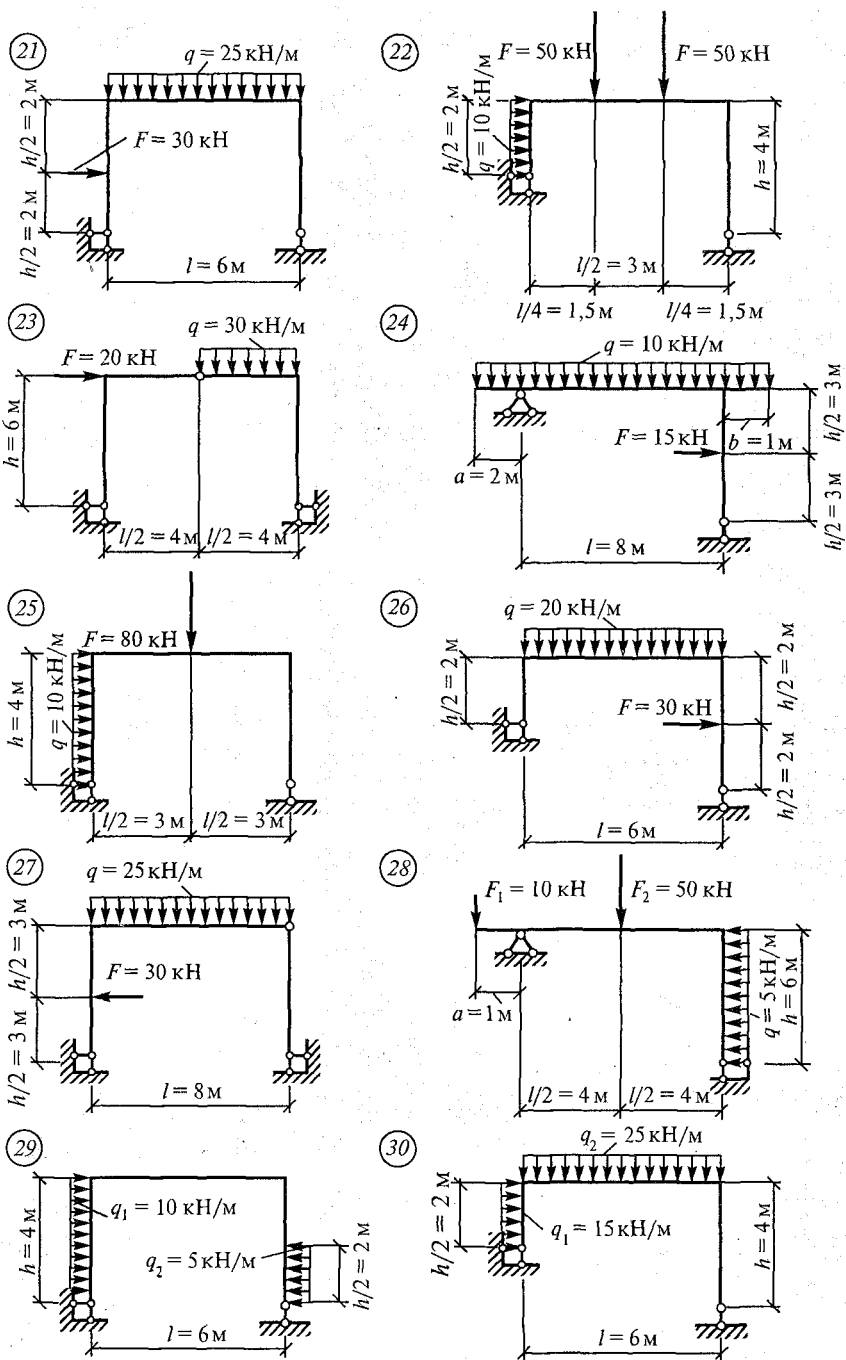


Рис. 22. Продолжение

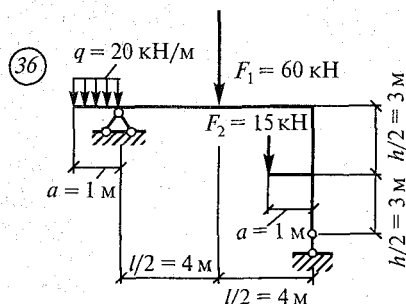
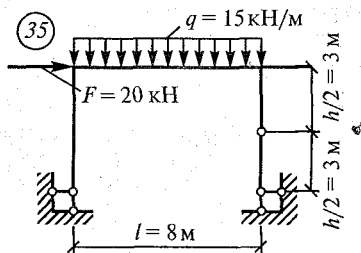
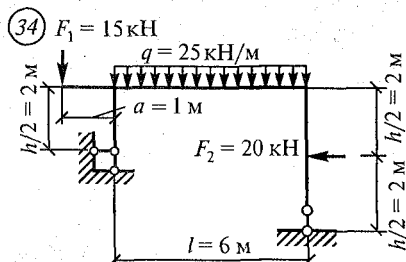
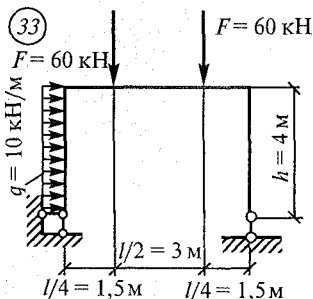
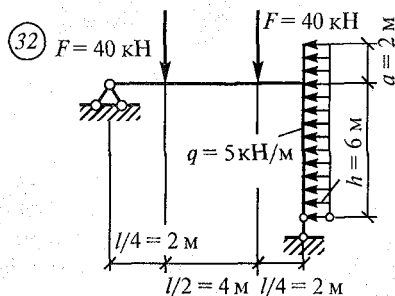
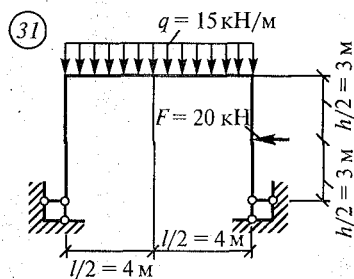


Рис. 22. Окончание

3.2. Графическое определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла — Кремоны

1. Вычерчивают геометрическую схему фермы строго в масштабе. Масштаб определяется размерами чертежа. При выполнении самостоятельной работы рекомендуется принимать масштаб 1:200, 1:100, при выполнении расчетно-графической работы — 1:300, 1:200.

После вычерчивания фермы к узлам прикладывают внешние силы.

2. Обозначают внешние и внутренние поля:

а) внешние поля ограничены внешними силами и поясами фермы. Эти поля разомкнуты, их принято обозначать буквами a, b, c, d, \dots , обходя ферму по часовой стрелке. Первое поле, как правило, ограничено линией действия опорной реакции и первой (крайней) силы — оно представляет собой полуплоскость, расположенную слева от линии действия указанных сил. Если ферма и нагрузки имеют ось симметрии, то симметричные поля правой части фермы обозначаются теми же буквами, что и на левой половине, но с индексами, например a', b', c', d', \dots . Поле, расположенное между опорными реакциями, не имеет себе симметричного (при отсутствии нагрузки по нижнему поясу фермы);

б) внутренние поля ограничены только стержнями фермы. Они замкнуты, их обозначают цифрами 1, 2, 3, ..., обходя ферму слева направо. При симметричной схеме фермы поля правой половины можно обозначать теми же цифрами, что и левой, например 1', 2', 3', ...

3. *Определяют опорные реакции фермы* графическим способом в следующем порядке:

а) выбирают масштаб сил. Он также зависит от размеров чертежа;

б) откладывают в принятом масштабе все внешние силы поочередно в том порядке, в каком они встречаются при обходе фермы по часовой стрелке. Теперь каждая сила будет обозначаться двумя полями (буквами), между которыми она расположена. Отложенные последовательно сверху вниз внешние силы образуют силовую линию, длина которой в масштабе сил равна сумме всех внешних сил, действующих на ферму;

в) определяют опорные реакции фермы. Вследствие симметрии схемы фермы и нагрузки (а также при отсутствии нагрузок по нижнему поясу, как в задачах для самостоятельной работы) опорные реакции равны между собой, причем каждая из них составляет половину длины силовой линии и направлена вверх (в сторону, противоположную действию нагрузки). Опорные реакции, как и внешние силы, обозначаются полями, между которыми они лежат. На силовую линию наносят точку, которая обозначает поле, расположенное между опорными реакциями. Она находится в середине силовой линии. Нижняя половина силовой линии является правой опорной реакцией, а верхняя — левой.

4. *Строят собственно диаграмму усилий:*

а) обозначают стержни. При этом нужно твердо уяснить, что при графическом способе расчета каждый стержень обозначается двумя полями, между которыми он лежит. Наименование стержня зависит также от рассматриваемого узла: стержень обо-

значается двумя полями, которые читаются в том порядке, в каком встречаются при обходе рассматриваемого узла по часовой стрелке. Обозначение стержней может быть цифровым (1—2, 2—3 и т.д.) для элементов решетки и буквенно-цифровым (1—*a*, 2—*в* и т.д.) — для поясов и опорных стоек;

б) мысленно вырезают узлы. Первым вырезают узел, в котором сходятся два стержня, — с него начинается расчет. Стержни этого узла расположены между тремя полями: двумя буквенными и одним цифровым. На силовой линии уже есть точки, соответствующие буквенным полям. Через эти точки проводят линии, параллельные стержням рассматриваемого узла. Пересечение этих линий обозначают цифрой, соответствующей цифре поля, прилегающего к рассматриваемому узлу. Стержень и параллельное ему усилие имеют одинаковое обозначение. Длина линии на диаграмме, измеренная в масштабе сил, и является величиной усилия в соответствующем стержне. Знак усилия определяется следующим образом. Сначала на схеме фермы читают название стержня, обходя узел по часовой стрелке, затем на диаграмме перемещаются по усилию от одной точки к другой в том порядке, как читается стержень, и, наконец, это движение переносят на стержень фермы. Если движение при этом направлено по стержню от узла, то стержень считается растянутым, а если к узлу — сжатым. На диаграмме сжатый стержень показывается жирной (или красной), а растянутый — тонкой (или синей) линией;

в) вырезают узел, в котором сходятся три стержня, причем усилия в двух из них неизвестны, а в третьем оно найдено при рассмотрении первого узла. На диаграмме усилий находят две точки, соответствующие двум полям, прилегающим к рассматриваемому узлу. Через эти точки проводят линии, параллельные стержням, усилия в которых неизвестны. Точку пересечения обозначают номером поля, которое лежит между двумя стержнями, усилия в которых отыскиваются. Длины линий на диаграмме, измеренные в масштабе сил, равны величине усилий в этих стержнях. Знак определяется по правилам, описанным для первого узла;

г) каждым следующим рассматриваемым узлом будет тот, в котором сходятся два стержня с неизвестными усилиями, а усилия в остальных стержнях уже определены. Порядок определения величины и знака усилия остается тем же, что для первого и второго узлов. Для симметричной фермы диаграмму усилий можно строить для одной (левой) половины, усилия в стержнях правой половины равны усилиям в симметричных стержнях левой половины;

д) определение усилий заканчивается составлением таблицы с обозначением стержней и указанием величины и знака усилий.

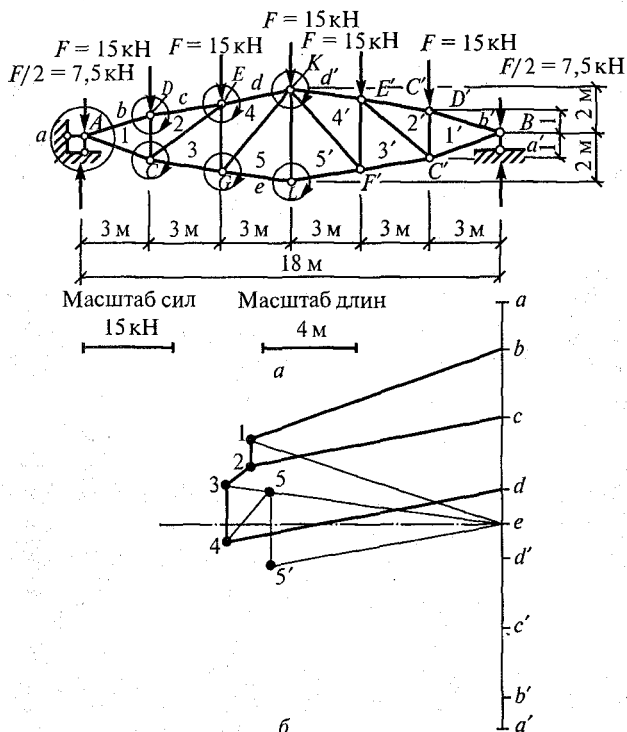


Рис. 23

Пример 17. Определить усилия в стержнях фермы, показанной на рис. 23, а, путем построения диаграммы Максвелла—Кремоны.

Решение. 1. Вычерчиваем геометрическую схему фермы в масштабе, например 1:400 (в 1 см — 4 м). Рис. 23, а выполнен в указанном масштабе.

2. Обозначаем поля:

внешние: $a, b, c, d, d', c', b', a'$;

внутренние: 1, 2, 3, 4, 5, 5', 4', 3', 2', 1'.

3. Определяем опорные реакции фермы:

а) выбираем масштаб сил: в 1 см — 15 кН;

б) строим силовую линию $a-b-c-d-d'-c'-b'-a'$ из внешних сил (рис. 23, б);

в) определяем опорные реакции, показав их предварительно на схеме фермы. Разделим силовую линию пополам. Середина ее находится между точками d и d' и совпадает с точкой e , которой обозначено поле, расположенное между опорными реакциями. Отрезок $a'-e$, измеренный в масштабе сил, представляет собой правую опорную реакцию. На схеме фермы правая опорная

реакция лежит между полями a' и e и обозначается $a'-e$. Отрезок силовой линии $e-a$ представляет собой левую опорную реакцию. Длины отрезков $a'-e$ и $e-a$ равны 3 см, поэтому каждая опорная реакция равна $3 \cdot 15 = 45$ кН.

4. Строим диаграмму усилий:

а) мысленно вырезаем узел A , в котором сходятся два стержня, которые назовем $b-1$ и $1-e$. На силовой линии уже есть точки b и e . Проведем через точку b линию, параллельную стержню $b-1$, а через точку e — линию, параллельную стержню $1-e$. Точку их пересечения обозначим цифрой 1. Длина линии $b-1$ равна 3,8 см. Помня, что в принятом масштабе 1 см = 15 кН, получим усилие в стержне $b-1$, равное $3,8 \cdot 15 = 57$ кН. Длина линии $1-e$ также равна 3,8 см, т.е. усилие $1-e$ тоже равно 57 кН.

Определим знак усилия $b-1$: на схеме фермы (см. рис. 23, а) стержень верхнего пояса читается $b-1$; на диаграмме усилий (см. рис. 23, б) движение от точки b к точке 1 направлено справа налево. Перенесем это направление движения (справа налево) на стержень $b-1$ (см. рис. 23, а) — оно направлено к узлу, т.е. стержень сжат. Усилие $b-1$ обозначено жирной линией. Определим знак усилия $1-e$: на схеме фермы стержень читается $1-e$; на диаграмме усилий движение от точки 1 к точке e направлено слева направо. Перенесем это направление движения на стержень фермы — оно направлено от узла, т.е. стержень растянут. Усилие $1-e$ на диаграмме обозначено тонкой линией;

б) вырезаем узел D . В нем сходятся три стержня: $1-b$, $c-2$ и $2-1$. Усилие в стержне $1-b$ найдено из рассмотрения узла A , а усилия в стержнях $c-2$ и $2-1$ неизвестны. На диаграмме усилий уже есть точки c и 1. Проведем через точку c линию, параллельную стержню $c-2$, а через точку 1 — линию, параллельную стержню $2-1$, до взаимного пересечения. Точку пересечения линий обозначим цифрой 2 (номером поля, которое лежит между стержнями, усилия в которых отыскиваются). Отрезок $c-2$ равен 3,65 см, следовательно, усилие в нем равно $3,65 \cdot 15 = 54,8$ кН. Отрезок $2-1$ равен 0,4 см, усилие в нем равно $0,4 \cdot 15 = 6$ кН.

Определим знак усилия в стержне $c-2$: на схеме фермы стержень читается $c-2$; на диаграмме усилий движение от точки c к точке 2 направлено справа налево; перенесем это направление движения на стержень $c-2$ — оно направлено к узлу D , т.е. стержень сжат (на диаграмме усилие показано жирной линией). Определим знак усилия $2-1$: на схеме фермы стержень читается $2-1$; на диаграмме усилий движение от точки 2 к точке 1 направлено снизу вверх. Перенесем это движение на стержень $2-1$ — оно направлено к узлу D , т.е. стержень сжат (на диаграмме усилие показано жирной линией);

в) рассмотрим узел *C*. В этом узле сходятся четыре стержня, причем усилия в двух из них ($e-1$ и $1-2$) уже определены, а в двух ($2-3$ и $3-e$) неизвестны. На диаграмме усилий уже есть точки 2 и e . Проведем через точку 2 линию, параллельную стержню $2-3$, а через точку e — линию, параллельную стержню $3-e$. Точку пересечения этих линий обозначим цифрой 3, соответствующей полю, которое лежит между стержнями $2-3$ и $3-e$. Длина линии $2-3$ на диаграмме равна 0,45 см, это значит, что усилие в стержне $2-3$ равно $0,45 \cdot 15 = 6,75$ кН. Длина линии $3-e$ равна 4 см, т.е. усилие в стержне $3-e$ равно $4 \cdot 15 = 60$ кН.

Определим знак усилия $2-3$: на схеме стержень фермы читается $2-3$; на диаграмме усилий движение от точки 2 к точке 3 направлено сверху вниз. Перенесем это движение на стержень $2-3$ — оно направлено к узлу *C*, т.е. стержень сжат (на диаграмме — жирная линия). Определим знак усилия $3-e$: стержень нижнего пояса читается $3-e$; на диаграмме усилий движение от точки 3 к точке e направлено слева направо. Перенесем это движение на стержень $3-e$ — оно направлено от узла *C*, т.е. стержень растянут (на диаграмме — тонкая линия);

г) рассмотрим узел *E*. В этом узле неизвестны усилия в стержнях $d-4$ и $4-3$. На диаграмме проводим через точки d и 3 линии, параллельные стержням $d-4$ и $4-3$, до пересечения в точке, которую обозначим цифрой 4. Усилие в стержне $d-4$ равно $4 \cdot 15 = 60$ кН, а в стержне $4-3$ — $0,8 \cdot 15 = 12$ кН. Оба стержня сжаты;

д) узел *G*. В нем неизвестны усилия $4-5$ и $5-e$. На диаграмме проводим линии через точки 4 и e параллельно стержням $4-5$ и $5-e$, получим точку 5. Усилие в стержне $4-5$ равно $0,9 \cdot 15 = 13,5$ кН (он растянут), в стержне $5-e$ — $3,4 \cdot 15 = 51$ кН (тоже растянут);

е) узел *L*. В нем неизвестны усилия в стержнях $5-5'$ и $5'-e$. На диаграмме проводим линии параллельно этим стержням через точки 5 и e , получим точку $5'$. Усилие в стержне $5-5'$ равно $1,1 \cdot 15 = 16,5$ кН (он растянут). Из диаграммы видно, что линия $e-5'$ симметрична линии $e-5$ (или точка $5'$ расположена симметрично точке 5 относительно горизонтальной линии, проходящей через точку e).

На этом можно закончить построение диаграммы, так как усилия в симметричных стержнях одинаковы.

Заполним таблицу усилий (табл. 1).

Таблица 1

Усилия в стержнях фермы

Стержень	$b-1$	$1-e$	$1-2$	$c-2$	$2-3$
Усилие, кН	-57	+57	-6	-54,8	-6,75

Стержень	3—e	3—4	d—4	4—5	5—e	5—5'
Усилие, кН	+59,25	-11	-59,25	+13,5	+50,25	+16,02

Задание для самостоятельной работы 9. Определить усилия в стержнях фермы путем построения диаграммы усилий Максвелла—Кремоны по одному из вариантов, показанных на рис. 24.

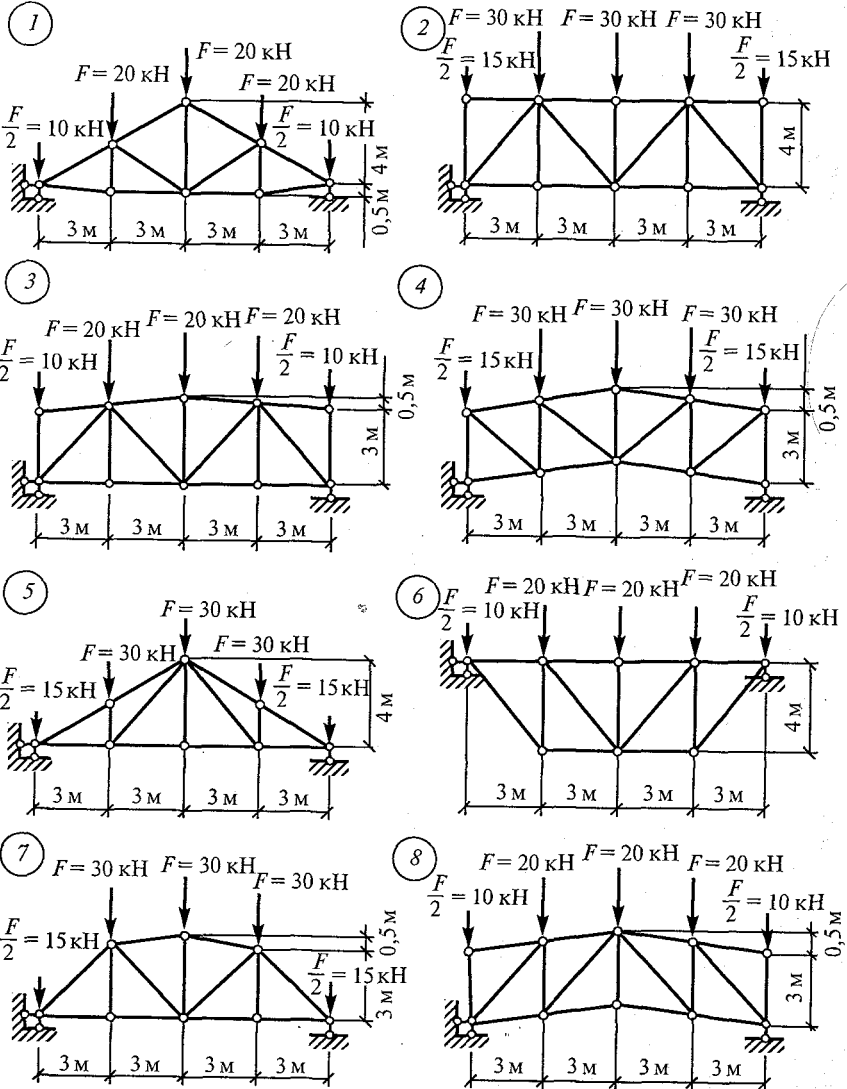


Рис. 24

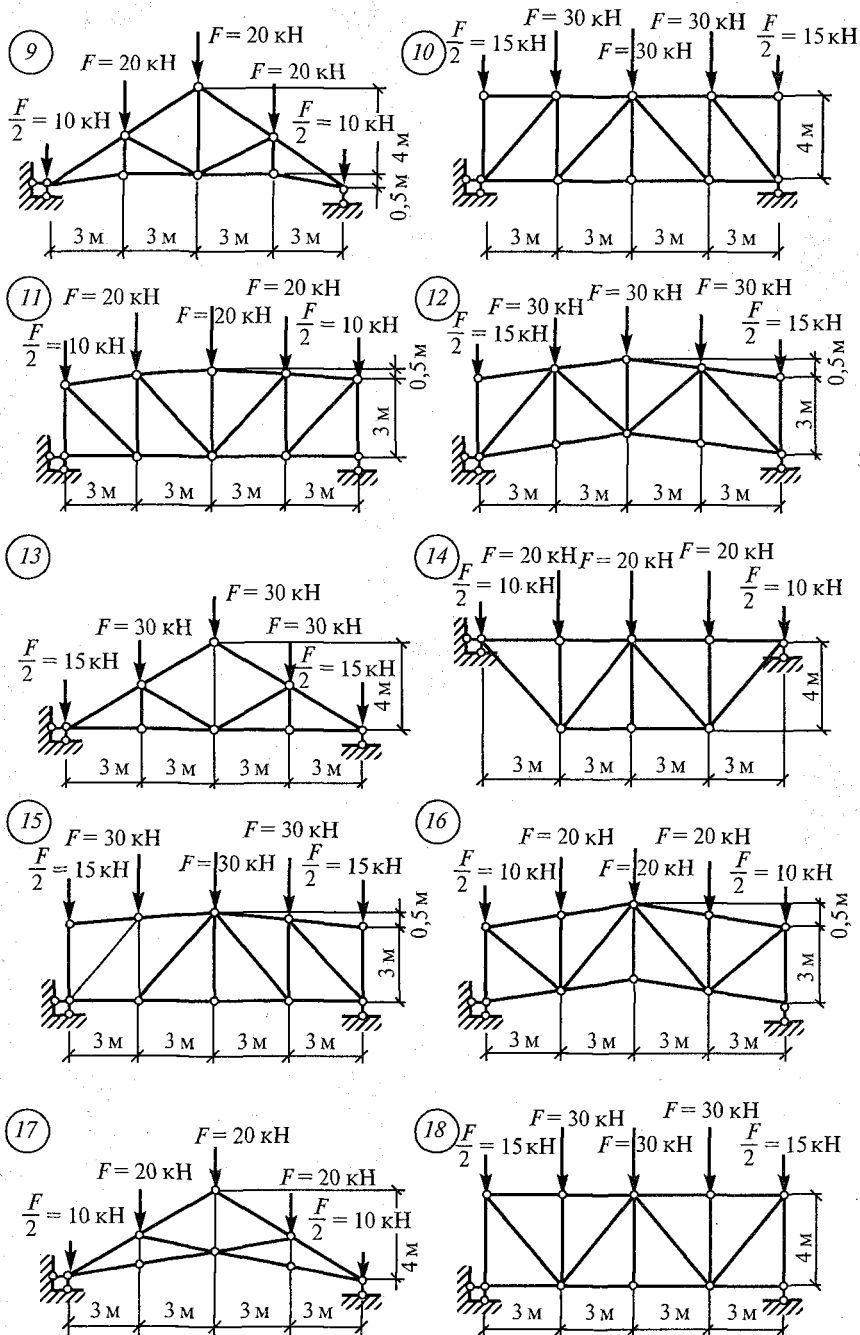


Рис. 24. Продолжение

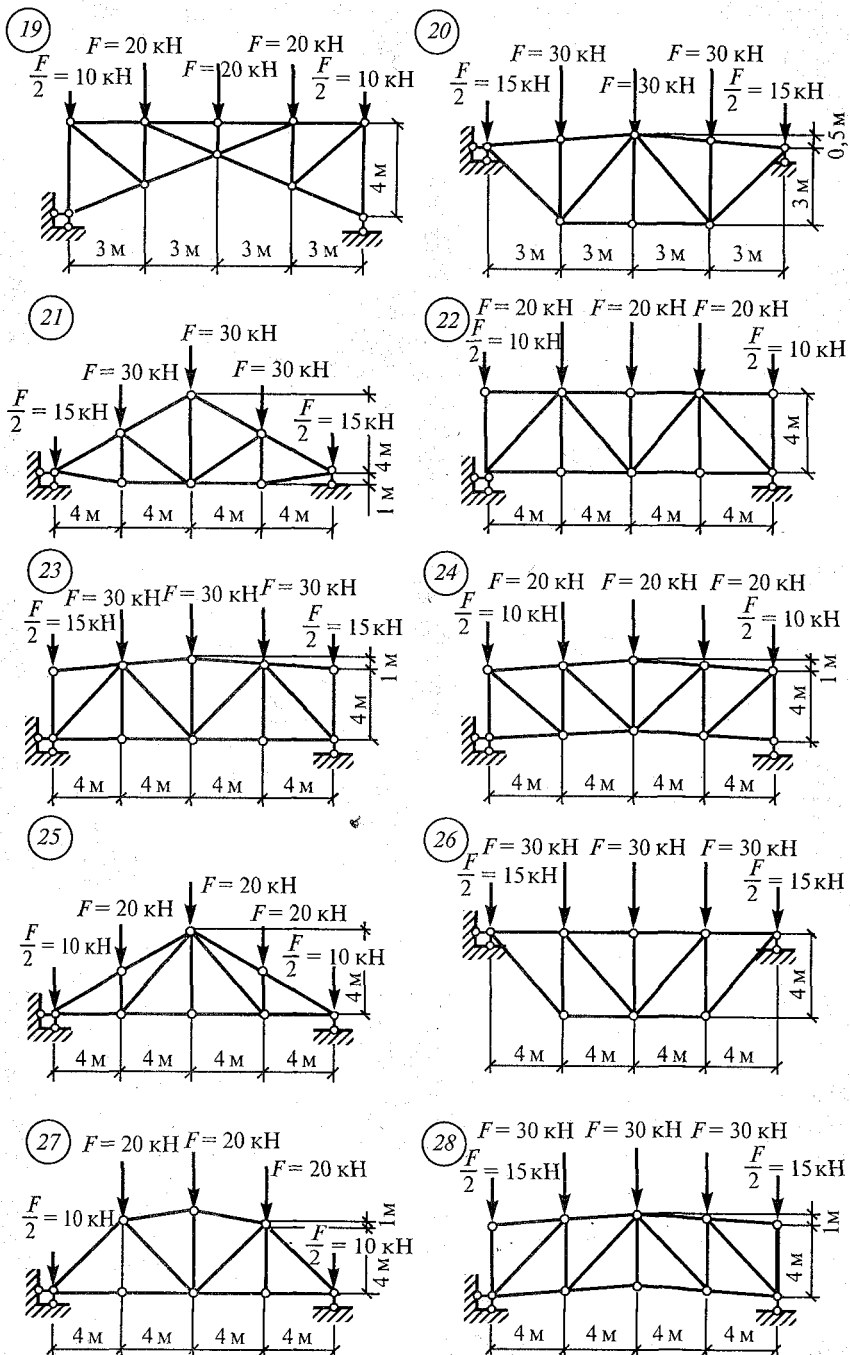


Рис. 24. Продолжение

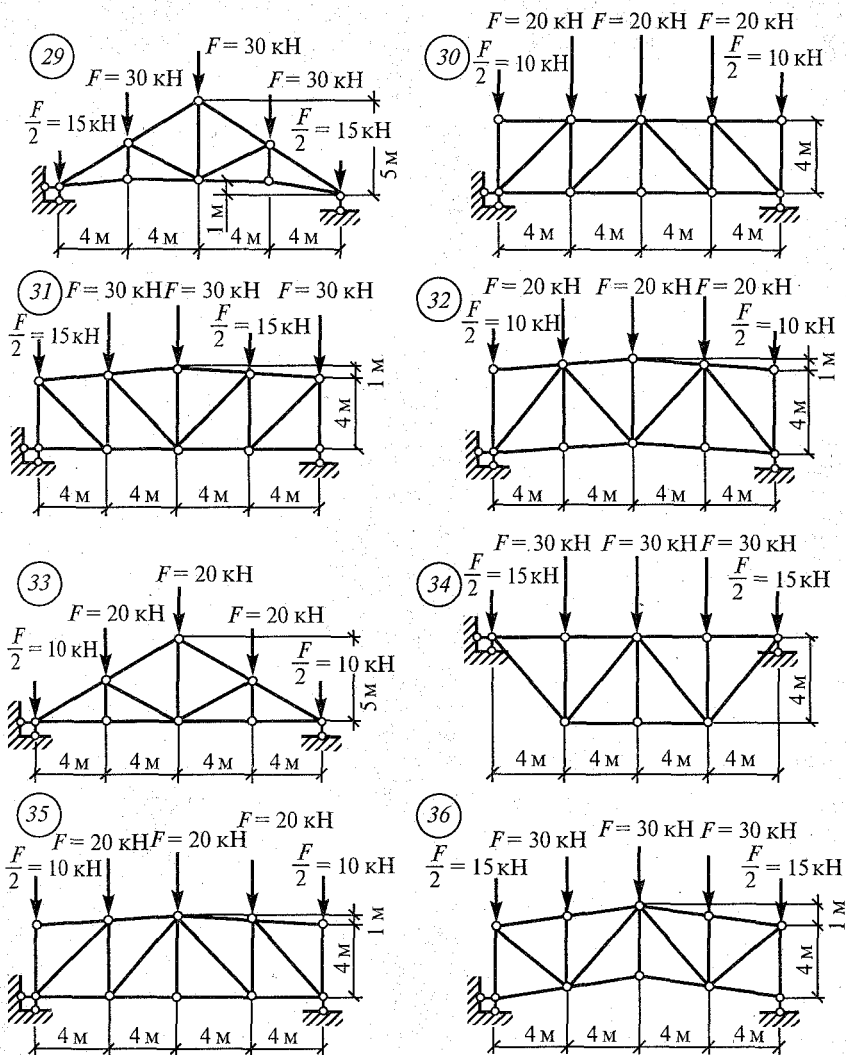


Рис. 24. Окончание

3.3. Определение линейных перемещений в простейших консольных рамах

1. Строят эпюру M_F изгибающих моментов от заданной нагрузки. В задачах для самостоятельной работы приведены консольные рамы (или брусья с ломаной осью). Эпюра M_F для такой

рамы может быть построена без определения опорных реакций. Для этого необходимо начинать определение изгибающих моментов от свободного (незаделанного) конца. Эпюра строится со стороны растянутого волокна.

2. *Разбивают эпюру M_F на простые геометрические фигуры:* треугольники и прямоугольники. Определяют площади фигур и положение их центров тяжести.

3. *Указывают какую-либо точку, перемещение которой требуется определить.* По условию задачи требуется найти вертикальное или горизонтальное перемещение какой-либо точки рамы. По тем же данным может быть решена задача определения угла поворота какого-либо сечения рамы.

Прикладывают силу $\bar{F} = 1$ (единичную силу) по направлению искомого линейного перемещения или $\bar{M} = 1$ (единичного момента) по направлению искомого углового перемещения. В задачах самостоятельной работы отыскиваются только линейные перемещения.

4. *Строят эпюру изгибающих моментов от единичной силы $\bar{F} = 1$, в дальнейшем ее обозначают \bar{M} в отличие от M_F .*

5. *Указывают ординаты на эпюре \bar{M} под центрами тяжести фигур эпюры M_F .*

6. *Определяют искомое перемещение с помощью правила Верещагина по формуле*

$$\Delta_{iF} = \frac{1}{EJ} \sum_{i=1}^n \omega_i y_i = \frac{\omega_1 y_1}{(EJ)_1} + \frac{\omega_2 y_2}{(EJ)_2} + \frac{\omega_3 y_3}{(EJ)_3} + \dots + \frac{\omega_n y_n}{(EJ)_n},$$

где Δ_{iF} — искомое вертикальное или горизонтальное перемещение; n — число фигур, на которые разбита эпюра M_F ; ω_i — площади простейших фигур, на которые разбита эпюра M_F (см. прил. V); y_i — ординаты на эпюре \bar{M} , расположенные по центрам тяжести фигур эпюры M_F , т.е. под центрами тяжести площадей ω_i (см. прил. V).

Знак произведения $\omega_i y_i$ считается положительным, если обе эпюры расположены по одну сторону от оси элемента, и отрицательным, если по разные стороны. Если на рассматриваемом участке одна из эпюр отсутствует, то $\omega_i y_i = 0$.

Пример 18. Определить горизонтальное перемещение точки А для схемы, изображенной на рис. 25, а. Для определения жесткости EJ материал — сталь марки Ст3, сечение — двутавровая балка № 18. Модуль продольной упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. 1. *Определим изгибающие моменты в характерных точках от силы $F = 15$ кН.*

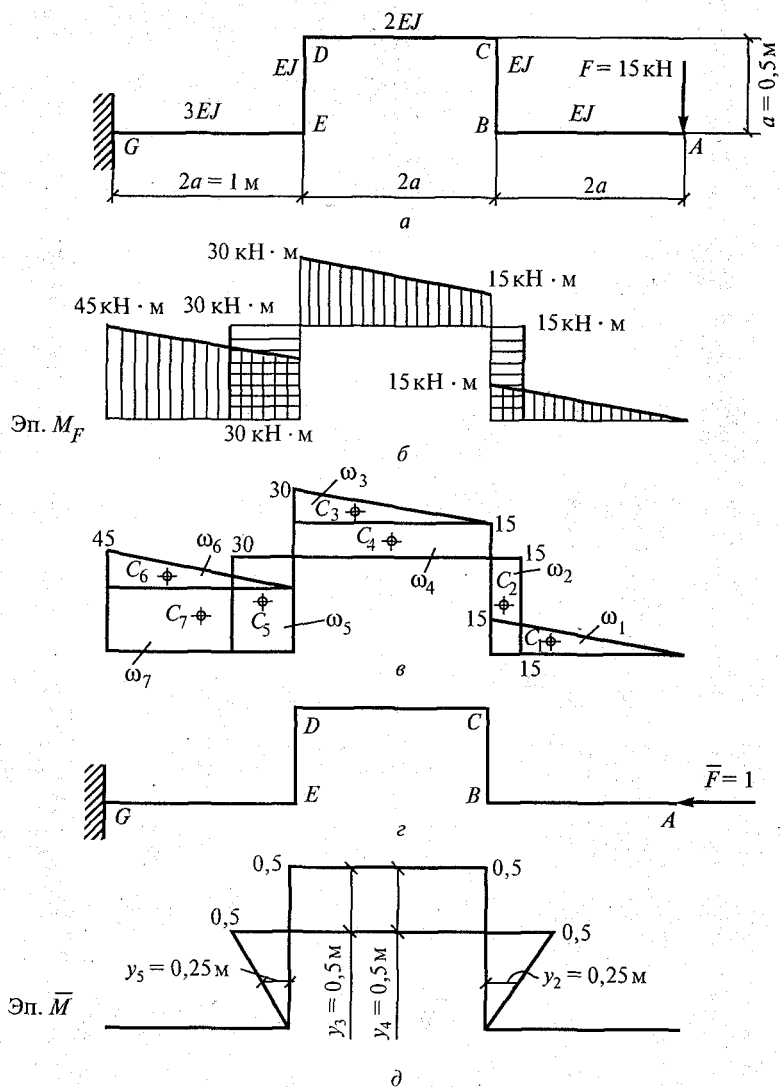


Рис. 25

Элемент AB :

$$M_A = 0; \quad M_B = -F \cdot 2a = -15 \cdot 1 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Элемент BC :

$$M_B = -F \cdot 2a = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_C = -F \cdot 2a = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Элемент CD :

$$M_C = -F \cdot 2a = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_D = -F \cdot 4a = -15 \cdot 2 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Элемент DE :

$$M_D = -F \cdot 4a = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_E = -F \cdot 4a = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Элемент EG :

$$M_E = -F \cdot 4a = -15 \cdot 2 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_G = -F \cdot 6a = -15 \cdot 3 = -45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_F (рис. 25, б).

2. Разбиваем эпюру M_F на простейшие фигуры (рис. 25, в). Эпюра M_F разбита на семь фигур: три треугольника и четыре прямоугольника. Найдём их площади:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad \omega_2 = 0,5 \cdot 15 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad \omega_4 = 1 \cdot 15 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_5 = 0,5 \cdot 30 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \quad \omega_7 = 1 \cdot 30 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Укажем центры тяжести каждой из фигур: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$.

3. По условию задачи требуется найти горизонтальное перемещение точки A . Прикладываем единичную силу $\bar{F} = 1$ в точке A и направляем ее горизонтально (по направлению искомого перемещения). Направление действия силы принимается произвольно. Примем его, как показано на рис. 25, г.

4. Определим изгибающие моменты в характерных точках от силы $\bar{F} = 1$.

Элемент AB :

$$\bar{M}_A = \bar{M}_B = 0.$$

Элемент BC :

$$\bar{M}_B = 0;$$

$$\bar{M}_C = -Fa = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ м}.$$

Элемент CD :

$$\bar{M}_C = -Fa = -0,5 \text{ м};$$

$$\bar{M}_D = -Fa = -0,5 \text{ м}.$$

Элемент DE :

$$\bar{M}_D = -Fa = -1 \cdot 0,5 = -0,5 \text{ м}; \quad \bar{M}_E = 0.$$

Элемент EG :

$$\overline{M}_E = \overline{M}_G = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру \overline{M} (рис. 25, д).

5. Пользуясь прил. V, укажем ординаты на эпюре \overline{M} под центрами тяжести эпюр M_F (площадей ω_i):

$y_1 = 0$, так как моменты на участке AB от $\overline{F} = 1$ равны нулю;

$y_2 = 0,25$, так как C_2 расположен в середине участка BC ;

$y_3 = 0,5$ м; $y_4 = 0,5$ м; $y_5 = 0,25$ м;

$y_6 = y_7 = 0$, так как эпюры \overline{M} на этом участке нет.

6. Определим искомое перемещение:

$$\Delta_{iF} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i y_i}{(EJ)_i} = \frac{\omega_1 y_1}{EJ} + \frac{\omega_2 y_2}{EJ} + \frac{\omega_3 y_3}{2EJ} + \frac{\omega_4 y_4}{2EJ} + \frac{\omega_5 y_5}{EJ} + \\ + \frac{\omega_6 y_6}{3EJ} + \frac{\omega_7 y_7}{3EJ}.$$

Подставим числовые значения и, учитывая, что $y_1 = 0$, $y_6 = y_7 = 0$, получим:

$$\Delta_{iF} = 0 + \frac{7,5 \cdot 0,25}{EJ} + \frac{7,5 \cdot 0,5}{2EJ} + \frac{15 \cdot 0,5}{2EJ} + \frac{15 \cdot 0,25}{EJ} + \\ + 0 + 0 = \frac{11,25}{EJ}.$$

Для двутавровой балки № 18 момент инерции $J_x = 1290 \text{ см}^4$, сталь марки Ст3, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Подставим эти значения в формулу для определения перемещения:

$$\Delta_{iF} = \Delta_A^{\text{гор}} = \frac{11,25 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^3}{1290 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = 0,0042 \text{ м} = 0,42 \text{ см}.$$

Ответ: $\Delta_A^{\text{гор}} = 0,42 \text{ см}$.

Пример 19. По условию примера 17 определить вертикальное перемещение точки B .

Решение. 1, 2. Эпюры M_F и площади, найденные в примере 17, останутся теми же, так как схема рамы и нагрузка не изменились.

3. Прикладываем в точке B единичную силу $\overline{F} = 1$ вертикально (по направлению искомого перемещения). Направление действия силы выбирается произвольно, например вверх (рис. 26, а). Очевидно, что перемещение направлено вниз. Проверим это.

4. Определим изгибающие моменты в характерных точках от $\bar{F} = 1$.

Элемент AB:

$$\bar{M}_A = \bar{M}_B = 0.$$

Элемент BC:

$$\bar{M}_B = \bar{M}_C = 0.$$

Элемент CD:

$$\bar{M}_C = 0; \quad \bar{M}_D = 1 \cdot 2a = 1 \text{ м.}$$

Элемент DE:

$$\bar{M}_D = \bar{M}_E = 1 \cdot 2a = 1 \text{ м.}$$

Элемент EG:

$$\bar{M}_E = 1 \cdot 2a = 1 \text{ м;} \quad \bar{M}_G = 1 \cdot 4a = 2 \text{ м.}$$

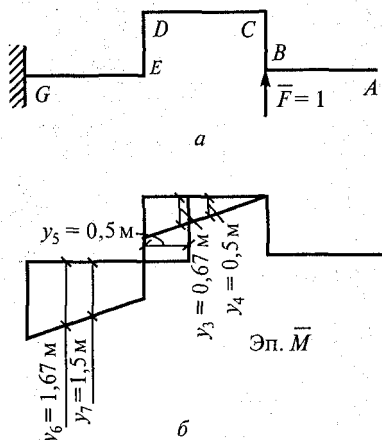


Рис. 26

5. Пользуясь прил. V, определим ординаты на единичной эпюре под центрами тяжести площадей ω_i (рис. 26, б):

$$y_1 = 0; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \text{ м} = 0,67 \text{ м;}$$

$$y_4 = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0,5 \text{ м;}$$

$$y_5 = 0,5 \text{ м;} \quad y_6 = 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = 1 + \frac{2}{3} \text{ м} = 1,67 \text{ м;}$$

$$y_7 = \frac{1+2}{2} = 1,5 \text{ м.}$$

6. Определим искомое перемещение:

$$\begin{aligned} \Delta_{iF} = \Delta_B^{\text{верт}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i y_i}{(EJ)_i} = \frac{\omega_1 y_1}{EJ} + \frac{\omega_2 y_2}{EJ} + \frac{\omega_3 y_3}{2EJ} + \\ &+ \frac{\omega_4 y_4}{2EJ} + \frac{\omega_5 y_5}{EJ} + \frac{\omega_6 y_6}{3EJ} + \frac{\omega_7 y_7}{3EJ} = 0 + 0 + \\ &+ \frac{7,5 \cdot 0,67}{2EJ} - \frac{15 \cdot 0,5}{2EJ} - \frac{15 \cdot 0,5}{EJ} - \frac{7,5 \cdot 1,5}{3EJ} - \frac{30 \cdot 1,67}{3EJ} = \\ &= -\frac{32,94}{EJ}. \end{aligned}$$

Подставим $J_x = 1290 \text{ см}^4$ и $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ в формулу для определения перемещения:

$$\Delta_B^{\text{верт}} = - \frac{32,94 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м}^3}{1290 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}} = -0,0122 \text{ м} = -1,22 \text{ см}.$$

Ответ: $\Delta_B^{\text{верт}} = -1,22 \text{ см}$. Знак «минус» свидетельствует о том, что точка B перемещается в сторону, противоположную действию силы $\bar{F} = 1$, т.е. вниз.

Задание для самостоятельной работы 10. Определить перемещение точки D по данным одного из вариантов, показанных на рис. 27. Для нечетных вариантов определить вертикальное перемещение точки D , для четных вариантов — горизонтальное. При определении жесткости EJ материал — сталь марки Ст3, сечение — двутавровая балка № 20.

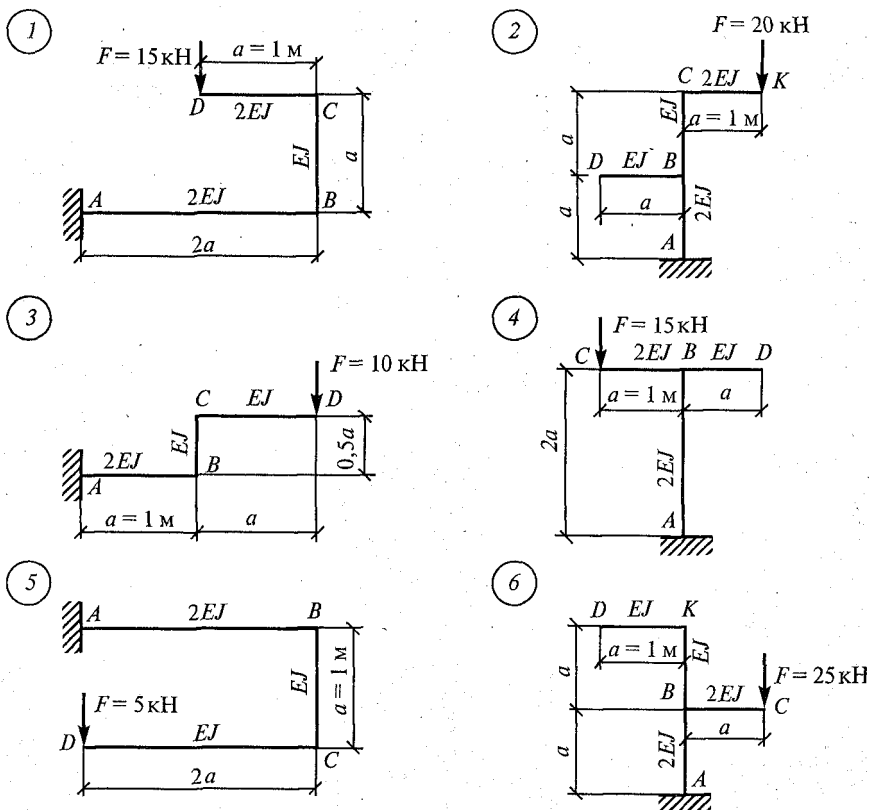


Рис. 27

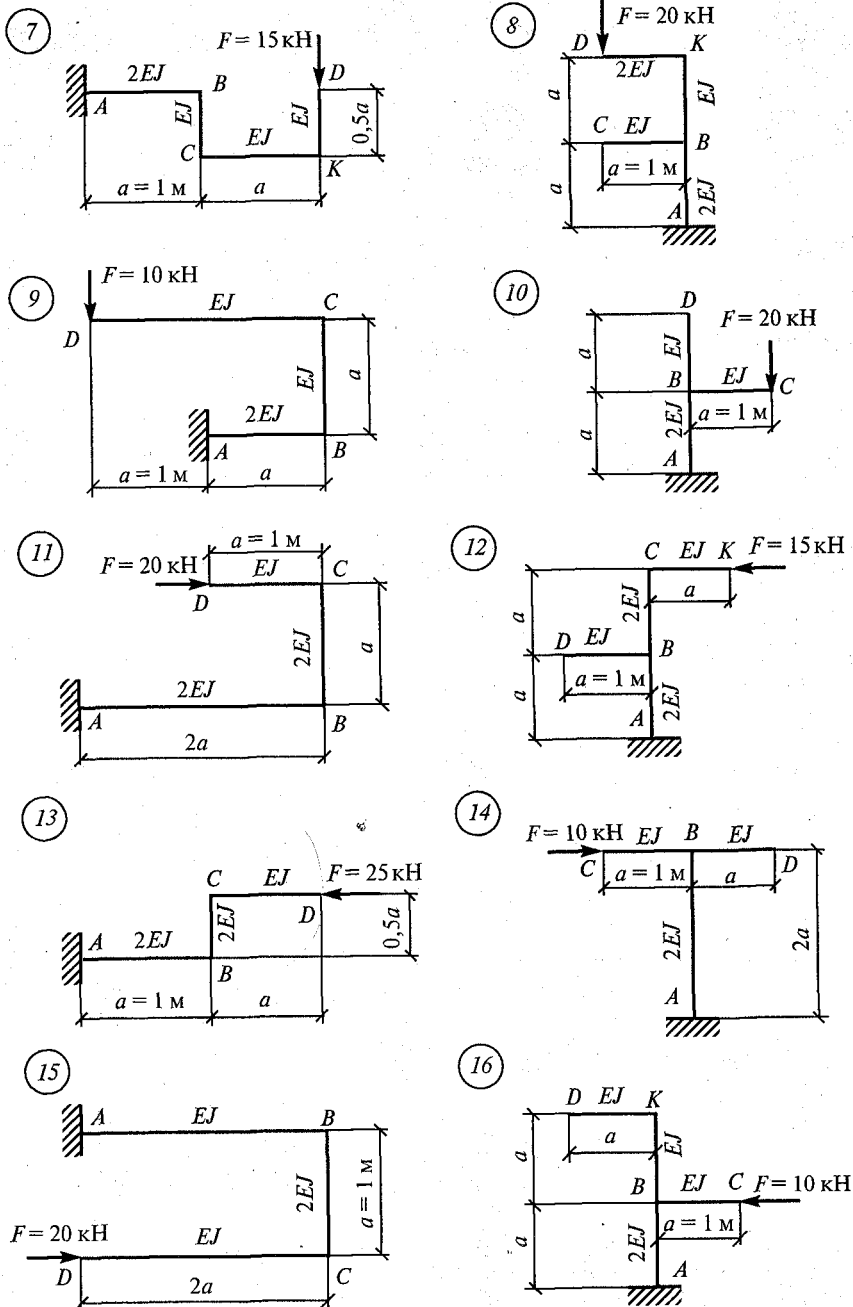
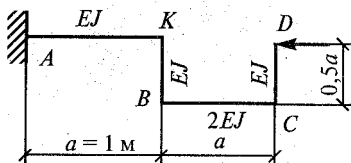
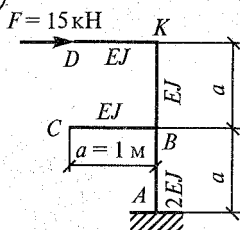


Рис. 27. Продолжение

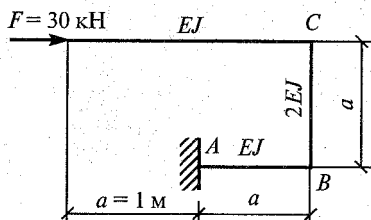
17



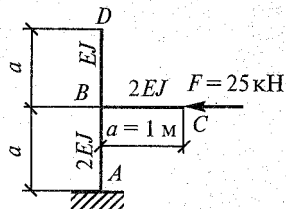
18



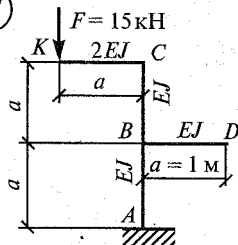
19



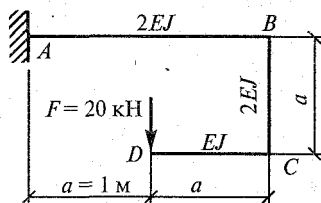
20



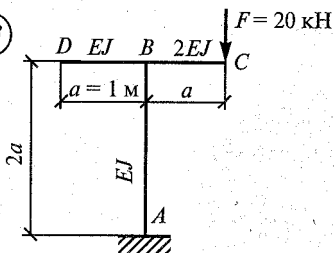
21



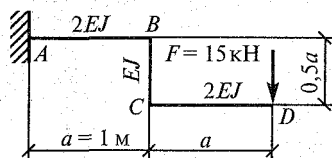
22



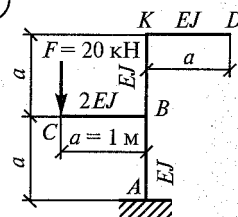
23



24



25



26

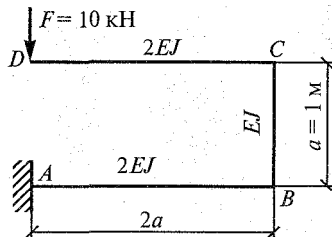


Рис. 27. Продолжение

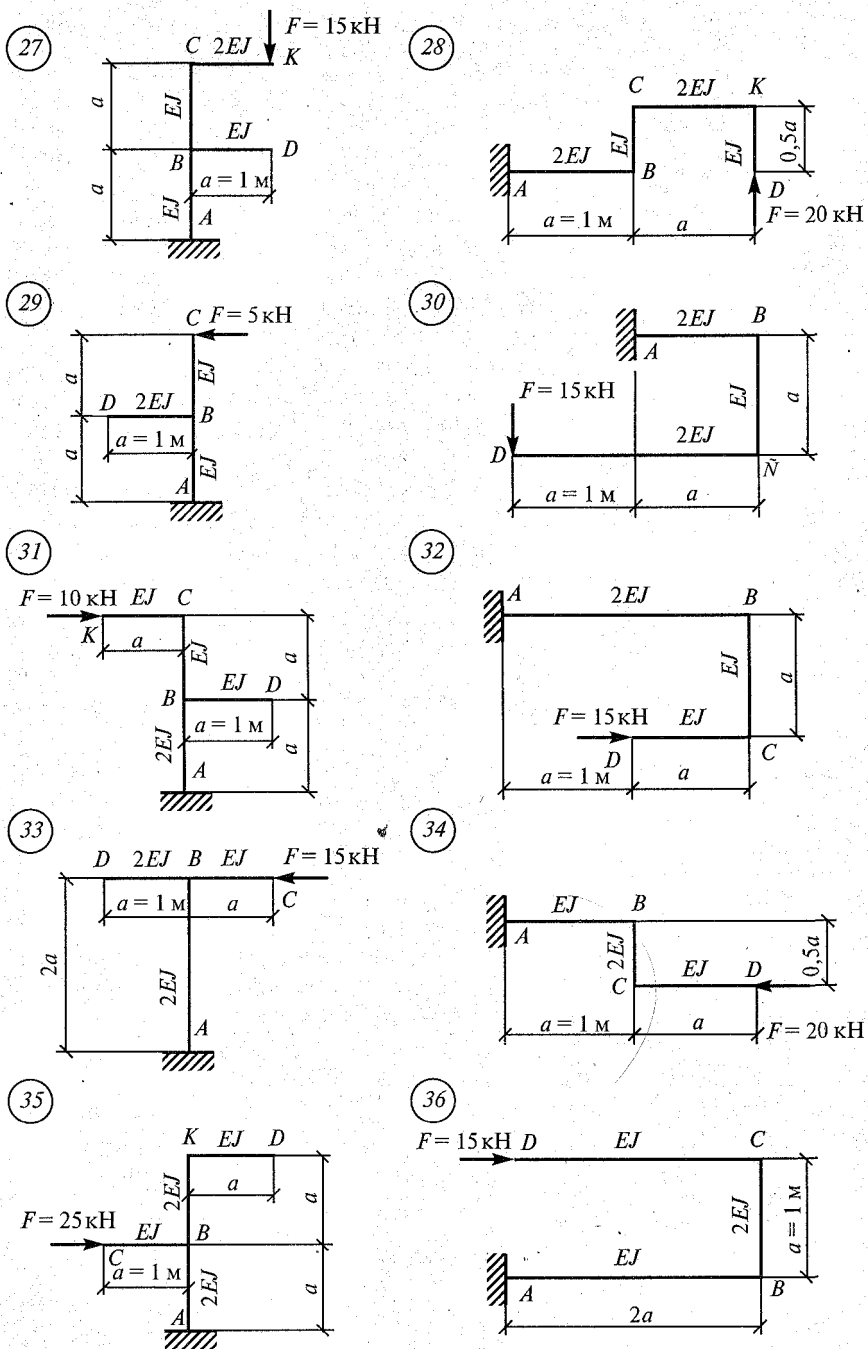


Рис. 27. Окончание

3.4. Расчет статически неопределимой (неразрезной) балки по уравнению трех моментов

1. Обозначают пролеты и опоры на заданной схеме (системе): первый пролет — l_1 , второй — l_2 , третий — l_3 и т. д. Первая опора обозначается 0, вторая — 1, третья — 2 и т. д.

2. От заданной системы переходят к основной системе. Для этого каждую опору заменяют шарниром и опорным моментом, который замещает действие отброшенной связи. Опорные моменты обозначают M_0, M_1, M_2, \dots в зависимости от номера опоры. Величина этих моментов неизвестна.

Если балка имеет консоль, то в основной системе она отбрасывается, а действие отброшенных сил, приложенных к консоли, учитывается. Если одна из крайних опор жестко защемляющая, то в основной системе ее заменяют шарнирной опорой и добавляют еще один пролет и опору, которые называют фиктивными, так как в заданной системе их нет. Длина фиктивного пролета принимается равной нулю. Если защемляющая опора расположена на левом конце, то фиктивный пролет обозначают $l_0 = 0$, а фиктивную опору — «-1» (минус первая) и опорный момент $M_{-1} = 0$. Если защемляющая опора расположена на правом конце, то фиктивному пролету, опоре и моменту присваивается индекс, следующий за индексом предшествующего пролета (опоры, момента).

3. Определяют значения изгибающих моментов от заданной нагрузки для основной системы в каждом пролете. По найденным значениям строят эпюру моментов от заданной нагрузки для основной системы, которую обозначают M_x^0 . Величины моментов и характер эпюры определяют по прил. VI.

4. Определяют неизвестные опорные моменты с помощью уравнений трех моментов, которые составляются для каждой промежуточной опоры. Во всех задачах самостоятельной работы основная система имеет одну промежуточную опору, в задачах расчетно-графической работы — две. Поэтому в этих задачах составляются соответственно одно и два уравнения трех моментов.

Для балки, у которой в заданной системе все опоры шарнирные или одна (правая) защемляющая, уравнения трех моментов имеют вид:

для первой промежуточной опоры 1

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi);$$

для второй промежуточной опоры 2

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6(B_2^\Phi + A_3^\Phi),$$

где M_1 и M_2 — опорные моменты на промежуточных опорах, их определяют путем решения уравнений; M_0 и M_3 — опорные моменты на концевых опорах, их находят по схеме балки; A_2^Φ , A_3^Φ , B_1^Φ , B_2^Φ — фиктивные опорные реакции для основной системы (по прил. VII).

Если защемляющая опора расположена слева, то, учитывая все дополнительные преобразования (см. п. 2), уравнения трех моментов принимают вид:

для первой промежуточной опоры 0

$$M_{-1}l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1l_1 = -6(B_0^\Phi + A_1^\Phi);$$

для второй промежуточной опоры 1

$$M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi),$$

где M_0 и M_1 — опорные моменты на промежуточных опорах, их определяют путем решения уравнений; M_{-1} и M_2 — опорные моменты на крайних опорах, их определяют по схеме балки; B_0^Φ , A_1^Φ , B_1^Φ , A_2^Φ — фиктивные опорные реакции для основной системы (по прил. VII). В примерах они условно показаны на основной системе. Подробнее о фиктивных опорных реакциях можно узнать в работе [3].

Решают уравнения и определяют опорные моменты.

5. По найденным значениям строят эпюры опорных моментов $M_{\text{оп}}$, откладывая их на соответствующих опорах с учетом полученных знаков и соединяя прямыми линиями.

6. Определяют значения изгибающих моментов M_x от заданной нагрузки для заданной системы путем суммирования значения эпюр M_x^0 и $M_{\text{оп}}$ в характерных точках. По найденным значениям строят эпюру M_x . Она должна быть уточнена после построения эпюры Q_x .

7. Определяют значения поперечных сил Q_x на опорах:

$$Q_0^{\text{прав}} = A_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1};$$

$$Q_1^{\text{лев}} = -B_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1};$$

$$Q_1^{\text{прав}} = A_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2};$$

$$Q_2^{\text{лев}} = -B_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2};$$

$$Q_2^{\text{прав}} = A_3^0 + \frac{M_3 - M_2}{l_3},$$

где $Q_i^{\text{лев}}$ и $Q_i^{\text{прав}}$ — значения поперечной силы на i -й опоре ($i = 0, 1, 2$), соответственно чуть левее и чуть правее ее; $A_1^0, B_1^0, A_2^0, B_2^0, A_3^0$ — опорные реакции для простой балки (см. прил. VI); M_0, M_1, M_2, M_3 — найденные ранее опорные моменты.

Поперечные силы на участках между опорами и на консольных участках определяются по общим правилам. По найденным значениям строят эпюру Q_x , используя зависимости между нагрузкой и характером эпюры Q_x (см. самостоятельную работу 6).

8. *Определяют опорные реакции балки на опорах 0, 1, 2, 3:*

$$R_0 = -Q_0^{\text{лев}} + Q_0^{\text{прав}};$$

$$R_1 = -Q_1^{\text{лев}} + Q_1^{\text{прав}};$$

$$R_2 = -Q_2^{\text{лев}} + Q_2^{\text{прав}};$$

$$R_3 = -Q_3^{\text{лев}} + Q_3^{\text{прав}}.$$

9. *Уточняют эпюру M_x .* Для этого находят значения изгибающих моментов для тех сечений, где наклонная линия эпюры (если такая есть) пересекает нулевую линию.

В качестве проверки можно найти сумму моментов всех левых или правых сил (и опорных реакций в том числе) относительно любой точки балки. Они должны быть равны между собой.

Пример 20. Построить эпюру M_x для неразрезной балки, показанной на рис. 28.

Решение. 1. Обозначим пролеты l_1 и l_2 и опоры 0, 1, 2 (рис. 28, а).

2. От заданной системы переходим к основной, введя на каждую опору шарниры и опорные моменты (рис. 28, б).

3. Определим изгибающие моменты в характерных точках для основной системы от заданной нагрузки (см. прил. VI). Момент в точке С под силой $F_1 = 80$ кН

$$M_C^0 = \frac{F_1 ab}{l_1} = \frac{80 \cdot 3 \cdot 4}{7} = 137,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

момент в точке D под силой $F_2 = 30$ кН

$$M_D^0 = \frac{F_2 l_2}{4} + \frac{q l_2^2}{8} = \frac{30 \cdot 5}{4} + \frac{20 \cdot 5^2}{8} = 37,5 + 62,5 = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x^0 (рис. 28, в).

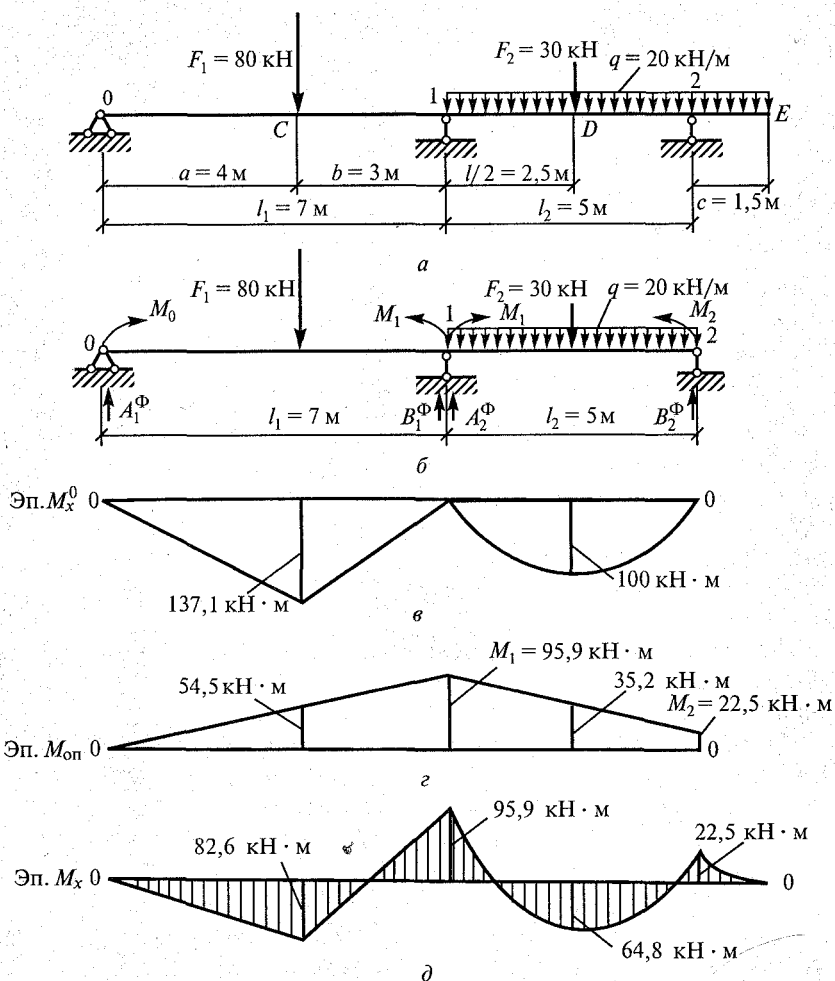


Рис. 28

4. Составим уравнение трех моментов. Промежуточная опора одна, поэтому и уравнение для опоры 1 будет одно:

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(B_1^{\Phi} + A_2^{\Phi}),$$

где $M_0 = 0$, так как опора 0 концевая и шарнирная;

$$M_2 = -\frac{qc^2}{2} = -\frac{20 \cdot 1,5^2}{2} = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$B_1^{\Phi} = \frac{F_1 ab (l_1 + a)}{6 l_1} = \frac{80 \cdot 3 \cdot 4 (7 + 4)}{6 \cdot 7} = 251,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$A_2^{\Phi} = \frac{F_2 l_2^2}{16} + \frac{q l_2^3}{24} = \frac{30 \cdot 5^2}{16} + \frac{20 \cdot 5^3}{24} = 46,9 + 104,2 = 151,1 \text{ кН} \cdot \text{м (см. прил. VII).}$$

Подставим числовые значения в уравнение моментов:

$$0 + 2M_1(7 + 5) - 22,5 \cdot 5 = -6(251,4 + 151,1)$$

или $24M_1 = 2302$, откуда $M_1 = -95,9 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

В точке C величина опорного момента

$$M_C = -\frac{95,9}{7} \cdot 4 = -54,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке D величина опорного момента

$$M_D = \frac{-95,9 + 22,5}{2} = -35,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. По найденным значениям строим эпюру $M_{\text{оп}}$ (рис. 28, ε).

6. Суммируем значения эпюры M_x^0 и $M_{\text{оп}}$ в характерных точках:

$$M_0 = 0; \quad M_C = 137,1 - 54,5 = 82,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -95,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_D = 100 - 35,2 = 64,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_E = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис. 28, δ). По условию самостоятельной работы требуется построить только эпюру M_x .

Пример 21. Построить эпюру M_x для балки, показанной на рис. 29, a .

Решение. 1. Обозначим опоры 0, 1 и пролет l_1 (рис. 29, a).

2. От заданной системы переходим к основной. Для этого вместо опор 0 и 1 вводим шарниры и опорные моменты M_0 и M_1 . Кроме того, влево от опоры 0 вводим дополнительный (фиктивный) пролет $l_0 = 0$ и фиктивную опору -1 с опорным моментом $M_{-1} = 0$ (рис. 29, b).

3. Определим величины изгибающих моментов в характерных точках для основной схемы от заданной нагрузки (см. прил. VI). Моменты в точках C и D от силы F_1

$$M_{C(F_1)} = F_1 a = 35 \cdot 3 = 105 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Момент в точке E (середине пролета) от нагрузки q

$$M_{E(q)}^0 = \frac{q l_1^2}{8} = \frac{15 \cdot 8^2}{8} = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Момент в точке E от совместного действия силы F_1 и нагрузки q равен сумме моментов от каждого из них:

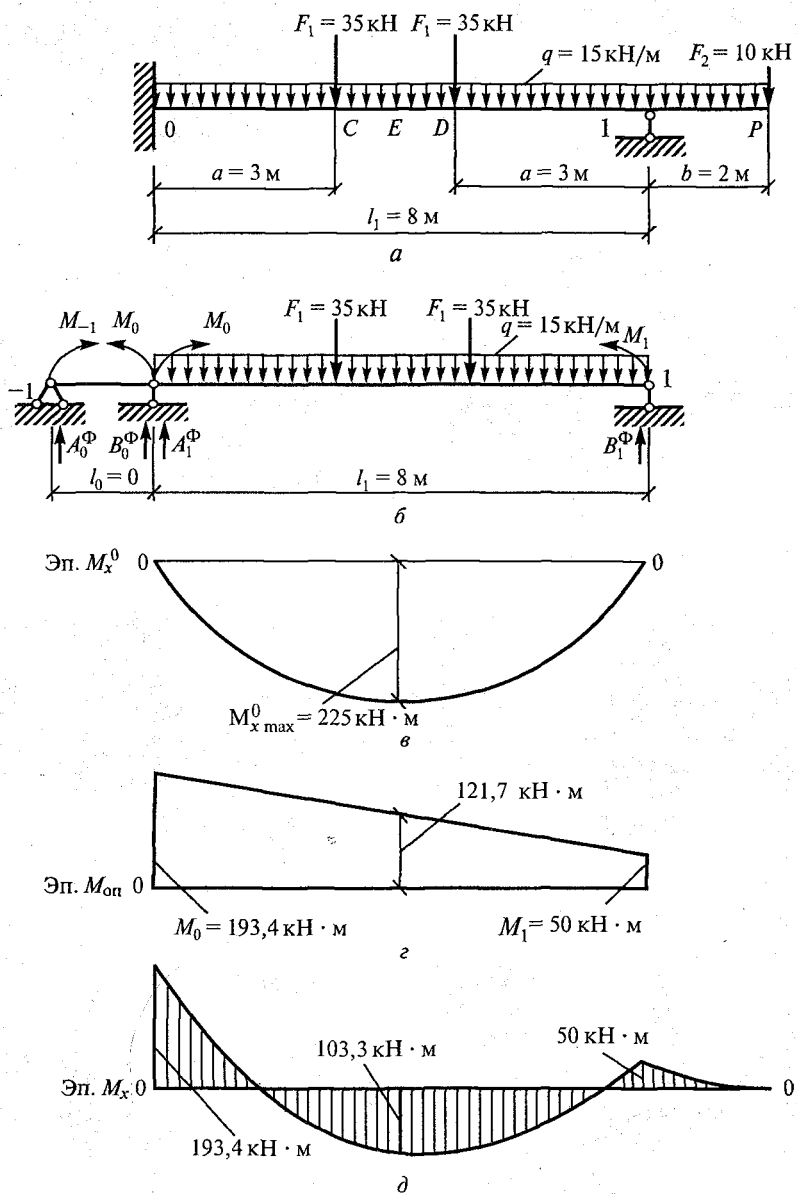


Рис. 29

$$M_E^0 = 120 + 105 = 225 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Значения M_C^0 и M_D^0 можно не определять, так как они меньше M_E^0 . Строим эпюру M_x^0 (рис. 29, в).

4. Составим уравнение трех моментов для промежуточной опоры 0:

$$M_{-1}l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1l_1 = -6(B_0^\Phi + A_3^\Phi),$$

где $M_{-1} = 0$, так как и опора, и момент фиктивные; $l_0 = 0$, так как этот пролет тоже фиктивный;

$$M_1 = -\frac{qb^2}{2} = -F_1b = -\frac{15 \cdot 2^2}{2} - 10 \cdot 2 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$B_0^\Phi = 0$, так как нагрузки на фиктивном пролете нет;

$$A_1^\Phi = \frac{ql_1^3}{24} + \frac{Fa(l-a)}{2} = \frac{15 \cdot 8^3}{24} + \frac{35 \cdot 3(8-3,0)}{2} = 582,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(см. прил. VII).

Подставим числовые значения в уравнение трех моментов:

$$0 + 2M_0 \cdot 8 - 50 \cdot 8 = -6 \cdot 582,5,$$

откуда

$$M_0 = \frac{-6 \cdot 582,5 + 50 \cdot 8}{16} = -193,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Строим эпюру опорных моментов $M_{\text{оп}}$ (рис. 29, з).

Значение опорного момента в середине пролета (точка E)

$$M_E^{\text{оп}} = \frac{-193,4 - 50}{2} = -121,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6. Определим значение изгибающего момента от заданной нагрузки для заданной схемы в точке E:

$$M_E = 225 - 121,7 = 103,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру M_x (рис. 29, д). Она должна быть уточнена после построения эпюры Q_x , но это выходит за рамки самостоятельной работы и будет показано в расчетно-графической работе 11.

Задание для самостоятельной работы 11. Построить эпюру для неразрезной балки по данным одного из вариантов, показанных на рис. 30.

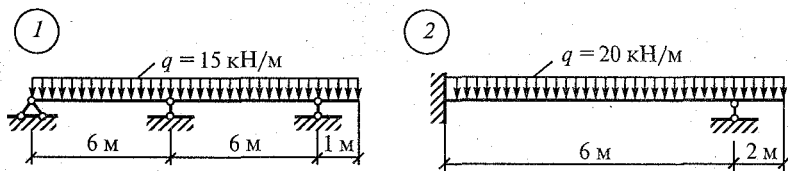


Рис. 30

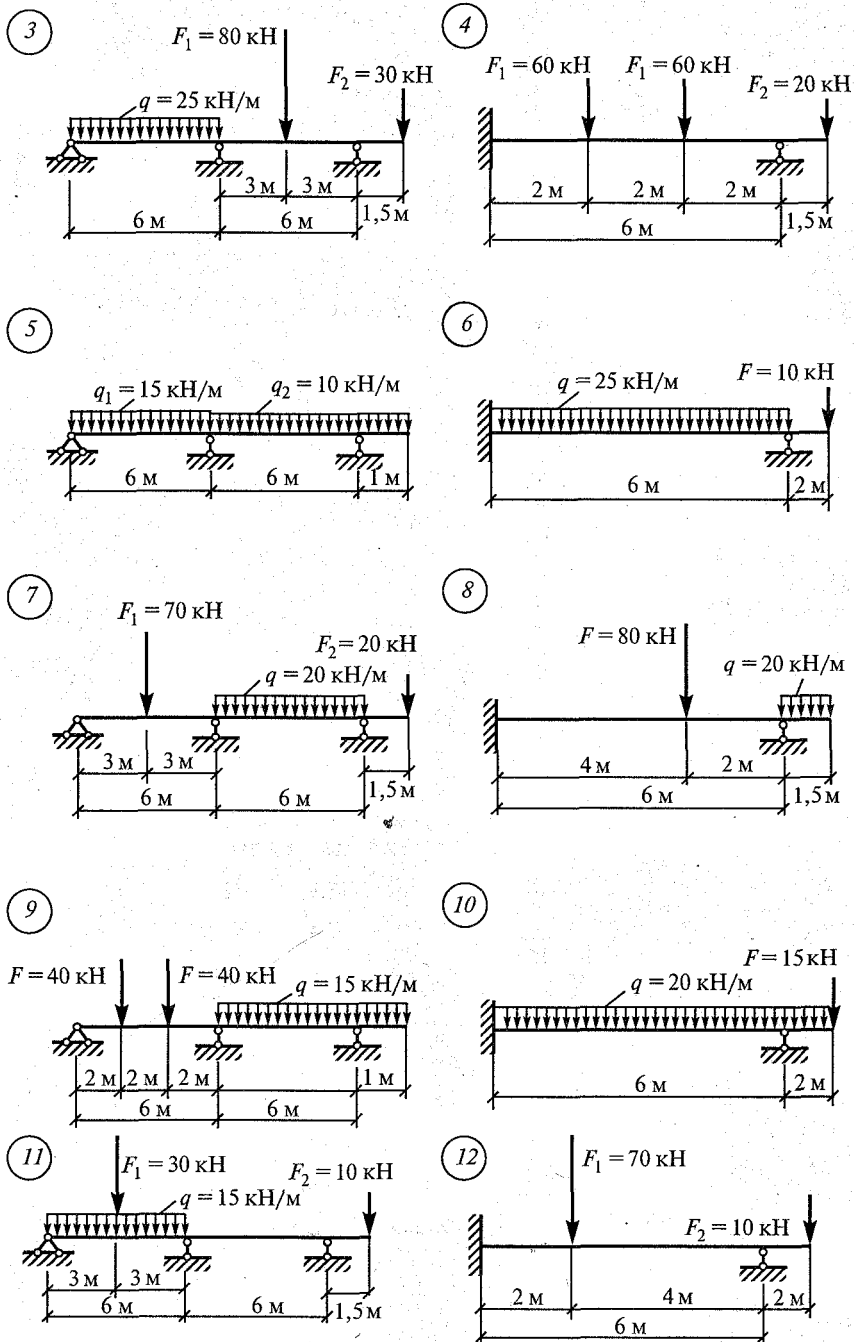
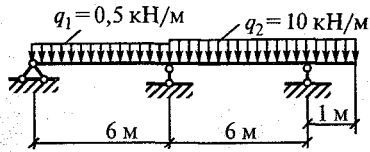
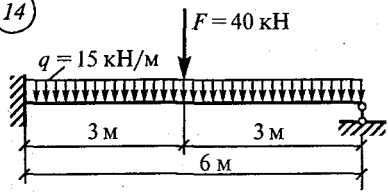


Рис. 30. Продолжение

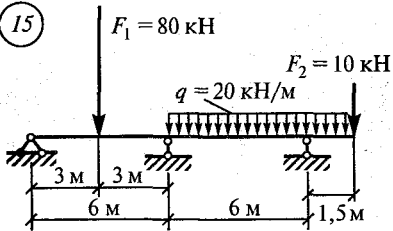
13



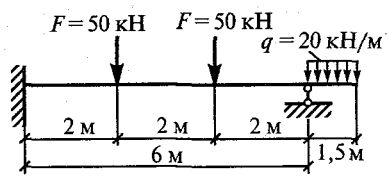
14



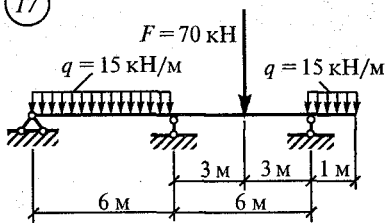
15



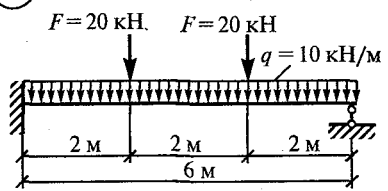
16



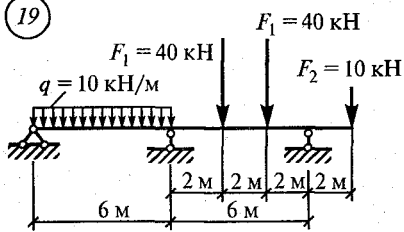
17



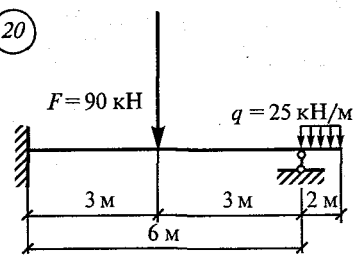
18



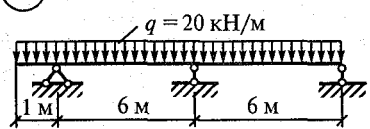
19



20



21



22

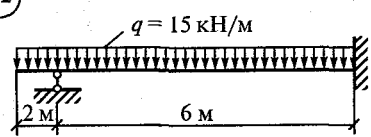


Рис. 30. Продолжение

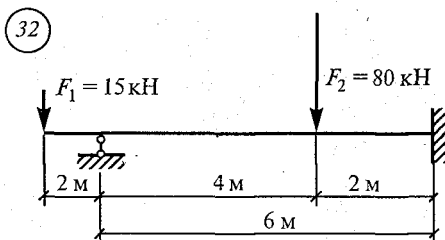
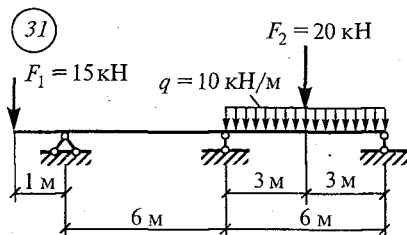
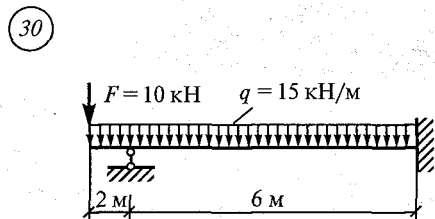
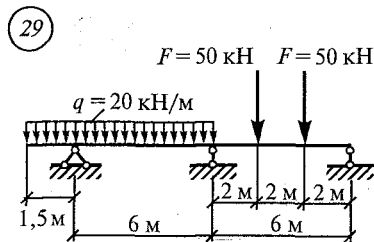
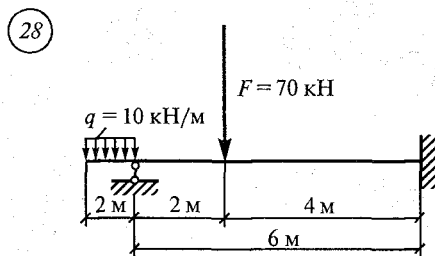
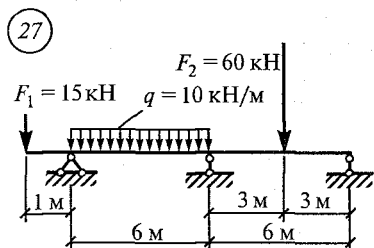
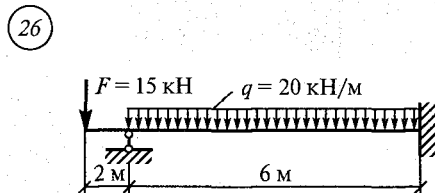
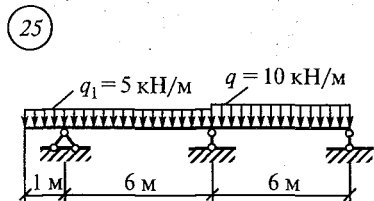
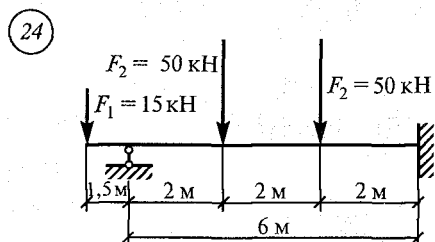
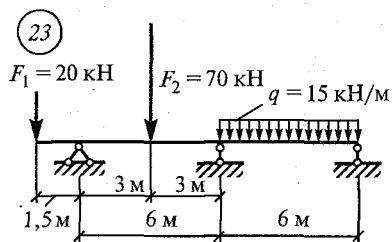
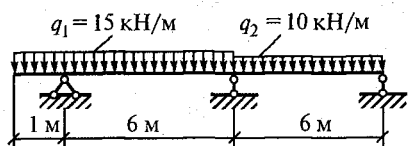
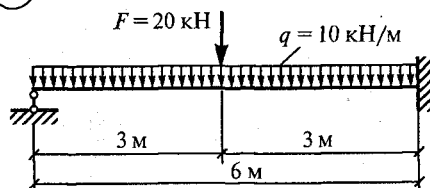


Рис. 30. Продолжение

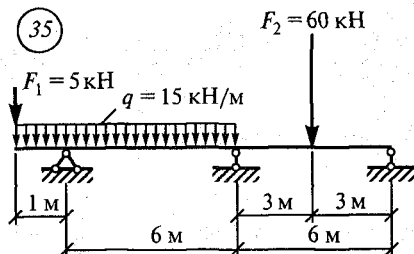
33



34



35



36

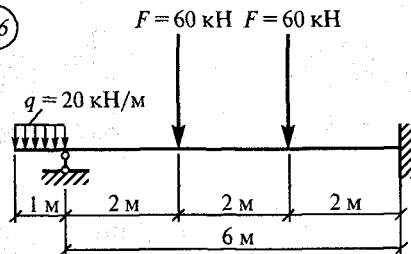


Рис. 30. Окончание

РАЗДЕЛ II

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

ГЛАВА 4

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА

4.1. Определение усилий в стержнях простейшей консольной фермы

Задачу можно решать аналитическим или графическим способом.

Аналитическое решение

1. *Обозначают узлы и стержни фермы.* Узлы можно обозначить буквами, а стержни — цифрами. Порядок обозначения произвольный.

2. *Определяют величины углов между стержнями в каждом узле,* используя геометрическую схему фермы.

3. *Мысленно вырезают узел,* в котором сходятся два стержня. Определяют усилия в этих стержнях в следующем порядке:

а) стержни заменяют усилиями в них. Усилия принято обозначать буквой S с подстрочным индексом, указывающим номер стержня, в котором определяется усилие. Удобнее узел показать на отдельном рисунке, придерживаясь масштаба при изображении углов;

б) выбирают систему осей координат. Начало координат совмещают с точкой пересечения всех стержней. Одну из осей совмещают с одним из неизвестных усилий, а вторую — проводят перпендикулярно первой. Можно оси располагать традиционно: одну вертикально, другую горизонтально (см. самостоятельную работу 1);

в) составляют уравнения равновесия:

$$1) \sum X = 0; \quad 2) \sum Y = 0.$$

Решают их и находят неизвестные усилия.

4. *Вырезают поочередно все узлы фермы,* причем каждый вырезанный узел должен иметь не более двух неизвестных усилий. Порядок определения остается таким же, как для первого узла. В задачах расчетной работы требуется рассмотреть 3—4 узла.

Графическое решение

1. *Вычерчивают геометрическую схему фермы* строго в масштабе. Масштаб выбирается произвольно и определяется размерами чертежа. Начать можно с масштаба, например, 1:50.

2. *Выбирают масштаб сил.* Рекомендации по выбору масштаба сил дать трудно. Начать можно с масштаба в 1 см 5 или 10 кН. При неудачной попытке масштаб следует изменить.

3. *Мысленно вырезают узел, в котором сходятся два стержня.* Определяют усилия в этих стержнях в следующем порядке:

а) обозначают стержни и усилия, как при аналитическом решении;

б) определяют усилия в стержнях первого узла. Для этого в принятом масштабе сил откладывают известную по величине и направлению силу, приложенную в узле. Затем через начало и конец вектора, изображающего силу, проводят две линии, параллельные стержням, в которых отыскиваются усилия, до взаимного их пересечения. Измеренные в масштабе сил отрезки (стороны треугольника) дают величину усилия в стержне, параллельном этому отрезку;

в) определяют знак усилия. Устанавливают направление действия усилия на силовом треугольнике. Для системы сил, находящейся в равновесии, все стрелки в нем должны быть направлены в одну сторону. Направление обхода треугольника определяется направлением действия силы. Перенесем полученное направление усилия на узел. Если при этом усилие направлено к узлу, то стержень будем считать сжатым, а если от узла — растянутым.

4. *Рассматривают следующий узел.* Это будет узел, в котором сходятся два неизвестных усилия. Сначала откладывают известные по величине и направлению усилия в масштабе сил. Через начало первого и конец последнего усилия проводят линии, параллельные стержням, усилия в которых неизвестны, до взаимного их пересечения. Полученные стороны многоугольника сил, измеренные в масштабе, представляют собой величины неизвестных усилий. Знак усилий определяется по правилам, приведенным для первого узла.

Каждым следующим вырезаемым узлом является тот, в котором сходятся не более двух неизвестных усилий. Сравнивают результаты решения задачи двумя способами: аналитическим и графическим.

Пример 22. Определить усилия в стержнях консольной фермы, показанной на рис. 31, а, аналитическим и графическим способами. Рассмотреть три узла.

Аналитическое решение

1. Обозначим узлы *A, B, C, D, E* и стержни 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. Определим углы между стержнями в каждом узле (рис. 31, б).

Из треугольника AMD

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,5}{5} = 0,3; \quad \alpha = 16^\circ 42'.$$

Из треугольника AME

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0,5}{5} = 0,1; \quad \beta = 5^\circ 43';$$

$$\alpha + \beta = 16^\circ 42' + 5^\circ 43' = 22^\circ 25'.$$

Из треугольника AKB

$$\delta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 16^\circ 42' = 73^\circ 18';$$

$$\theta = 180^\circ - \delta = 180^\circ - 73^\circ 18' = 106^\circ 42'.$$

Из треугольника AKC

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \beta = 90^\circ - 5^\circ 43' = 84^\circ 17'.$$

Из треугольника CND

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{1,75}{2,5} = 0,7; \quad \omega = 35^\circ; \quad \omega + \beta = 35^\circ + 5^\circ 43' = 40^\circ 43'.$$

По условию задачи требуется рассмотреть три узла, поэтому углы ψ , η и λ для решения не потребуются.

3. Вырезаем узел A , в котором сходятся два стержня 1 и 2. Определяем усилия в этих стержнях:

а) заменяем стержни усилиями S_1 и S_2 (рис. 31, в);

б) выбираем систему координат. Ось x совместим с неизвестным усилием S_1 , а ось y направим перпендикулярно оси x . Укажем углы между усилиями (или соответствующими им стержнями) и осями координат;

в) составляем уравнения равновесия:

$$1) \sum X = 0; \quad 2) \sum Y = 0.$$

Первое уравнение для узла A

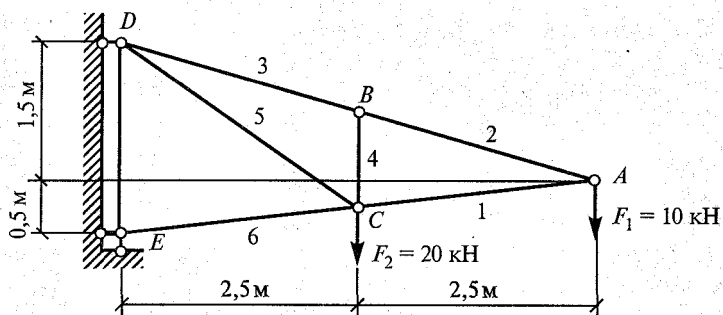
$$-S_1 - S_2 \cos 22^\circ 25' - F_1 \cos 84^\circ 17' = 0,$$

второе

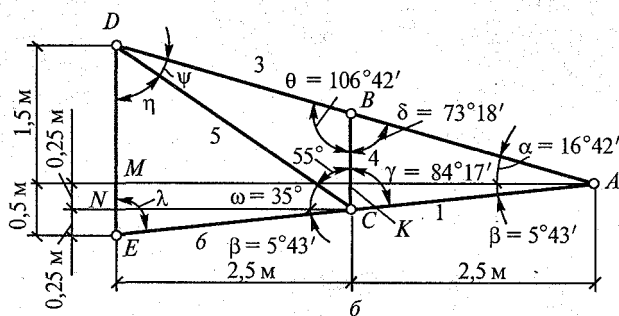
$$S_2 \cos 67^\circ 35' - F_1 \cos 5^\circ 43' = 0.$$

Из второго уравнения

$$S_2 = \frac{F_1 \cos 5^\circ 43'}{\cos 67^\circ 35'} = \frac{10 \cdot 0,995}{0,381} = 26,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



a



б

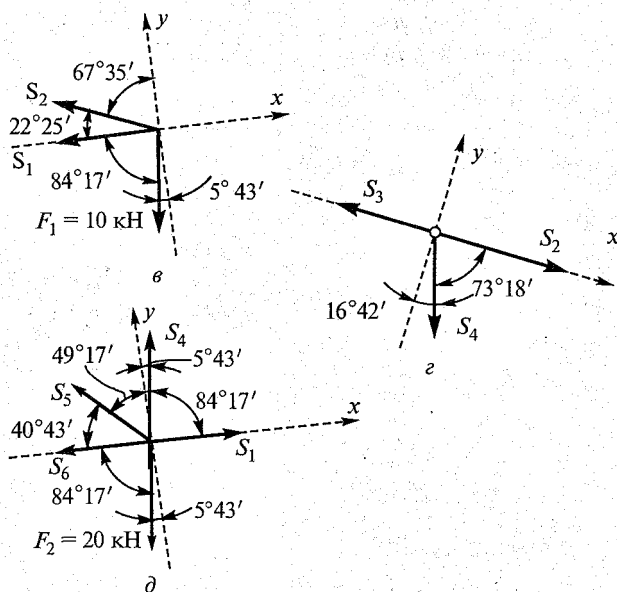


Рис. 31

Из первого уравнения

$$S_1 = -S_2 \cos 22^\circ 25' - F_1 \cos 84^\circ 17' = -26,1 \cdot 0,924 - 10 \cdot 0,0996 = -25,1 \text{ кН.}$$

Знак «плюс» свидетельствует о том, что стержень 2 растянут, а «минус» — стержень 1 сжат.

4. Рассмотрим узел В (рис. 31, з). В нем сходятся два стержня 3 и 4, усилия в которых неизвестны. Ось x совместим с неизвестным усилием S_3 . Составим уравнения равновесия:

$$\sum X = -S_3 + S_2 + S_4 \cos 73^\circ 18' = 0;$$

$$\sum Y = -S_4 \cos 16^\circ 42' = 0.$$

Из второго уравнения видно, что $S_4 = 0$, так как $\cos 16^\circ 42'$ не может быть равен нулю. С правилами определения стержней, усилия в которых равны нулю (нулевые стержни), без составления уравнений можно ознакомиться в работе [4, с. 345]. Из первого уравнения

$$S_3 = S_2 = 26,1 \text{ кН.}$$

5. Рассмотрим узел С. В нем сходятся стержни 5 и 6, усилия в которых неизвестны. Ось x совместим с неизвестным усилием S_6 и укажем углы между усилиями и осями координат (рис. 31, д). Составим уравнения равновесия. Уравнения для узла С примут вид:

первое

$$\sum X = -S_6 + S_1 - S_5 \cos 40^\circ 43' + S_4 \cos 84^\circ 17' - F_2 \cos 84^\circ 17' = 0;$$

второе

$$\sum Y = S_5 \cos 49^\circ 17' + S_4 \cos 5^\circ 43' - F_2 \cos 5^\circ 43' = 0.$$

Помня, что $S_4 = 0$, из второго уравнения

$$S_5 = \frac{F_2 \cos 5^\circ 43'}{\cos 49^\circ 17'} = \frac{20 \cdot 0,995}{0,652} = 30,5 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения

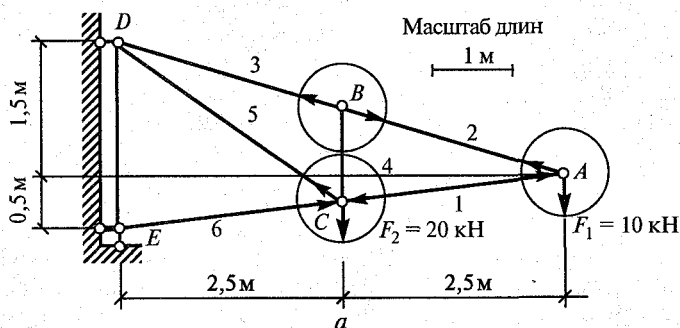
$$S_6 = S_1 - S_5 \cos 40^\circ 43' - F_2 \cos 84^\circ 17' = -25,1 - 30,5 \cdot 0,758 - 20 \cdot 0,0996 = -50,2 \text{ кН.}$$

Графическое решение

1. Вычерчиваем ферму в масштабе, например 1:50 (рис. 32, а).
2. Выбираем масштаб сил, например в 1 см 10 кН.
3. Мысленно вырезаем узел А. Определим усилия в стержнях 1 и 2:

а) обозначим усилия в стержнях S_1 и S_2 ;

б) из произвольной точки a проводим отрезок ab , параллельный и равный в принятом масштабе силе F_1 . Через точки a и b проводим линии, параллельные стержням 1 и 2 до взаимного пересечения (рис. 32, б). Полученные отрезки bc и ac , измеренные



Масштаб сил

10 кН

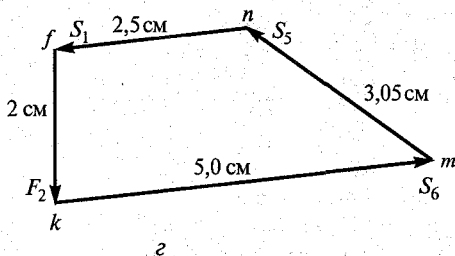
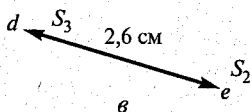
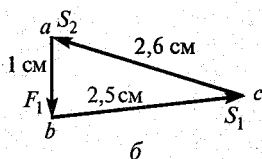


Рис. 32

в масштабе сил, соответствуют усилиям S_1 и S_2 в стержнях 1 и 2. Длина отрезка $bc = 2,5$ см, следовательно, $S_1 = 2,5 \cdot 10 = 25$ кН. Длина отрезка $ac = 2,6$ см, $S_2 = 2,6 \cdot 10 = 26$ кН;

в) определим знаки усилий. Направление силы F_1 известно — она направлена вниз. Поставим стрелки на отрезках bc и ca так, чтобы они были направлены в одну сторону. Перенесем направление усилия S_1 на стержень 1 (см. рис. 32, а), оно направлено к узлу, т.е. стержень 1 сжат. Усилие S_2 при таком переносе направлено от узла, т.е. стержень 2 растянут.

4. *Вырезаем узел В.* Из точки d (рис. 32, в) проведем известное усилие S_2 . Через концы отрезка (точки d и e) проводим линии, параллельные стержням 3 и 4. Из построения следует, что $S_4 = 0$, а $S_3 = S_2 = 26$ кН.

5. *Вырезаем узел С.* Проведем линии, параллельные уже известным усилию S_1 и силе F_2 в принятом масштабе (рис. 32, г). Через точки k и n проводим линии, параллельные стержням 5 и 6, до их пересечения в точке m . Отрезки km и mn , измеренные в масштабе сил, дают величины усилий $S_5 = 3,05 \cdot 10 = 30,5$ кН и $S_6 = 5 \cdot 10 = 50$ кН. Определим знаки усилий. Все стрелки на силовом многоугольнике $nfkm$ расставим против часовой стрелки. Это определено направлением усилия S_1 и силы F_2 . Перенесем направление усилия S_5 на стержень 5 в узле С; оно будет направлено от узла, т.е. стержень 5 растянут. Перенесем направление усилия S_6 на узел С, оно будет направлено к узлу, т.е. стержень 6 сжат.

Составим сравнительную таблицу усилий, найденных аналитическим и графическим способами (табл. 2).

Таблица 2

Усилия (кН) в стержнях фермы

Усилие	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
Аналитическое решение	-25,1	26,1	26,1	0	30,5	-50,2
Графическое решение	-25	26	26	0	30,5	-50

Очевидно, что аналитический способ более точен.

Задание для расчетно-графической работы 1. Определить усилия в стержнях консольной фермы аналитическим и графическим способами по данным одного из вариантов, приведенных на рис. 33. В заданиях с нечетными вариантами рассмотреть три узла, а с четными — четыре, начиная от свободного конца.

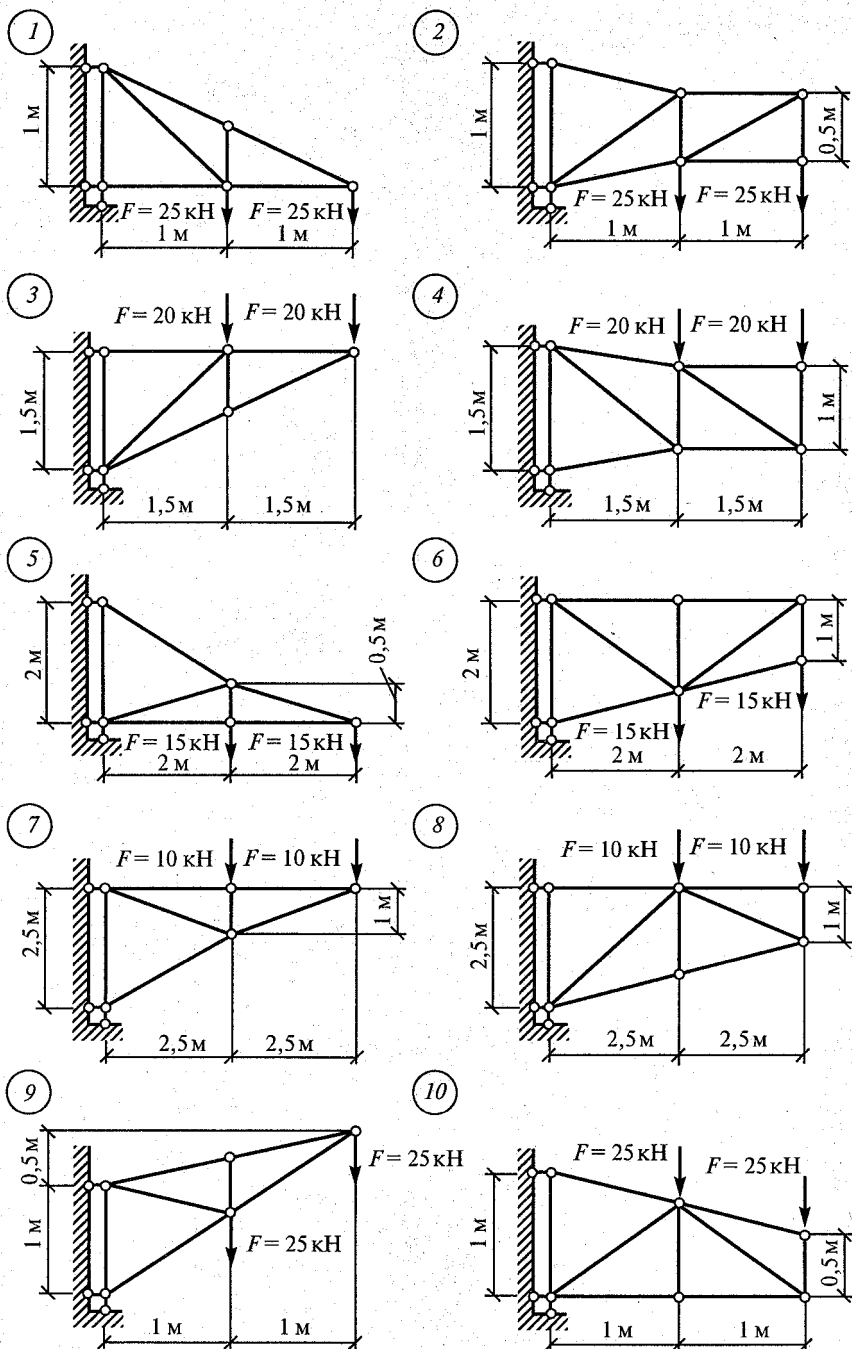


Рис. 33

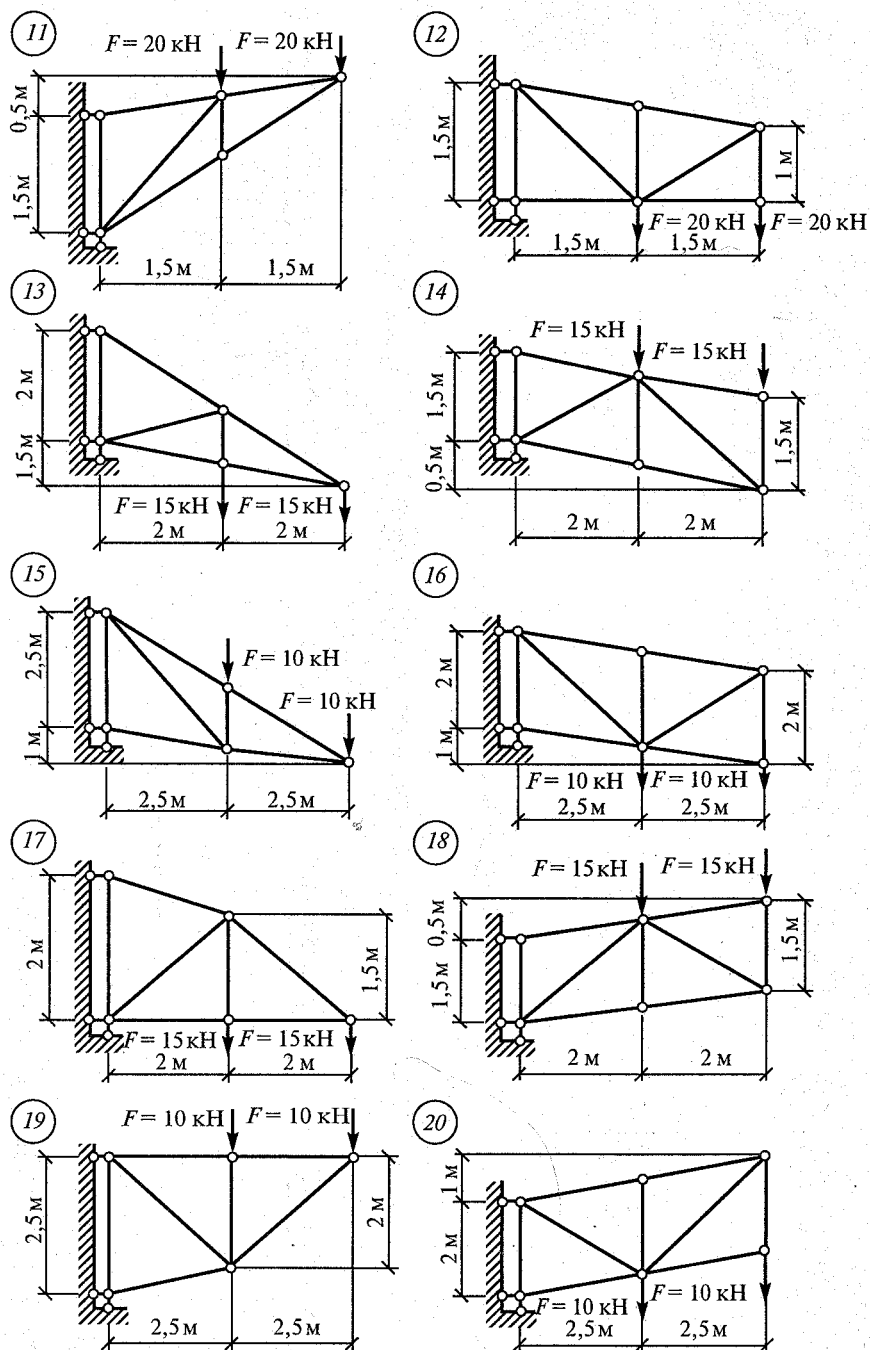


Рис. 33. Продолжение

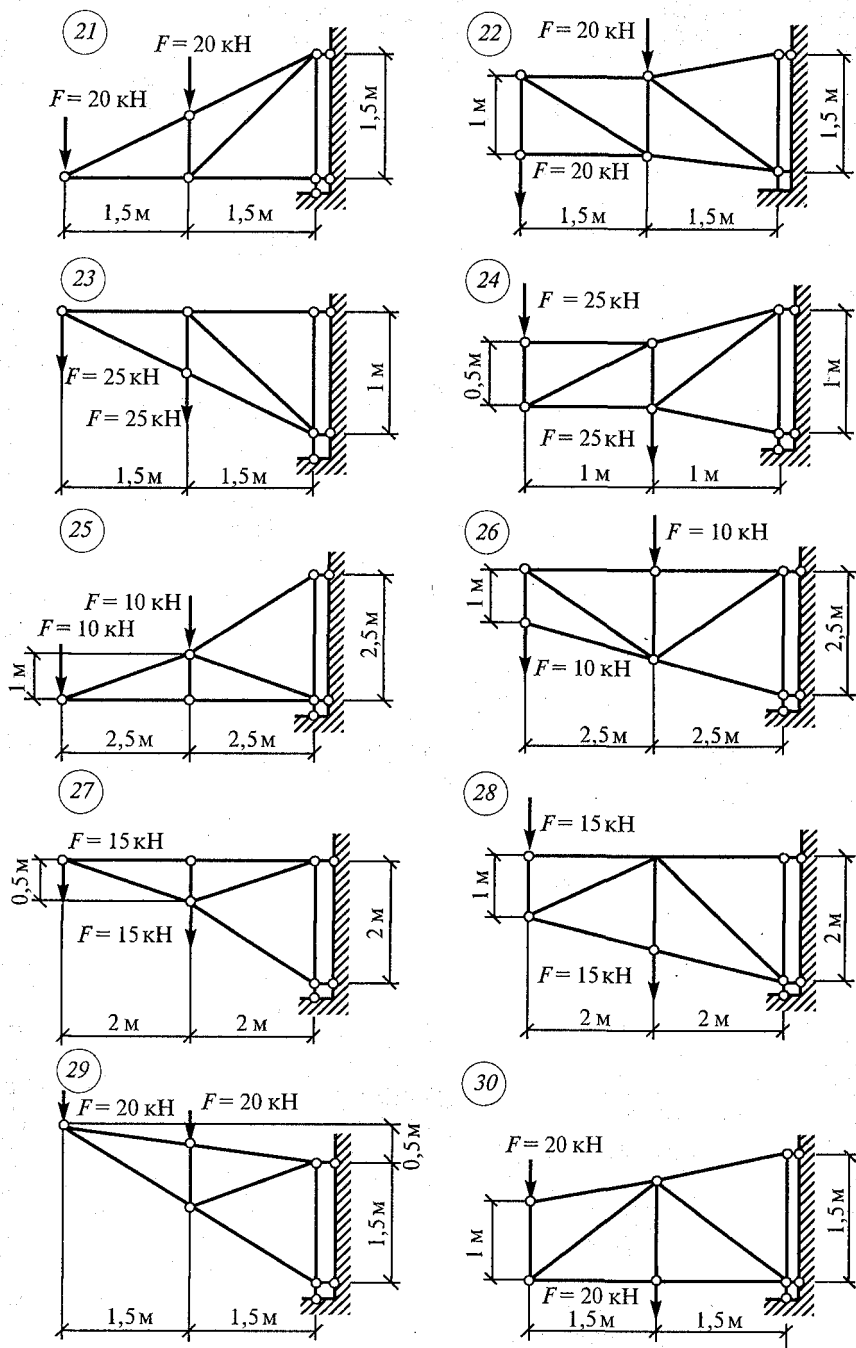


Рис. 33. Продолжение

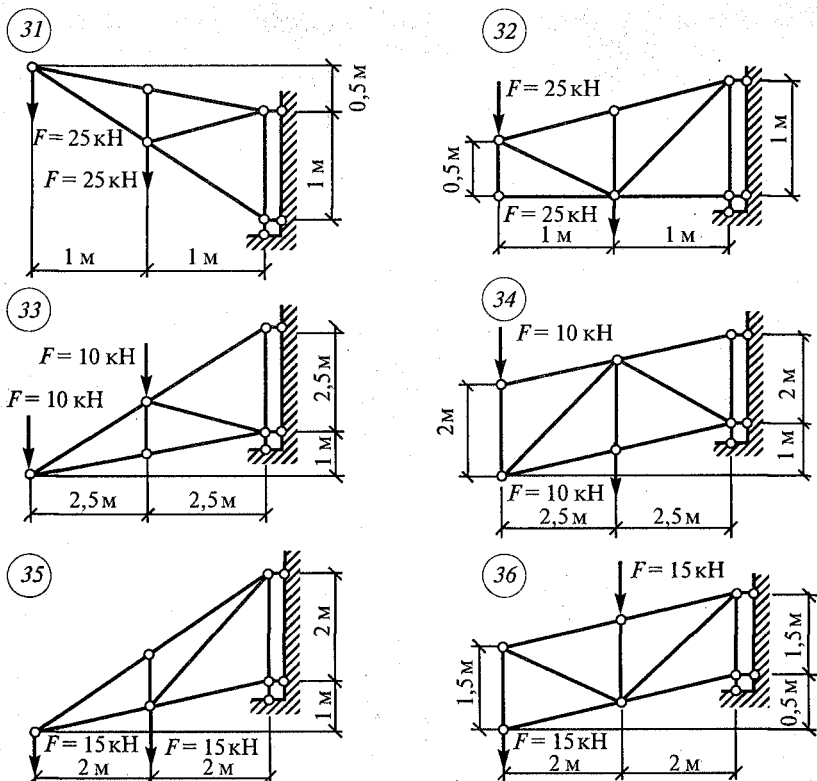


Рис. 33. Окончание

4.2. Определение опорных реакций балки на двух опорах

К решению задачи рекомендуется приступить после выполнения самостоятельной работы 2.

1. Балки освобождают от опор и их действие заменяют опорными реакциями.

В задачах данной работы балки прикреплены к основанию с помощью шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опор. В шарнирно-неподвижной опоре в общем случае действия нагрузки возникают две реакции: горизонтальная H_A и вертикальная V_A . В шарнирно-подвижной опоре при любой нагрузке возникает одна реакция — по направлению опорного стержня V_B (в задачах самостоятельной работы 2 реакция такой опоры вертикальна, так как вертикален опорный стержень). Подробнее об опорах можно узнать в работе [4, с. 15].

2. Определяют плечо силы, не перпендикулярное оси балки. Плечо силы определяется относительно обеих опор. Для этого из каж-

дой точки опоры опускают на силу или линию ее действия перпендикуляры — они являются плечами силы относительно левой и правой опор. Рассматривая прямоугольный треугольник, образованный осью балки, линией действия силы и перпендикуляром, находят величину каждого плеча. Если наклонных сил несколько, то для каждой находят плечо относительно обеих опор.

3. Составляют уравнения равновесия:

$$1) \sum M_A = 0; \quad 2) \sum M_B = 0; \quad 3) \sum X = 0.$$

Решая уравнения, находят неизвестные реакции V_A , V_B и H_A .

4. Выполняют проверку решения по уравнению $\sum Y = 0$.

Пример 23. Определить опорные реакции балки, показанной на рис. 34, а.

Решение. 1. Освобождаемся от опор и заменяем их действие реакциями опор. Левая опора — шарнирно-неподвижная, в ней возникают две реакции V_A и H_A . Правая опора — шарнирно-подвижная, в ней возникает одна реакция — вертикальная V_B (рис. 34, б).

2. Определим плечо силы F_1 относительно опоры A . Для этого из точки A опустим перпендикуляр на линию действия силы F_1 и из треугольника ADE определим плечо силы F_1 :

$$h_A = (a + e) \cos 40^\circ = (1,5 + 2,0) \cos 40^\circ = 3,5 \cdot 0,766 = 2,681 \text{ м.}$$

Плечо силы F_1 относительно опоры B определим из треугольника BDC :

$$h_B = c \cos 40^\circ = 2,5 \cdot 0,766 = 1,915 \text{ м.}$$

3. Составим уравнения равновесия. Первое уравнение

$$\sum M_A = -M + F_1 h_A + q_2(c + d) \left(a + e + \frac{c + d}{2} \right) - V_B(a + e + c) - F_2(a + e + c + d) = 0$$

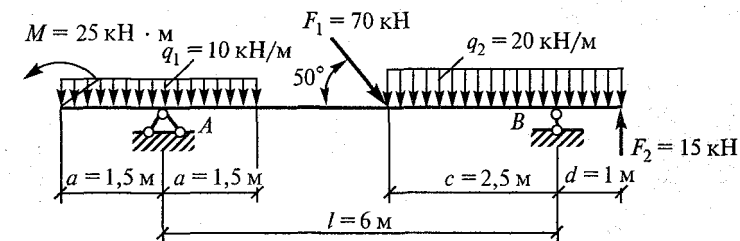
или

$$-25 + 70 \cdot 2,68 + 20 \cdot 3,5 \cdot 5,25 - V_B \cdot 6 - 15 \cdot 7 = 0,$$

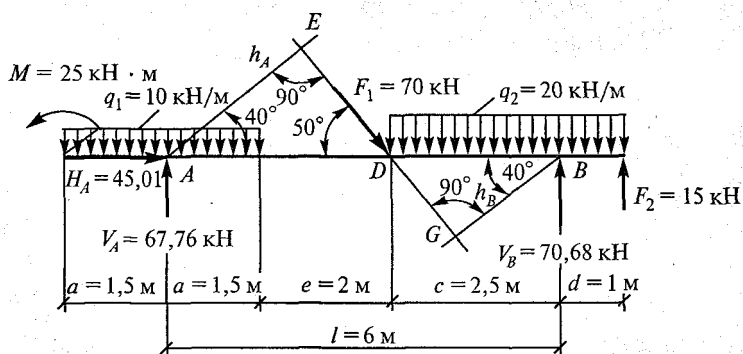
$$\begin{aligned} \text{откуда } V_B &= \frac{-25 + 70 \cdot 2,68 + 20 \cdot 3,5 \cdot 5,25 - 15 \cdot 7}{6} = \\ &= \frac{427,6}{6} = 70,68 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Второе уравнение

$$\sum M_B = -M + V_A(a + e + c) - q_1(a + a)(a + e + c) - F_1 h_B -$$



a



б

Рис. 34

$$-q_2(c+d)\left(\frac{c+d}{2}-d\right)-F_2d=0$$

или

$$-25 + V_A \cdot 6 - 10 \cdot 3 \cdot 6 - 70 \cdot 1,915 - 20 \cdot 3,5 \cdot 0,75 - 15 \cdot 7 = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{откуда } V_A &= \frac{25 + 10 \cdot 3 \cdot 6 + 70 \cdot 1,915 + 20 \cdot 3,5 \cdot 0,75 + 15 \cdot 1}{6} = \\ &= \frac{408,3}{6} = 67,76 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Третье уравнение

$$H_A + F_1 \cos 50^\circ = 0,$$

$$\text{откуда } H_A = -F_1 \cos 50^\circ = -70 \cdot 0,643 = -45,01 \text{ кН.}$$

Знак «минус» означает, что H_A направлена в сторону, противоположную показанной на рис. 34, б.

4. Выполним проверку:

$$\sum Y = V_A - q_1 2a - F_1 \cos 40^\circ - q_2(c + d) + V_B + F_2 = 0$$

или

$$67,76 - 10 \cdot 3 - 70 \cdot 0,766 - 20 \cdot 3,5 + 70,68 + 15 = 0;$$

$$153,62 - 153,62 = 0.$$

Ответ: $V_A = 67,76$ кН; $V_B = 70,68$ кН; $H_A = -45,01$ кН.

Задание для расчетно-графической работы 2. Определить опорные реакции балки на двух опорах по одному из вариантов, показанных на рис. 35.

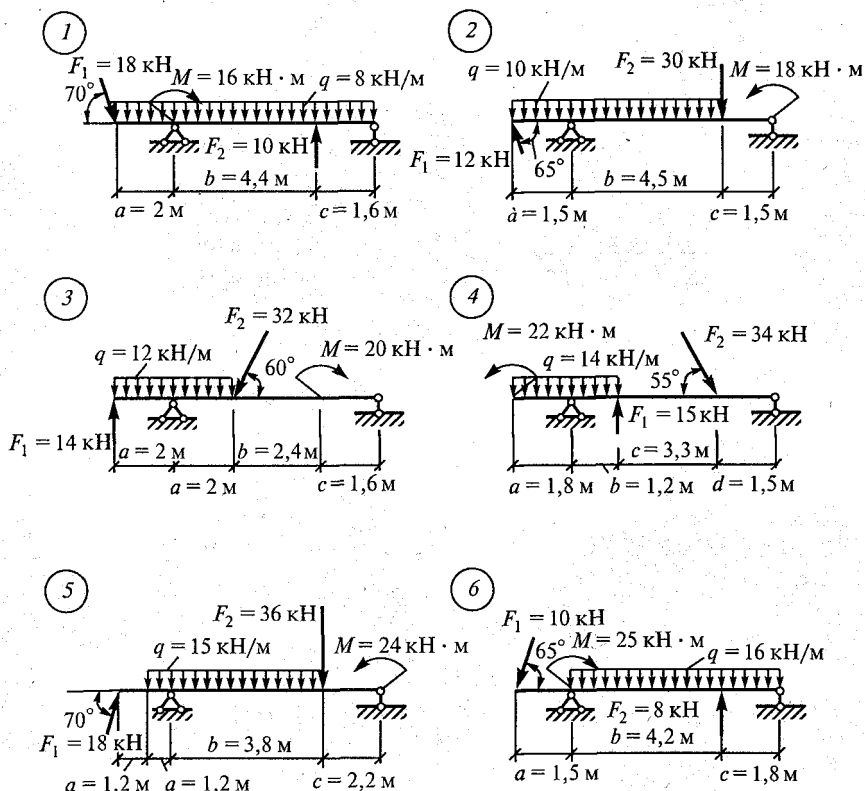
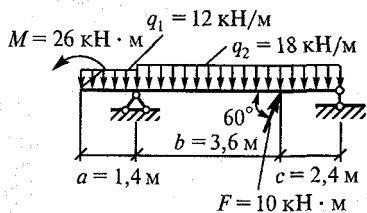
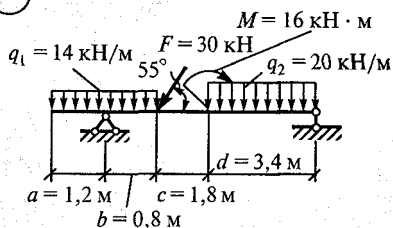


Рис. 35

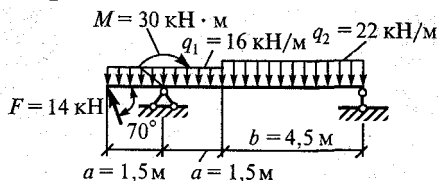
7



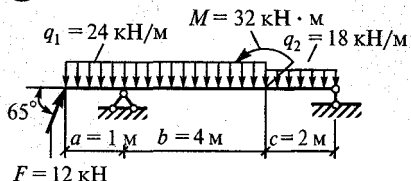
8



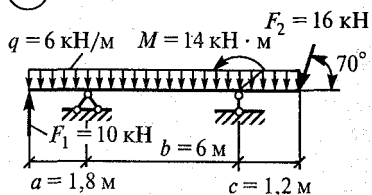
9



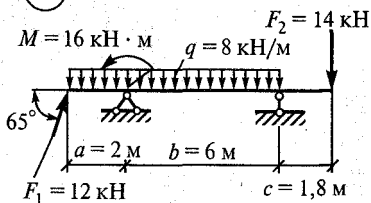
10



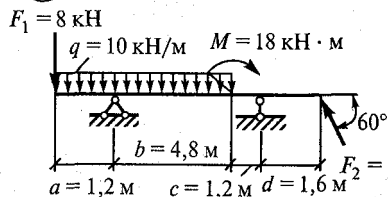
11



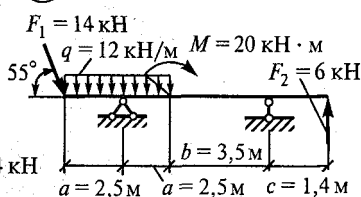
12



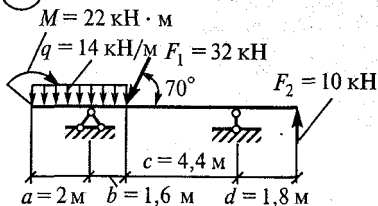
13



14



15



16

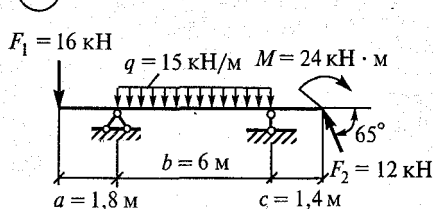
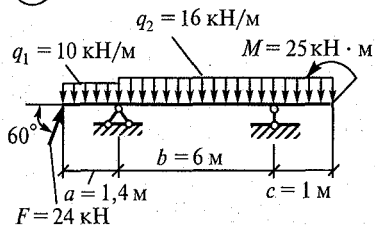
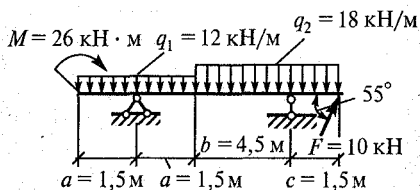


Рис. 35. Продолжение

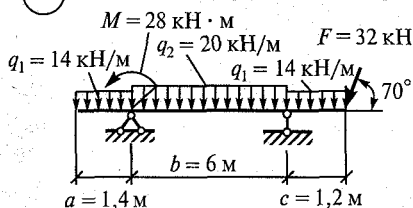
17



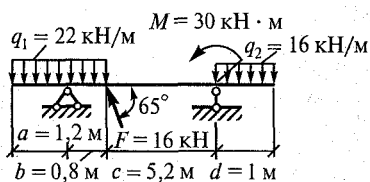
18



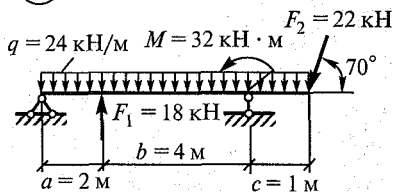
19



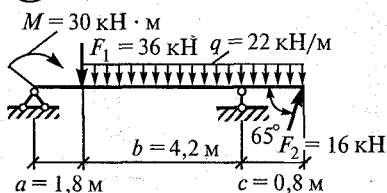
20



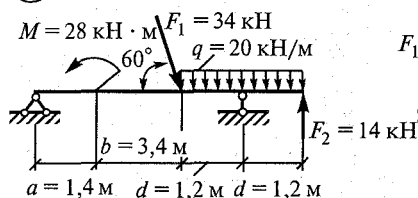
21



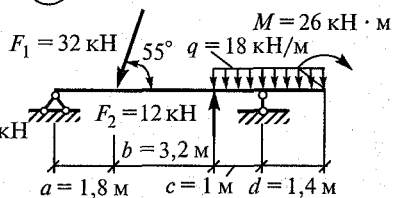
22



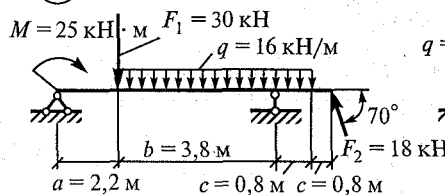
23



24



25



26

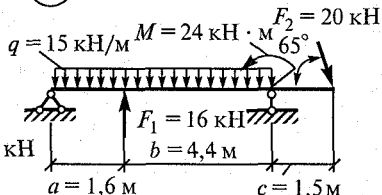


Рис. 35. Продолжение

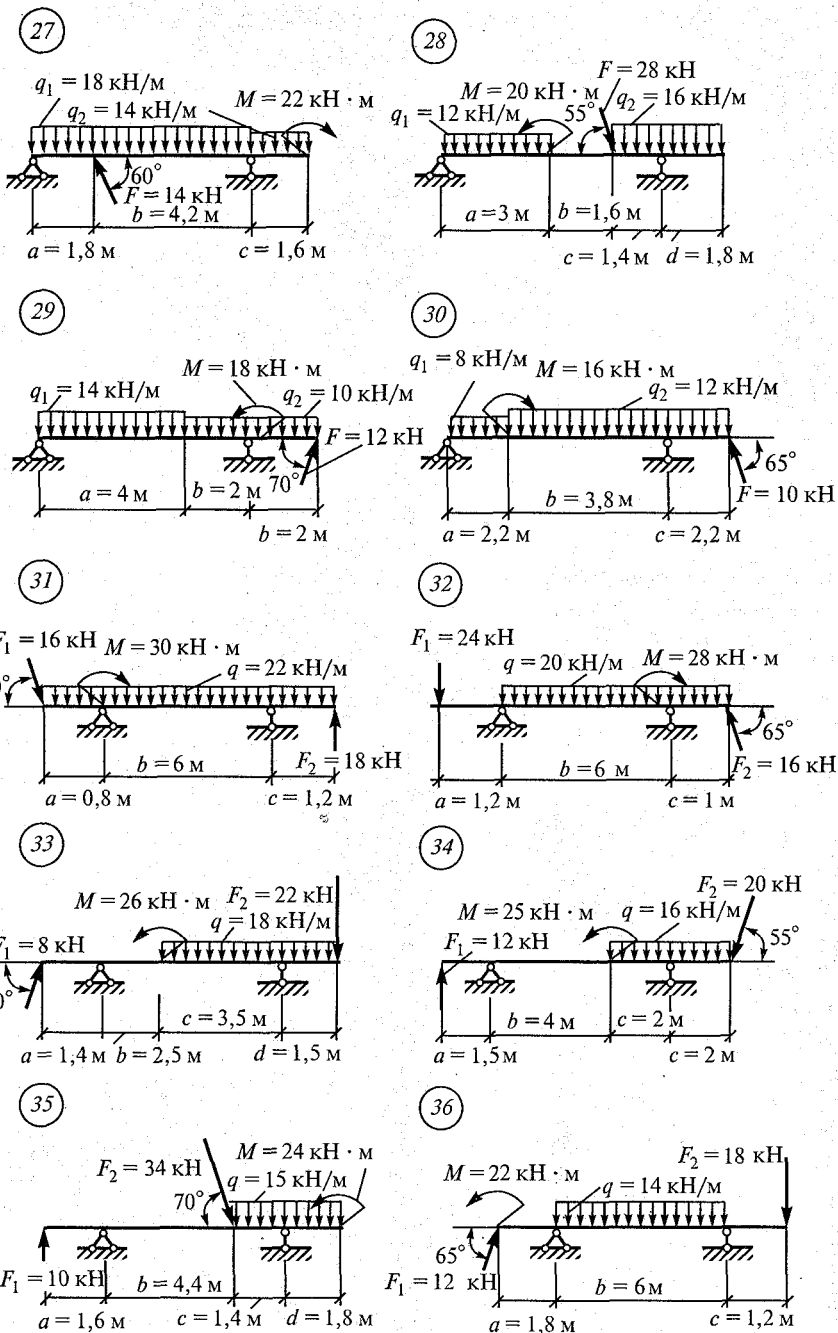


Рис. 35. Окончание

4.3. Определение положения центра тяжести сечения

К решению задачи рекомендуется приступить после выполнения самостоятельной работы 3. Порядок решения задачи остается таким же.

Пример 24. Определить координаты центра тяжести сечения, составленного из профилей проката, как показано на рис. 36, а. Сечение состоит из двутавровой балки № 33, швеллера № 27, двух уголков $90 \times 56 \times 6$ мм и листа сечением 12×180 мм.

Решение. 1. Разобьем сечение в соответствии с профилями проката и обозначим их 1, 2, 3, 4, 5.

2. Пользуясь табл. 2, 3 и 4 прил. I, укажем центры тяжести каждого профиля и обозначим их C_1, C_2, C_3, C_4 и C_5 .

3. Выберем систему осей координат. Ось y совместим с осью симметрии, а ось x направим перпендикулярно оси y и проведем через центр тяжести двутавровой балки.

4. Выпишем формулы для определения координат центра тяжести сечения:

$x_C = 0$, так как ось y совпадает с осью симметрии;

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}.$$

Учитывая, что $A_2 = A_3$, а также, что $y_2 = y_3$, получим:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + 2A_2 y_2 + A_4 y_4 + A_5 y_5}{A_1 + 2A_2 + A_4 + A_5}.$$

Определим площади и координаты центров тяжести отдельных профилей проката, используя сечение и табл. 2, 3 и 4 прил. I:

$$A_1 = 35,2 \text{ см}^2; A_2 = A_3 = 8,54 \text{ см}^2; A_4 = 53,8 \text{ см}^2;$$

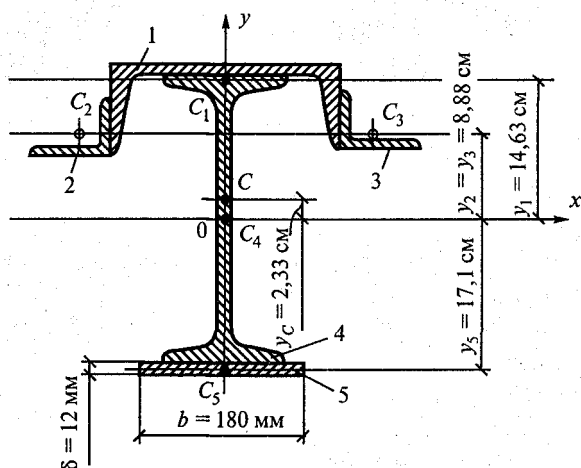
$$A_5 = 1,2 \cdot 180 = 21,6 \text{ см}^2;$$

$$y_1 = h_{\text{дв}}/2 + d_{\text{шв}} - z_{0(\text{шв})} = \frac{33}{2} + 0,6 - 2,47 = 14,63 \text{ см};$$

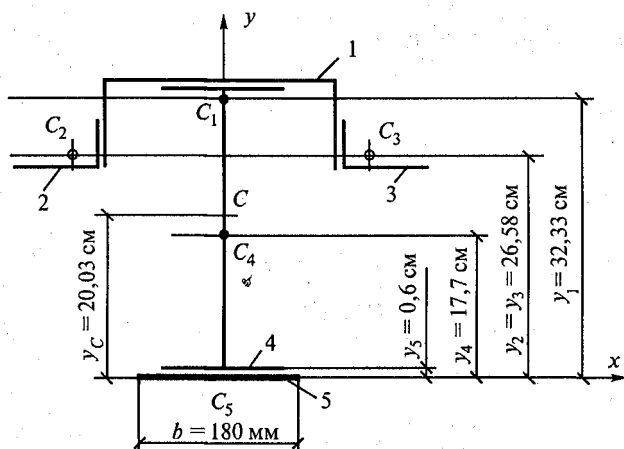
$$y_2 = y_3 = h_{\text{дв}}/2 + d_{\text{шв}} - b_{\text{шв}} + x_{0(\text{ут})} = \frac{33}{2} + 0,6 - 9,5 + 1,28 = 8,88 \text{ см};$$

$y_4 = 0$, так как ось x проходит через центр тяжести двутавра;

$$y_5 = -(h_{\text{дв}}/2 + \delta_{\text{листа}}/2) = -\left(\frac{33}{2} + \frac{1,2}{2}\right) = -17,1 \text{ см}.$$



a



б

Рис. 36

Подставим полученные значения в формулу для определения y_C :

$$y_C = \frac{35,2 \cdot 14,63 + 2 \cdot 8,54 \cdot 8,88 + 53,8 \cdot 0 + 21,6(-17,1)}{35,2 + 2 \cdot 8,54 + 53,8 + 21,6} =$$

$$= \frac{297,3}{127,7} = 2,33 \text{ см.}$$

Укажем положение центра тяжести сечения C (см. рис. 36, а).

5. *Проверка решения.* Проведем ось x по нижней грани листа (рис. 36, б). Площади профилей останутся теми же, а координаты центров тяжести изменятся:

$$y_1 = \delta_{\text{листа}} + h_{\text{дв}} + d_{\text{шв}} - z_{0(\text{шв})} = 1,2 + 33 + 0,6 - 2,47 = 32,33 \text{ см};$$

$$y_2 = \delta_{\text{листа}} + h_{\text{дв}} + d_{\text{шв}} - b_{\text{шв}} - x_{0(\text{уг})} = 1,2 + 33 + 0,6 - 9,5 + 1,28 = 26,58 \text{ см};$$

$$y_2 = y_3 = 26,58 \text{ см};$$

$$y_4 = \delta_{\text{листа}} + h_{\text{дв}}/2 = 1,2 + \frac{33}{2} = 1,2 + 16,5 = 17,7 \text{ см};$$

$$y_5 = \delta_{\text{листа}}/2 = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ см}.$$

Определим положение центра тяжести в новой системе координат

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{3,25 \cdot 32,33 + 2 \cdot 8,54 \cdot 26,58 + 53,8 \cdot 17,7 + 21,6 \cdot 0,6}{35,2 + 2 \cdot 8,54 + 53,8 + 21,6} = \\ &= \frac{2557}{127,7} = 20,03 \text{ см}. \end{aligned}$$

Разность между координатами центра тяжести должна быть равна расстоянию между осями x в первом и во втором решении:

$$20,3 - 2,33 = \frac{33}{2} + 1,2,$$

откуда $17,7 \text{ см} = 17,7 \text{ см}$.

Ответ: $y_C = 2,33 \text{ см}$, если ось x проходит через C_4 , и $y_C = 20,03 \text{ см}$, если ось x проходит по нижней грани.

Пример 25. Определить положение центра тяжести сечения, состоящего из простых геометрических фигур (рис. 37, а).

Решение. 1. *Разобьем сечение на пять фигур:* два прямоугольника I и II, два треугольника III и IV и круг V.

2. *Укажем центры тяжести простых фигур C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 (рис. 37, б).*

3. *Выберем систему координат.* Ось x проведем через центр тяжести C_2 прямоугольника, а ось y совместим с осью симметрии сечения.

4. *Определим координаты центра тяжести сечения:*

$x_C = 0$, так как ось y совпадает с осью симметрии;

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + 2A_3 y_3 - A_5 y_5}{A_1 + A_2 + 2A_3 - A_5}.$$

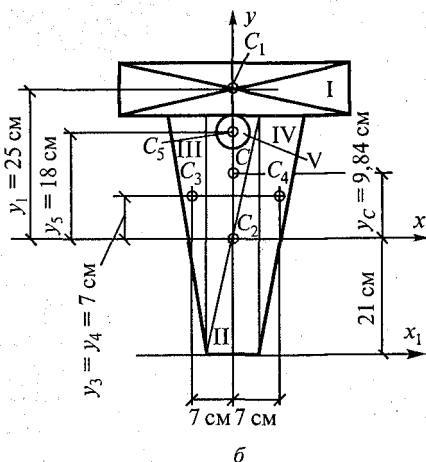
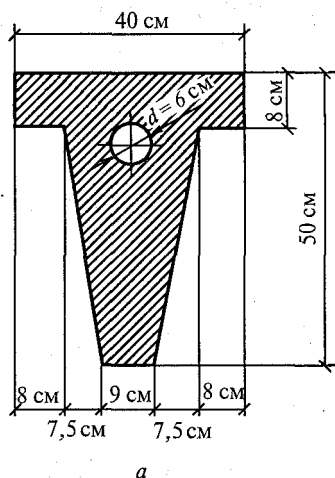


Рис. 37

Используя прил. II, определим площади фигур и координаты центров тяжести:

$$A_1 = 40 \cdot 8 = 320 \text{ см}^2; \quad y_1 = \frac{42}{2} + \frac{8}{2} = 25 \text{ см};$$

$$A_2 = 9 \cdot 42 = 378 \text{ см}^2; \quad y_2 = 0;$$

$$A_3 = A_4 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 42 = 157,5 \text{ см}^2; \quad y_3 = y_4 = \frac{2}{3} \cdot 42 - \frac{1}{2} \cdot 42 = 28 - 21 = 7 \text{ см};$$

$$A_5 = \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} = 28,3 \text{ см}^2; \quad y_5 = 21 - 3 = 18 \text{ см}.$$

Подставим числовые значения в формулу

$$y_c = \frac{320 \cdot 25 + 378 \cdot 0 + 2 \cdot 157,5 \cdot 7 - 28,3 \cdot 18}{320 + 378 + 2 \cdot 157,5 - 28,3} = \frac{9696 \text{ см}^3}{984 \text{ см}^2} = 9,84 \text{ см}.$$

Для проверки решения ось x_1 можно провести по нижней грани сечения. В этом случае $y_c = 30,84 \text{ см}$. Поскольку $30,84 - 21 = 9,84 \text{ см}$, то решение верно.

Ответ: $y_c = 9,84 \text{ см}$, если ось x проходит через центр тяжести C_2 .

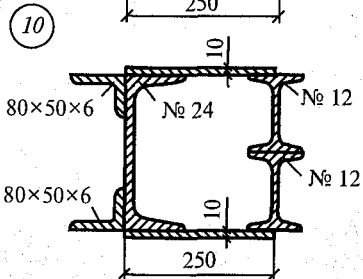
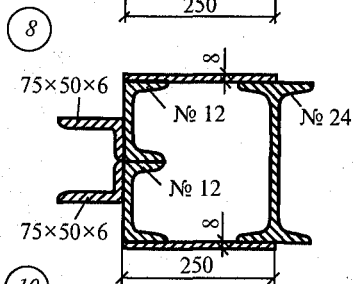
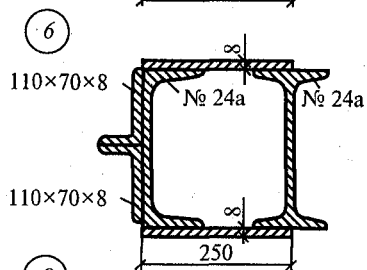
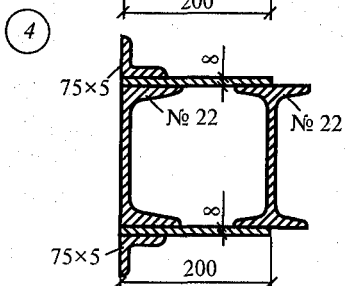
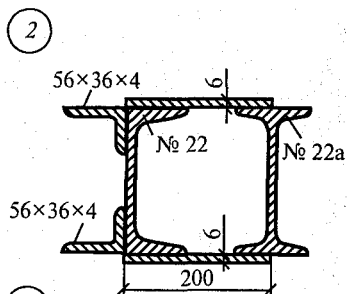
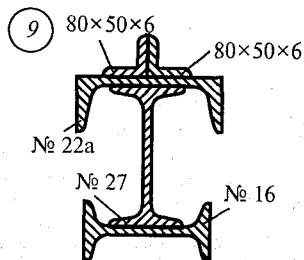
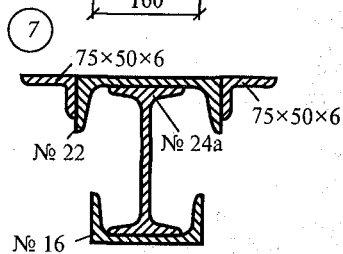
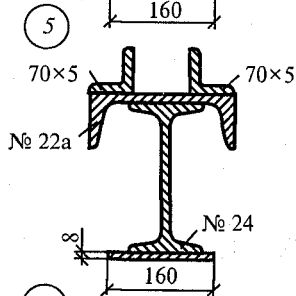
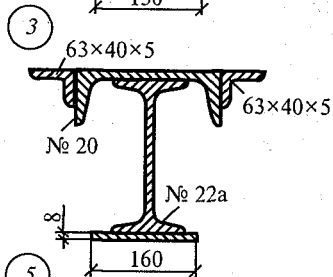
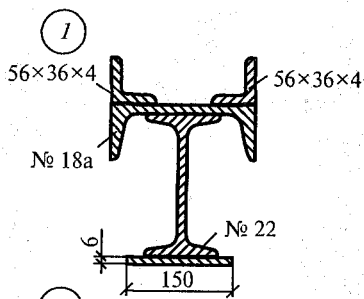


Рис. 38

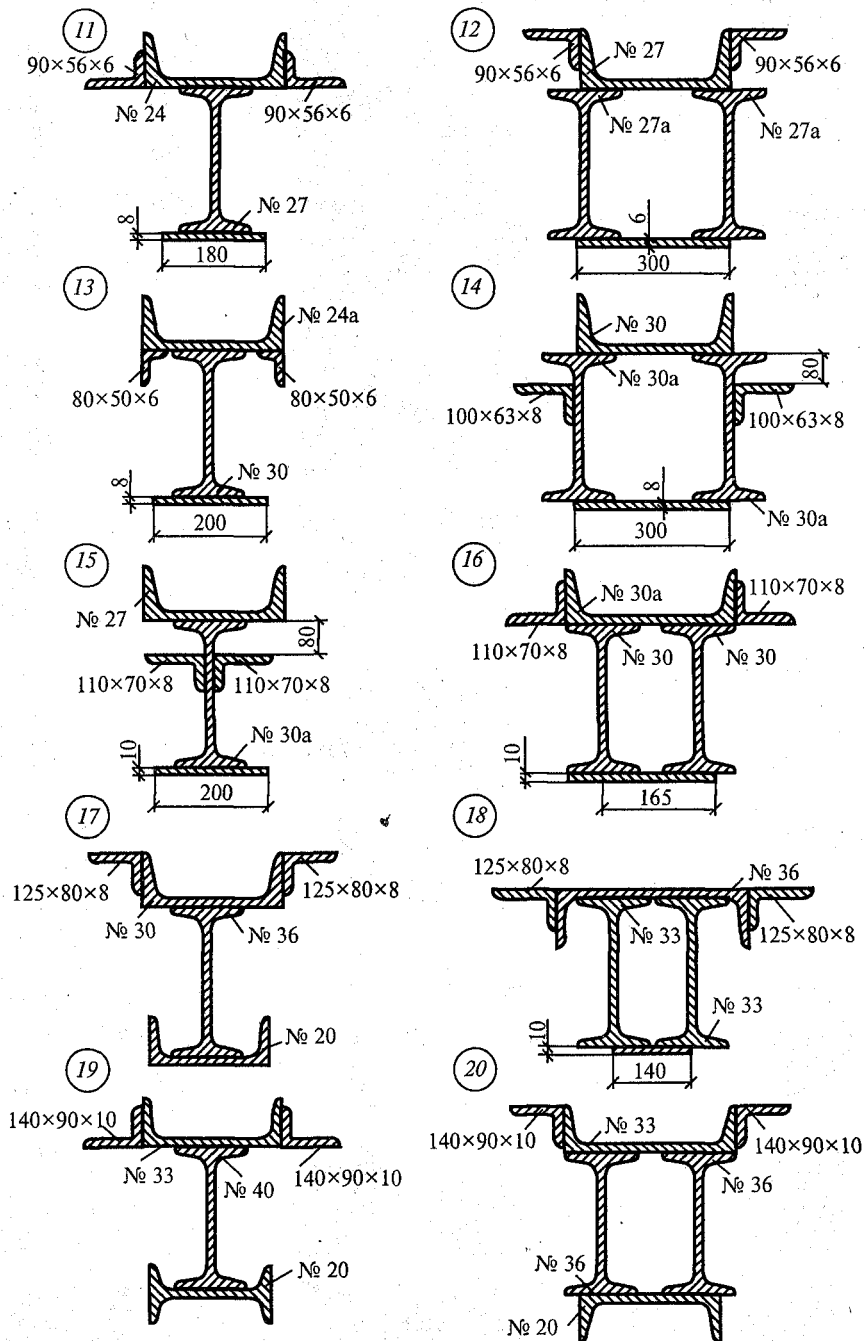


Рис. 38. Продолжение

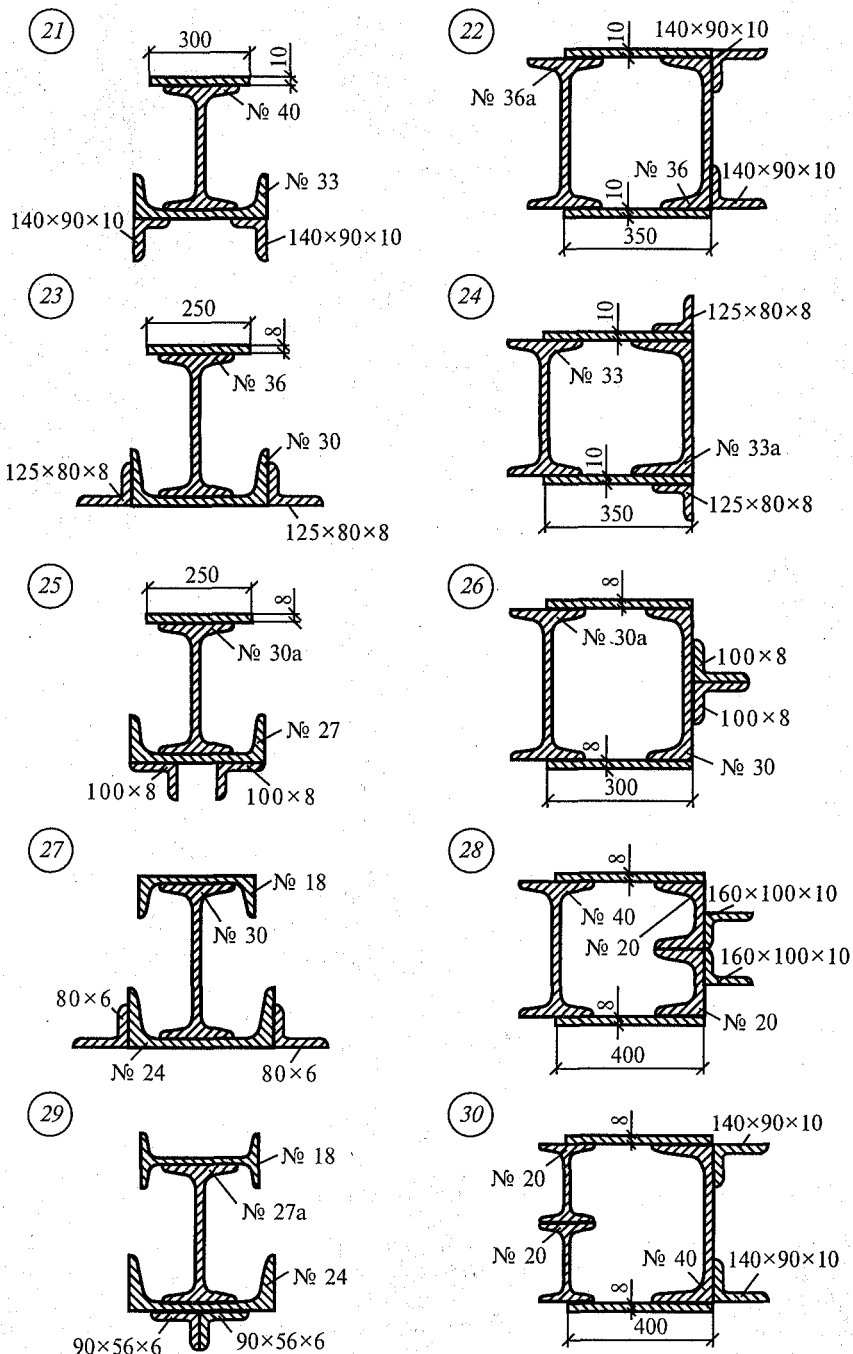


Рис. 38. Продолжение

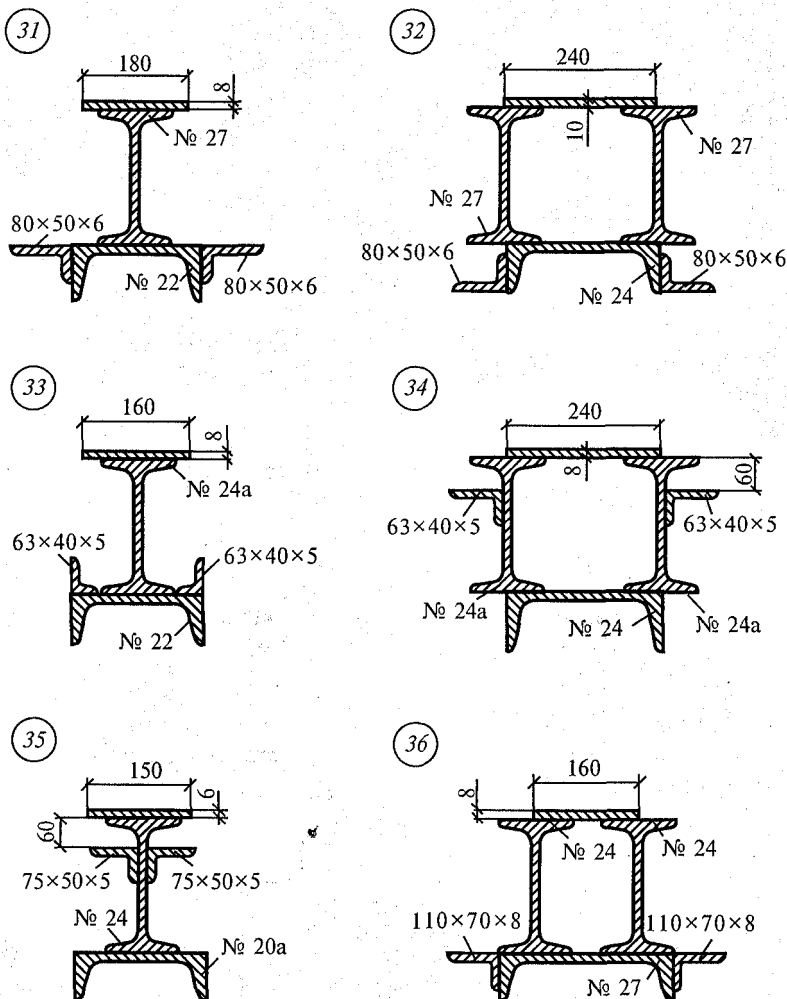


Рис. 38. Окончание

Задание для расчетно-графической работы 3.

Задача 1. Определить положение центра тяжести сечения, состоящего из профилей проката, по данным одного из вариантов, показанных на рис. 38.

Задача 2. Определить положение центра тяжести сечения, состоящего из простых геометрических фигур, по данным одного из вариантов, показанных на рис. 39.

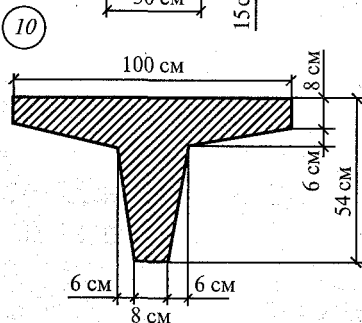
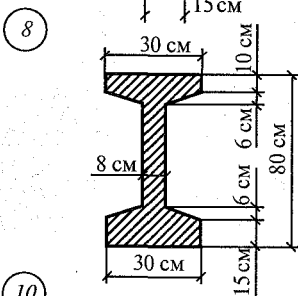
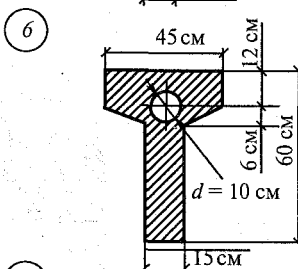
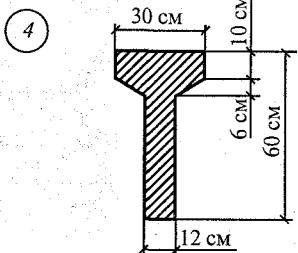
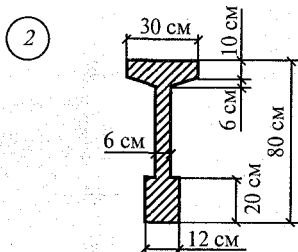
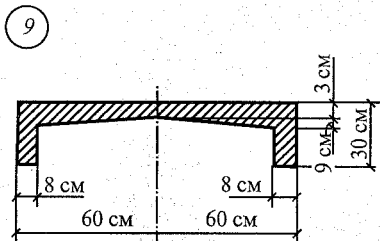
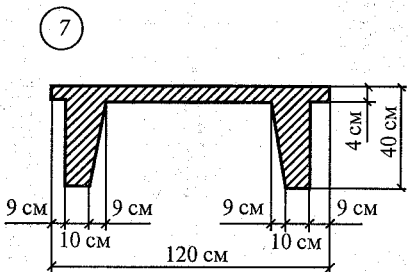
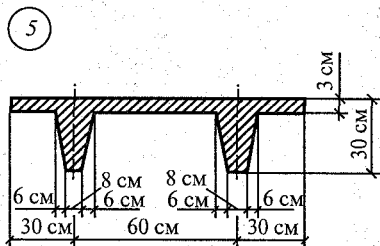
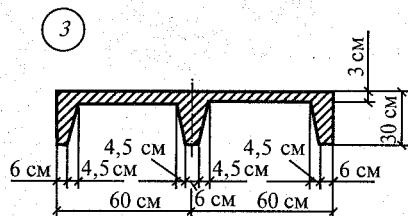
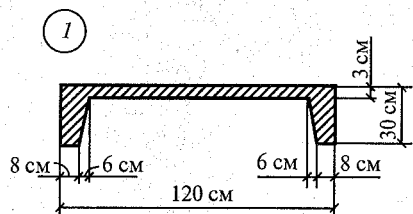


Рис. 39

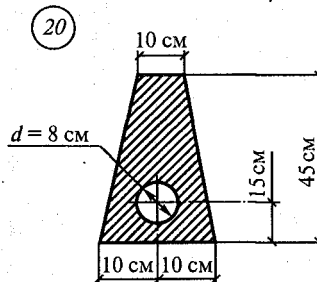
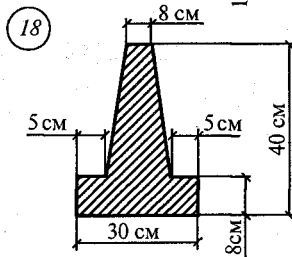
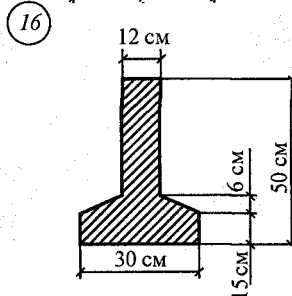
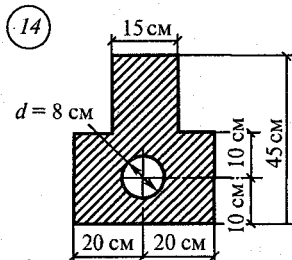
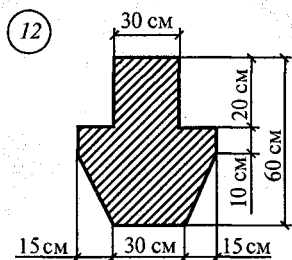
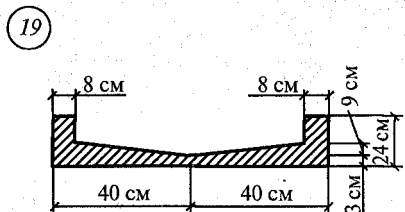
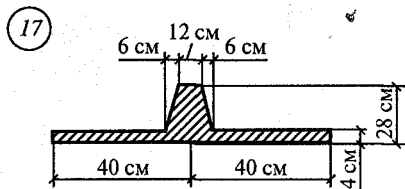
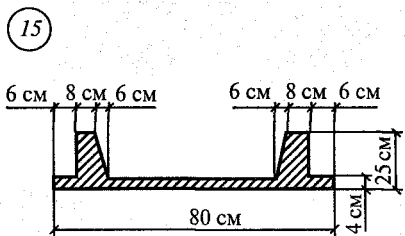
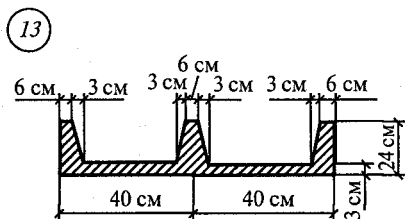
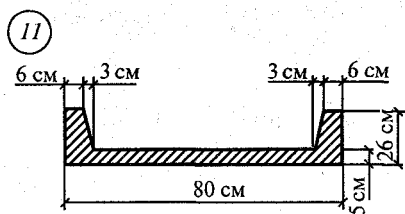


Рис. 39. Продолжение

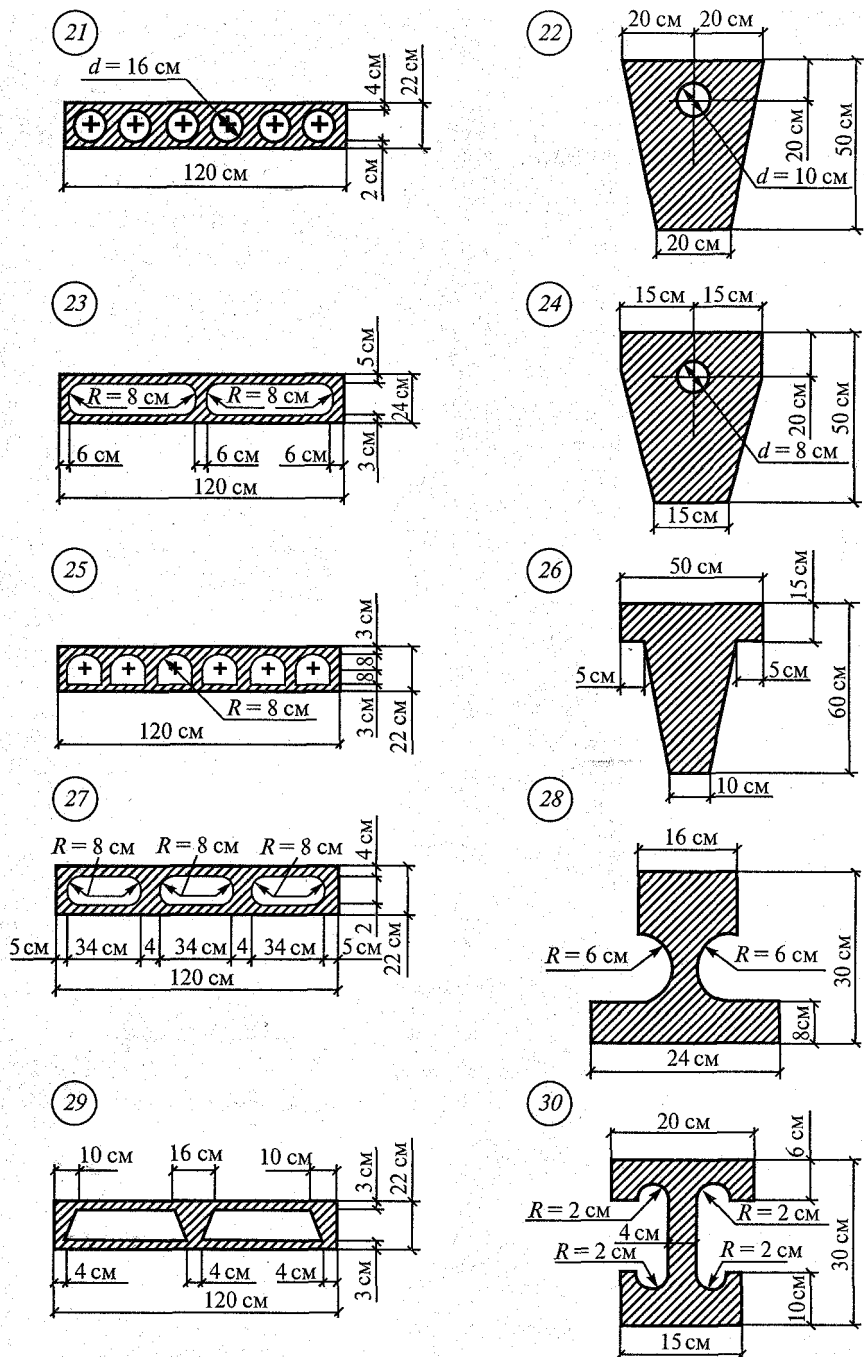


Рис. 39. Продолжение

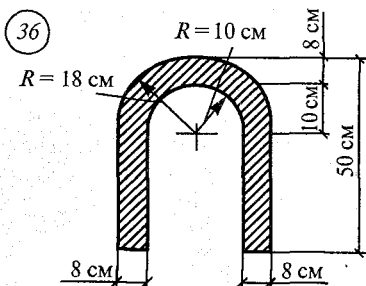
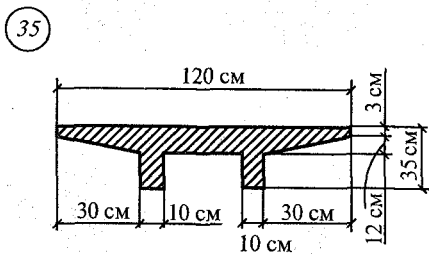
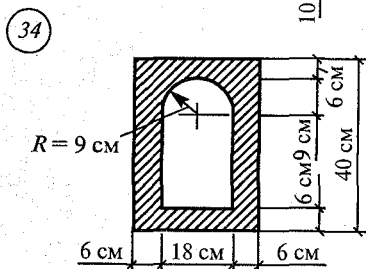
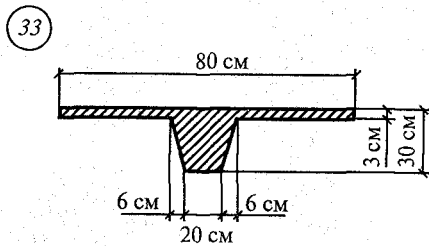
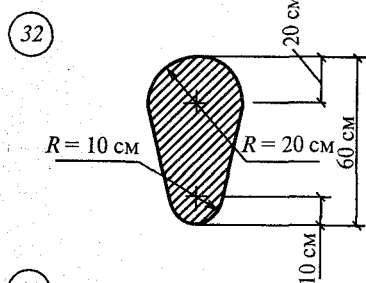
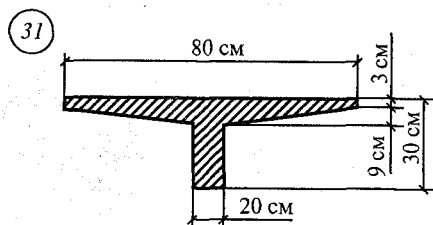


Рис. 39. Окончание

ГЛАВА 5

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

5.1. Определение усилий в стержнях статически неопределимой системы

1. Мысленно отбрасывают стержни и заменяют их усилиями в стержнях. Усилия обозначают N_1 и N_2 .

2. Устанавливают степень статической неопределимости системы. Под действием нагрузки или других воздействий в системе возникнут три неизвестных: V_A , N_1 и N_2 .

Для системы параллельных сил можно составить два независимых уравнения равновесия, например уравнение моментов относительно точек A и B . Таким образом, при трех неизвестных имеем два уравнения. Для решения не хватает одного уравнения. Такая задача называется *однораз статически неопределимой*. По условию задачи не требуется определения реакции V_A неподвижной опоры A , поэтому из решения следует исключить уравнение, в которое войдет эта реакция. Таким образом, остается одно уравнение моментов относительно неподвижной опоры, которое содержит два неизвестных. Составление уравнения равновесия называется *статической стороной задачи*.

3. Устанавливают зависимость между деформациями стержней. Для этого вычерчивают деформированную схему системы, в которой показывают систему до и после деформации. На схеме показывают удлинения (укорочения) каждого стержня, между которыми всегда можно установить зависимость, рассматривая, например подобие треугольников. Выраженная некоторой формулой, она называется уравнением совместности деформации системы. Полученная зависимость между деформациями представляет собой *геометрическую сторону задачи*.

4. Выражают удлинения (укорочения) стержней в уравнении совместности деформации через усилия в этих стержнях. Для этого используют закон Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где Δl — удлинение или укорочение стержня, м (см); N — усилие, возникающее в стержне, кН или МН; E — модуль упругости (сопротивление деформации) для стали $2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^7$ Н/см²; A — площадь поперечного сечения стержня, м² (см²).

В результате такой подстановки получают еще одну зависимость между усилиями N_1 и N_2 . Она является недостающим урав-

нением к уравнению статики. Полученная зависимость отражает *физическую сторону задачи*.

По двум уравнениям определяют неизвестные усилия.

Пример 26. Определить усилия в стержнях BC и DK , поддерживающих брус AG , как показано на рис. 40, a .

Решение. 1. *Отбросим стержни и заменим их усилиями N_1 и N_2 .*

2. *Статическая сторона задачи.* Составим уравнение равновесия статики:

$$\sum M_A = 0$$

или

$$F \cdot 4,5a - N_2 \cdot 3,5a - N_1 \cdot 2a = 0,$$

откуда $2N_1 + 3,5N_2 = 4,5F$.

(а)

Задача один раз статически неопределима.

3. *Геометрическая сторона задачи.* Изобразим деформированную схему системы (рис. 40, б). Поскольку брус абсолютно жесткий, он не деформируется, а только поворачивается относительно точки A . Из подобия треугольников ABB_1 и ADD_1 видно, что

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2a}{3,5a},$$

откуда $\Delta l_1 = \frac{2}{3,5} \Delta l_2 = \frac{4}{7} \Delta l_2$.

(б)

4. *Физическая сторона задачи.* Выразим деформации стержней уравнения (б) с помощью закона Гука:

$$\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{4 N_2 l_2}{7 E_2 A_2}.$$

Подставим значения длин и жесткостей стержней, приведенные на рис. 40, a : $l_1 = 2l$; $E_1 = E$; $A_1 = A$; $l_2 = l$; $E_2 = E$; $A_2 = 2A$; получим:

$$\frac{N_1 2l}{EA} = \frac{4 N_2 l}{7 E 2A},$$

откуда $N_1 = 1/7 N_2$.

(в)

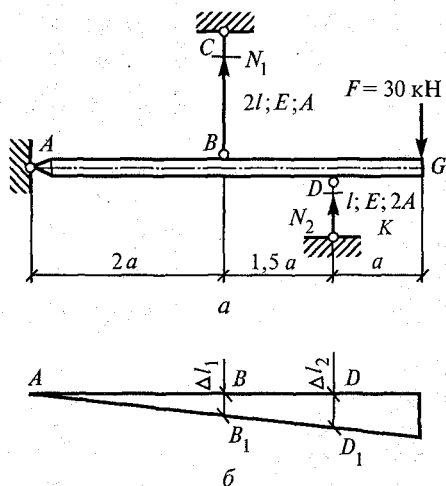


Рис. 40

Подставим уравнение (в) в уравнение (а):

$$3,5N_2 + 2\frac{1}{7}N_3 = 4,5F,$$

или

$$26,5N_2 = 31,5F,$$

$$\text{откуда } N_2 = \frac{31,5}{26,5} F = \frac{31,5 \cdot 30}{26,5} = 35,66 \text{ кН.}$$

Из уравнения (в) найдем значение второго усилия:

$$N_1 = \frac{1}{7} N_2 = \frac{1}{7} \cdot 35,66 = 5,09 \text{ кН.}$$

Ответ: $N_1 = 5,09 \text{ кН}$; $N_2 = 35,66 \text{ кН}$.

Пример 27. Определить усилия в стержнях BC и DK (рис. 41, а), поддерживающих брус DA , если стержень DK изготовлен короче проектной длины на $\Delta l_0 = 0,001l$. Материал — сталь, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $A = 5 \text{ см}^2$.

Решение. 1. Обозначим усилия в стержнях N_1 и N_2 .

2. *Статическая сторона задачи.* Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0 \text{ или } N_2 2a + N_1 a = 0,$$

$$\text{откуда } N_1 = 2N_2. \quad (а)$$

3. *Геометрическая сторона задачи.* Покажем деформированную схему системы (рис. 41, б). Если бы не было стержня BC , то брус AD занял бы положение AD_2 , т. е. точка D переместилась в положение D_2 , причем $DD_2 = \Delta l_0$. Однако стержень BC уменьшает величину этого перемещения, и точка D займет какое-то промежуточное положение, например D_1 , а точка B — положение B_1 .

Из подобия треугольников ABB_1 и ADD_1 находим

$$\Delta l_1 / \Delta l_2 = a / (2a),$$

$$\text{откуда } \Delta l_2 = 2\Delta l_1. \quad (б)$$

На рис. 41, б видно, что $\Delta l_2 = \Delta l_0 - \Delta l_{2N_2}$.

4. *Физическая сторона задачи.* Выразим Δl_{2N_2} и Δl_1 через закон Гука, тогда

$$\Delta l_2 = \Delta l_0 - \frac{N_2 \cdot 1,5l}{EA} = 0,001l - \frac{N_2 \cdot 1,5l}{EA}$$

$$\text{и } \Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}.$$

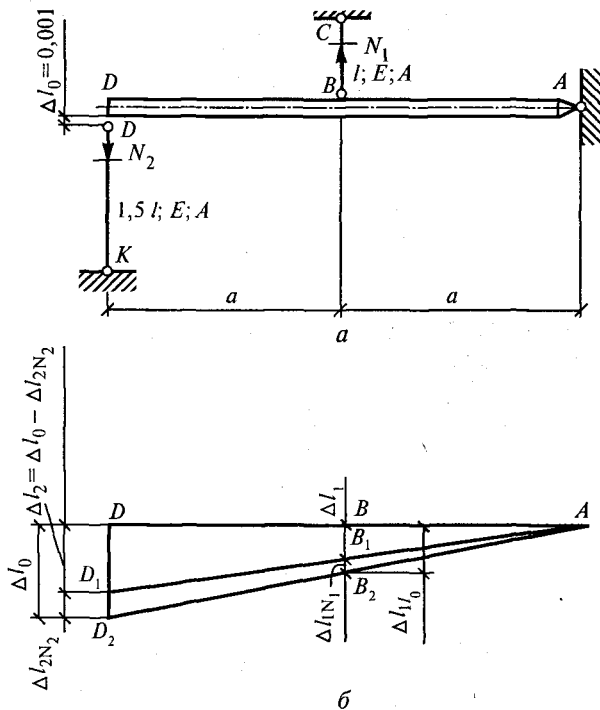


Рис. 41

Подставим эти выражения в уравнение (б):

$$0,001l - \frac{N_2 \cdot 1,5l}{EF} = 2 \frac{N_1 l}{EF},$$

откуда $0,001EF = 1,5N_2 + 2N_1$.

Учитывая уравнение (а)

$$0,001EF = 1,5N_2 + 2 \cdot 2N_2$$

или

$$0,001EF = 5,5N_2,$$

$$\text{откуда } N_2 = \frac{0,001EF}{5,5} = \frac{0,001 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{5,5} = 0,01818 \text{ МН} = 18,18 \text{ кН}.$$

Из уравнения (а)

$$N_1 = 2N_2 = 36,36 \text{ кН}.$$

Ответ: $N_1 = 36,36 \text{ кН}$; $N_2 = 18,18 \text{ кН}$.
Оба стержня испытывают растяжение.

Пример 28. Определить усилия в стержнях BC и DK (рис. 42, a), поддерживающих брус AD , если температура стержня BC увеличится на 20°C . Материал — сталь, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, площадь сечения $A = 5 \text{ см}^2$.

Решение. 1. Заменяем стержни усилиями в стержнях N_1 и N_2 .

2. Статическая сторона задачи. Уравнение равновесия статики:

$$\sum M_A = 0 \text{ или } N_1 a - N_2 3a = 0, \quad (a)$$

откуда $N_1 = 3N_2$.

3. Геометрическая сторона задачи. Покажем деформированную схему системы (рис. 42, b). Если бы стержня DK не было, то точка D , вследствие удлинения стержня BC от увеличения температуры, переместилась бы в положение D_2 . Стержень DK не дает возможности точке D переместиться в положение D_2 , и она займет какое-то промежуточное положение D_1 , т.е. стержень DK укоротится на величину DD_1 , которую обозначим через Δl_2 .

Стержень BC удлинится на величину BB_1 , которую обозначим Δl_1 .

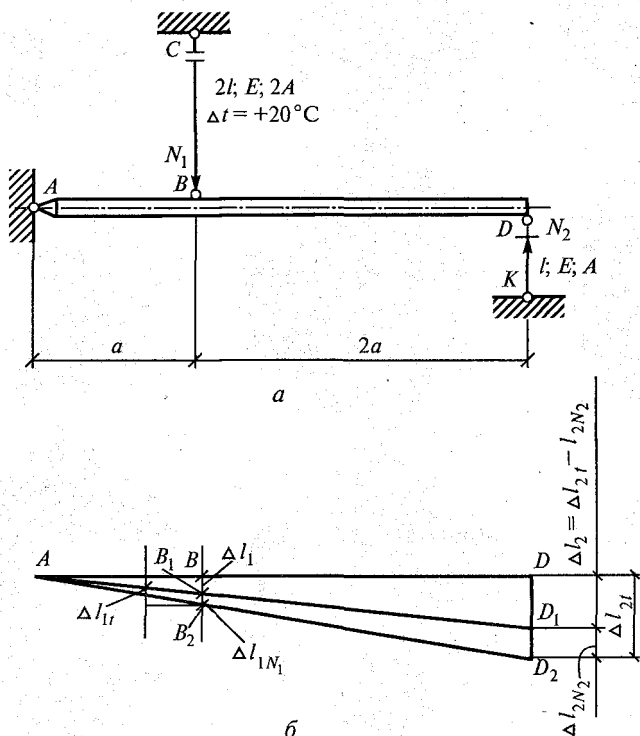


Рис. 42

Из подобия треугольников ABB_1 и ADD_1

$$\Delta l_1 / \Delta l_2 = a / 3a,$$

$$\text{откуда } \Delta l_2 = 3\Delta l_1, \quad (6)$$

$$\text{где } \Delta l_1 = \Delta l_{1t} - \Delta l_{1N_1}.$$

4. *Физическая сторона задачи.* Выразим Δl_1 , Δl_2 и Δl_{1N_1} через усилия в стержнях:

$$\Delta l_{1t} = \alpha l_1 \Delta l; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2};$$

$$\Delta l_{1N_1} = \frac{N_1 2l}{E_1 A_1}.$$

Подставим длины и жесткости стержней (рис. 42, а):

$$l_1 = 2l; \quad A_1 = 2A; \quad l_2 = l; \quad A_2 = A, \text{ тогда}$$

$$\Delta l_{1t} = \alpha 2l \Delta t; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA};$$

$$\Delta l_{1N_1} = \frac{N_1 2l}{E 2A}.$$

Подставим эти значения в выражение для Δl_1 :

$$\Delta l_1 = 2\alpha l \Delta t - \frac{N_1 l}{EA};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{N_2 l}{EA}.$$

Подставим Δl_1 и Δl_2 в уравнение (6):

$$\frac{N_2 l}{EA} = 3 \left(2\alpha l \Delta t - \frac{N_1 l}{EA} \right),$$

$$\text{откуда } N_2 + 3N_1 = 6\alpha \Delta t EA. \quad (в)$$

Подставив уравнение (а) в уравнение (в), получим

$$N_2 + 9N_2 = 6\alpha \Delta t EA,$$

$$\text{откуда } N_2 = \frac{6\alpha \Delta t EA}{10} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^2 \cdot 5}{10} =$$

$$= 14400 \text{ Н} = 14,4 \text{ кН},$$

$$\text{где } E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Н/10}^4 \text{ см}^2 = 2 \cdot 10^7 \text{ кН},$$

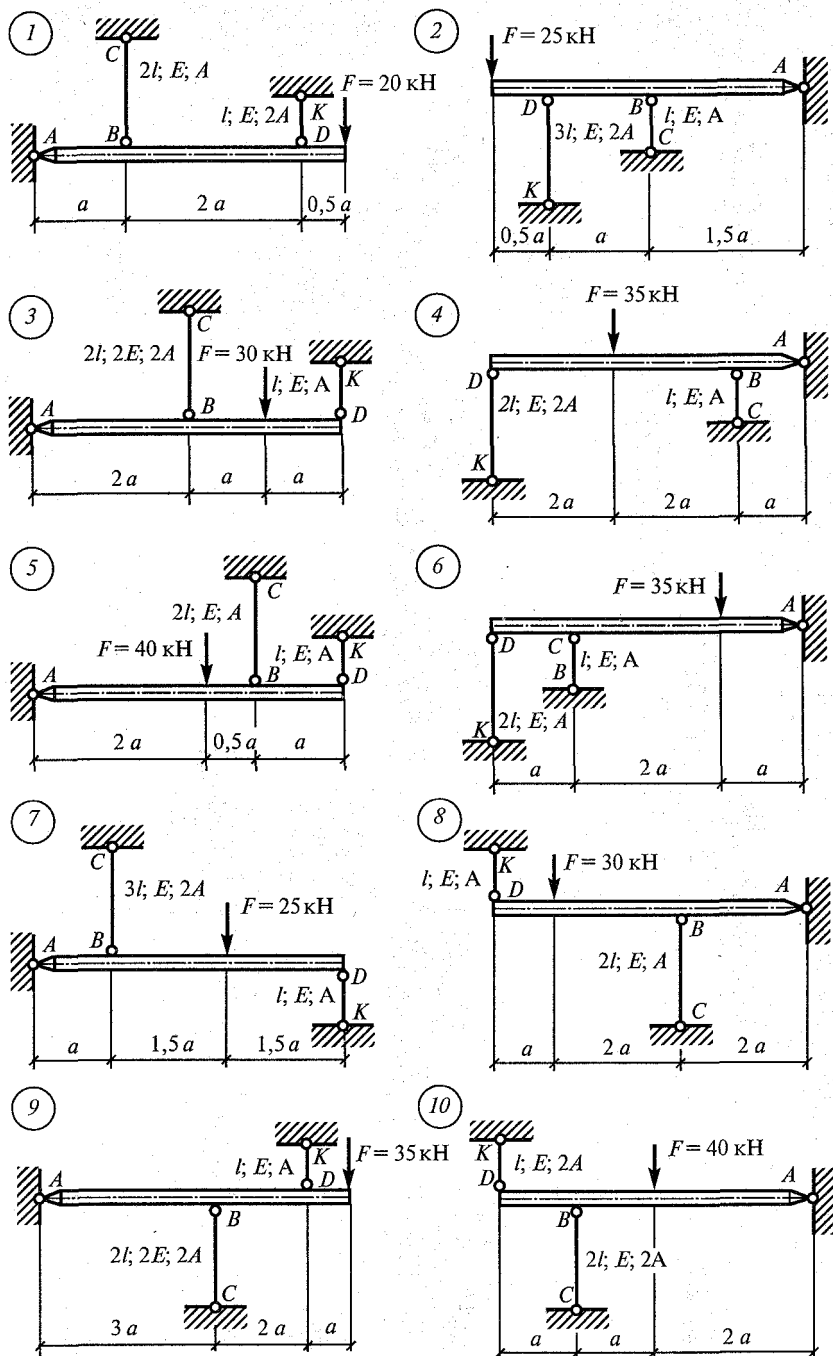


Рис. 43

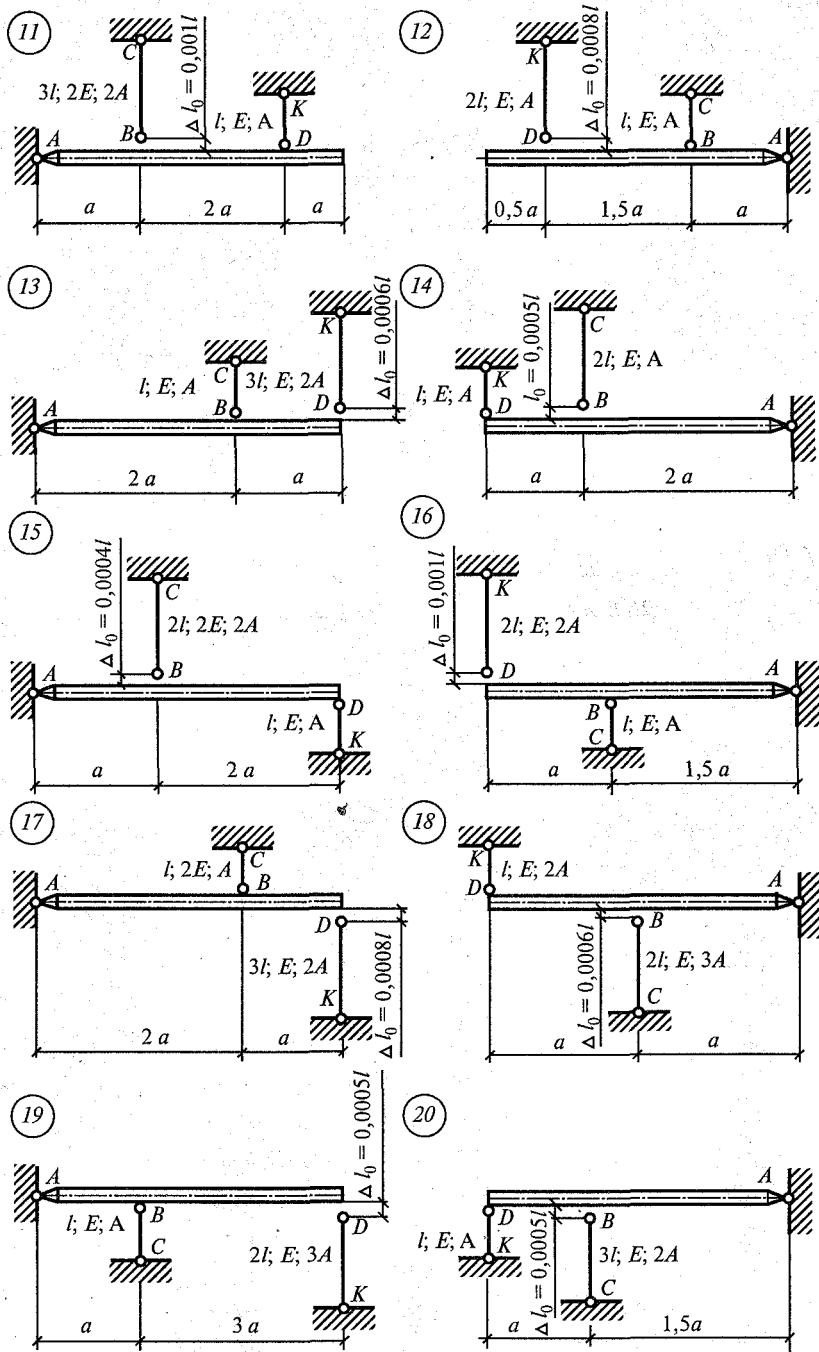


Рис. 43. Продолжение

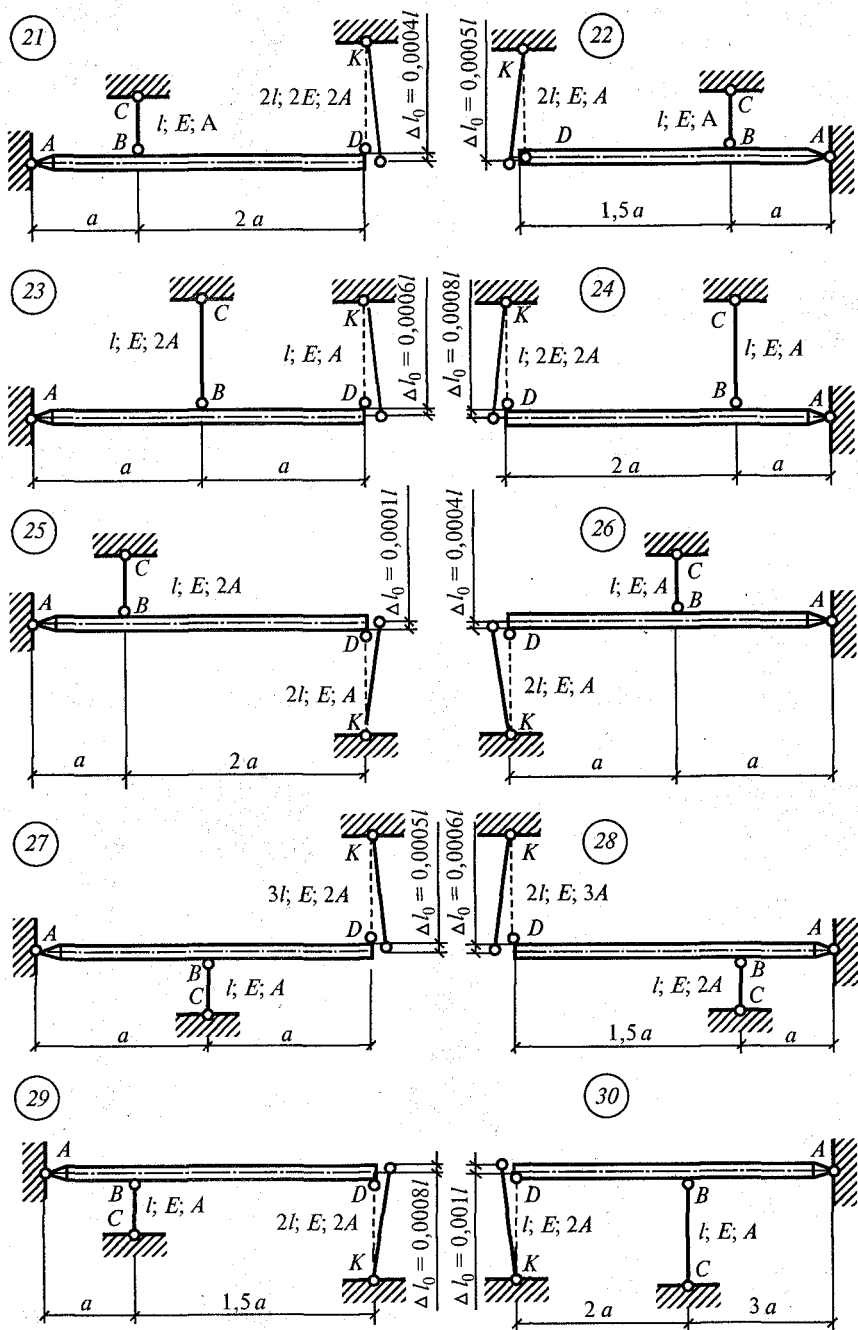


Рис. 43. Продолжение

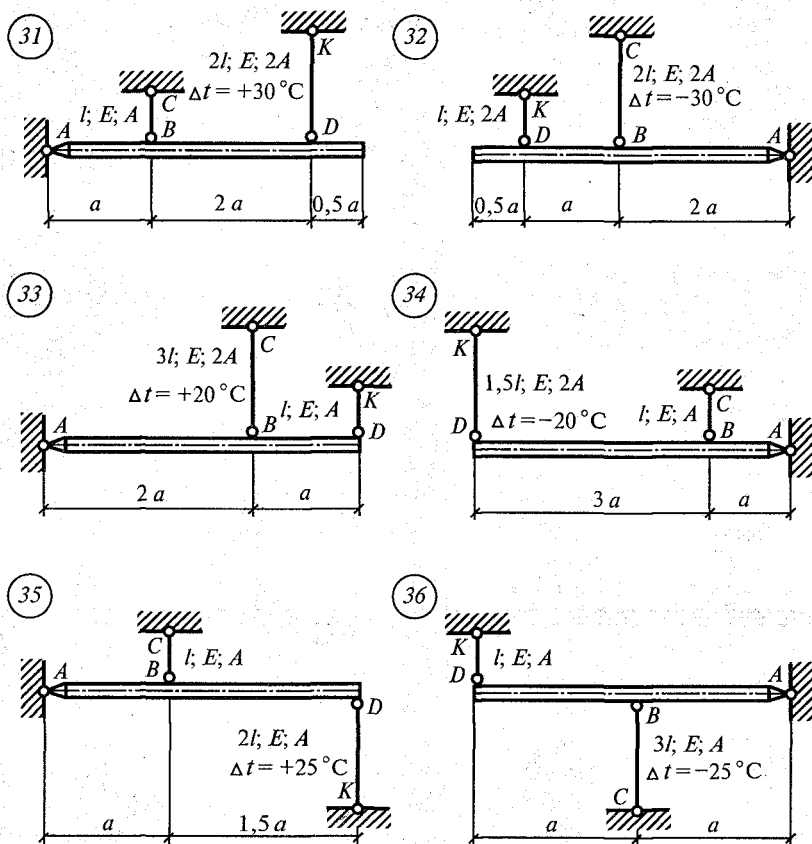


Рис. 43. Окончание

Из уравнения (а)

$$N_1 = 3N_2 = 3 \cdot 14,4 = 43,2 \text{ кН.}$$

Ответ: $N_1 = 43,2$ кН, стержень сжат; $N_2 = 14,4$ кН, этот стержень тоже сжат, так как усилия на рис. 42 направлены к брусу.

Задание для расчетно-графической работы 4. Определить усилия в стержнях системы, поддерживающей абсолютно жесткий брус, по данным одного из вариантов, показанных на рис. 43:

а) в вариантах 1—10 — от силы F ;

б) в вариантах 11—20 один из стержней изготовлен короче проектной длины на Δl_0 , материал — сталь, $A = 10 \text{ см}^2$;

в) в вариантах 21—30 один из стержней изготовлен длиннее проектной длины на Δl_0 , материал — сталь, $A = 5 \text{ см}^2$;

г) в вариантах 31—36 температура одного из стержней увеличилась на $\Delta t^\circ\text{C}$, материал — сталь, $A = 10 \text{ см}^2$.

5.2. Определение главных моментов инерции сечения

К решению задачи рекомендуется приступить после выполнения самостоятельной работы 5 (гл. 1). Порядок решения задачи остается таким же.

Пример 29. Определить моменты инерции сечения, составленного из прокатных профилей, относительно главных центральных осей (рис. 44). Сечение состоит из двутавра № 33, швеллера № 27, двух уголков $90 \times 56 \times 6$ и листа сечением 12×180 мм.

Решение. 1. Положение центра тяжести определено в примере 25: $y_C = 2,33$ см, если ось проходит через центр тяжести двутавра.

2. Проводим центральные оси для каждого профиля проката x_1 , x_2 , x_3 , x_4 и x_5 .

3. Проводим главные центральные оси. Вертикальную ось v совмещаем с осью симметрии, а горизонтальную u проводим через центр тяжести сечения C перпендикулярно оси v .

4. Определим момент инерции сечения относительно оси u :

$$J_u = J_u^{\text{шв}} + J_u^{\text{уг}} + J_u^{\text{уг}} + J_u^{\text{дв}} + J_u^{\text{листа}}.$$

Учитывая, что уголки одинаковые и расположены на одинаковом расстоянии от оси u , получим:

$$J_u = J_u^{\text{шв}} + 2J_u^{\text{уг}} + J_u^{\text{шв}} + J_u^{\text{листа}}.$$

Определим величину каждого слагаемого. Момент инерции швеллера № 27 относительно оси u

$$J_u^{\text{шв}} = J_{x_1}^{\text{шв}} + a_1^2 A_{\text{шв}} = 262 + 12,3^2 \cdot 35,2 = 5587 \text{ см}^4,$$

где $J_{x_1}^{\text{шв}} = J_{y_{\text{табл}}}^{\text{шв}} = 262 \text{ см}^4$; момент инерции швеллера № 27 относительно центральной оси x_1 , совпадающей с осью y (см. табл. 4 прил. I); $a_1 = y_1 - y_C = 14,63 - 2,33 = 12,3$ см — расстояние между осями x_1 и u ; $A_{\text{шв}} = 35,2 \text{ см}^2$.

Момент инерции уголка $90 \times 56 \times 6$ относительно оси u :

$$J_u^{\text{уг}} = J_{x_2}^{\text{уг}} + a_2^2 A_{\text{уг}} = 21,2 + 6,55^2 \cdot 8,54 = 388 \text{ см}^4,$$

где $J_{x_2}^{\text{уг}} = J_{y_{\text{табл}}}^{\text{уг}} = 21,2 \text{ см}^4$ — момент инерции уголка $90 \times 56 \times 6$ относительно центральной оси, совпадающей с осью y (см. табл. 2 прил. I); $a_2 = y_2 - y_C = 8,88 - 2,33 = 6,55$ см — расстояние между осями x_2 и u ; $A_{\text{уг}} = 8,54 \text{ см}^2$.

Момент инерции двутавра № 33 относительно оси u :

$$J_u^{\text{дв}} = J_{x_4}^{\text{дв}} + a_4^2 A_{\text{дв}} = 9840 + 2,33^2 \cdot 53,8 = 10132 \text{ см}^4,$$



Момент инерции листа 12×180 мм относительно оси u :

где $J_{x_5}^{\text{листа}} = \frac{bd^3}{12} = \frac{18 \cdot 1,2^3}{12} = 2,59 \text{ см}^4$ — момент инерции листа относительно оси x_5 (см. прил. II); $a_5 = y_5 + y_C = 17,1 + 2,33 = 19,43 \text{ см}$ — расстояние между осями x_5 и u ; $A_{\text{лист}} = 18 \cdot 1,2 = 21,6 \text{ см}^2$.

Подставим полученное значение в формулу (а):

5. Определим момент инерции сечения относительно оси y :

Момент инерции швеллера № 27 относительно оси y :

141

Момент инерции уголка $90 \times 56 \times 6$ относительно оси v :

$$J_v^{уг} = J_{y_2}^{уг} + b_2^2 A_{уг} = 70,6 + 16,45^2 \cdot 8,54 = 2382 \text{ см}^4,$$

где $J_{y_2}^{уг} = J_{x_{\text{табл}}}^{уг} = 70,6 \text{ см}^4$ — момент инерции уголка относительно центральной оси y_2 , которая совпадает с осью x (табл. 2 прил. I); $b_2 = \frac{h_{\text{шв}}}{2} - y_{0(уг)} = \frac{27}{2} + 2,95 = 16,45 \text{ см}$ — расстояние между осью y_2 и осью v ; $A_{уг} = 8,54 \text{ см}^2$.

Момент инерции двутавра № 30 относительно оси v :

$$J_v^{дв} = J_{y_4}^{дв} = J_{y_{\text{табл}}}^{дв} = 419 \text{ см}^4 \text{ (см. табл. 3 прил. I)}$$

Момент инерции листа 12×180 мм относительно оси v :

$$J_v^{\text{листа}} = J_{y_5}^{\text{листа}} = \frac{\delta b^3}{12} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 584 \text{ см}^4 \text{ (см. прил. II)}.$$

Подставим полученные значения в выражение (6):

$$J_v = 4160 + 2 \cdot 2382 + 419 + 583 = 9926 \text{ см}^4.$$

Ответ: $J_u = 24\,652 \text{ см}^4$; $J_v = 9926 \text{ см}^4$.

Пример 30. Определить моменты инерции сечения, составленного из простых геометрических фигур, относительно главных центральных осей по условию примера 25 (см. рис. 37).

Решение. 1. Положение центра тяжести определено: $y_C = 9,84 \text{ см}$.

2. Для каждой фигуры проводим центральные оси x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5 , причем оси x_3 и x_4 совпали (рис. 45).

3. Проводим главные центральные оси. Вертикальную ось v совместим с осью симметрии, а горизонтальную ось u проведем через центр тяжести сечения C перпендикулярно оси v .

4. Момент инерции сечения относительно оси u

$$J_u = J_u^I + J_u^{II} + J_u^{III} - J_u^{IV} - J_u^V.$$

Определим значение каждого слагаемого. Момент инерции первого прямоугольника

$$J_u^I = J_{x_1} + a_1^2 A = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1 A = \frac{40 \cdot 8^3}{12} + 15,16^2 \cdot 400 = 93\,636 \text{ см}^4.$$

Момент инерции второго прямоугольника

$$J_u^{II} = J_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2 = \frac{b_3 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2 = \frac{9 \cdot 42^3}{12} + 9,84^2 \cdot 378 = 92\,166 \text{ см}^4.$$

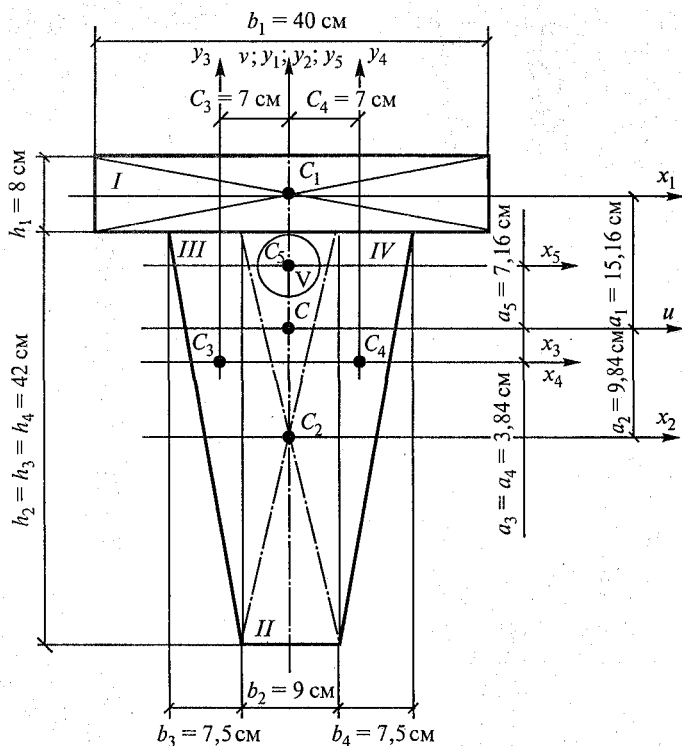


Рис. 45

Момент инерции треугольника

$$J_u^{\text{III}} = J_{x_3}^{\text{III}} + a_3^2 A_3 = \frac{b_3 h_3^3}{36} + a_3^2 A_3 = \frac{7,5 \cdot 42^3}{36} + (-3,84^2 \cdot 157,5) = 17758 \text{ см}^4.$$

Момент инерции круга

$$J_y^{\text{IV}} = J_{x_5}^{\text{IV}} + a_5^2 A_5 = \frac{\pi d^4}{64} + a_5^2 A_5 = \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} + 7,16^2 \cdot 28,3 = 1515 \text{ см}^4.$$

Подставим числовые значения в формулу:

$$J_u = 93\,636 + 92\,166 + 2 \cdot 17\,758 - 1\,515 = 219\,803 \text{ см}^4.$$

5. Определим момент инерции сечения относительно оси v :

$$J_v = J_v^{\text{I}} + J_v^{\text{II}} + 2J_v^{\text{III}} - J_v^{\text{V}},$$

$$\text{где } J_v^I = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 40^3}{12} = 42\,667 \text{ см}^4;$$

$$J_v^{II} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{42 \cdot 9^3}{12} = 2552 \text{ см}^4$$

$$J_v^{III} = \frac{b_3 h_3^3}{36} + c_3^2 A_3 = \frac{42 \cdot 7,5^3}{36} + 7^2 \cdot 157,5 = 8210 \text{ см}^4;$$

$$J_v^V = J_y^V = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} = 64 \text{ см}^4.$$

Подставим числовые значения в формулу для определения I_v :

$$J_v = 42\,667 + 2552 + 2 \cdot 8210 - 64 = 61\,575 \text{ см}^4.$$

$$\text{Ответ: } J_u = 219\,803 \text{ см}^4; J_v = 61\,575 \text{ см}^4.$$

Задание для расчетно-графической работы 5.

Задача 1. Определить моменты инерции сечения, составленного из профилей прокатной стали, относительно главных центральных осей по данным одного из вариантов, приведенных на рис. 38.

Задача 2. Определить моменты инерции сечения, составленного из простых геометрических фигур, относительно главных центральных осей по данным одного из вариантов, приведенных на рис. 39.

5.3. Подбор сечения балки из прокатного двутавра

1. *Строят эпюры Q_x и M_x* (см. самостоятельную работу 6, гл. I).

2. *Подбирают сечение стальной балки* в следующем порядке:

а) определяют требуемый момент сопротивления сечения балки:

$$W_x^{\text{тр}} \geq \frac{M_{\max}}{R},$$

где M_{\max} — наибольший по абсолютному значению изгибающий момент, принимаемый по эпюре M_x ; R — расчетное сопротивление материала по пределу текучести (прил. VIII);

б) по ГОСТам прил. I подбираем номер двутавровой стальной балки, которая должна иметь момент сопротивления W_x , наиболее близкий по значению к требуемому моменту сопротивления $W_x^{\text{тр}}$.

3. *Проверяют прочность принятой двутавровой балки* по нормальным напряжениям. Такую проверку выполняют для сечения с наибольшим изгибающим моментом:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R,$$

где W_x — момент сопротивления принятого сечения.

Если условие удовлетворено, прочность балки по нормальным сечениям считается обеспеченной, и наоборот.

4. *Строят эпюру нормальных напряжений σ .* Для этого вычерчивают крупно поперечное сечение балки и проводят на отдельном рисунке нулевую линию перпендикулярно нейтральной оси. Затем на уровне крайних точек сечения (верхней и нижней) откладывают найденные ранее значения σ_{\max} и σ_{\min} и соединяют эти значения прямой линией. Полученный график называется эпюрой σ . Значения σ_{\max} и σ_{\min} откладывают по разные стороны от нулевой линии.

5. *Проверяют прочность принятой двутавровой балки по касательным напряжениям.* Наибольшие касательные напряжения возникают в том сечении по длине балки, в котором действует наибольшая поперечная сила (по абсолютному значению), а по высоте сечения — на уровне нейтрального слоя.

Для определения этих напряжений действительное сечение двутавровой балки упрощают: полка и стенка принимаются прямоугольными: полка с размерами b и t , а стенка — d и $(h - 2t)$. Размеры b , t и h берутся по ГОСТу (прил. I). Таким образом, сечение двутавровой балки теперь состоит из трех прямоугольников.

Касательные напряжения на уровне нейтрального слоя определяют по формуле Журавского:

$$\tau_y = \frac{Q_x S_x}{J_x b},$$

где Q_x — поперечная сила в рассматриваемом сечении балки; S_x — статический момент сечения, расположенного выше или ниже нейтральной оси; $S_x = tb(h/2 - t/2) + d(h/2 - t)\left(\frac{h/2 - t}{2}\right)$;

J_x — момент инерции всего сечения, принимается по табл. 3 прил. I; b — ширина сечения балки на уровне нейтрального слоя (см. там же).

Проверяют прочность балки по касательным напряжениям

$$\tau_y \leq R_s,$$

где R_s — расчетное сопротивление материала сдвигу (прил. VIII).

6. *Строим эпюру касательных напряжений.* Касательные напряжения изменяются по высоте балки по криволинейному закону и имеют скачок в месте соединения полки и стенки. Поэтому эпюру τ строят по значениям, найденным в пяти точках сечения:

крайних точках, на уровне нейтральной оси и на уровне сопряжения стенки и полки — чуть ниже и чуть выше этого сопряжения.

Напряжение в этих точках определяется по формуле Журавского. При этом статический момент S_x и ширина сечения b определяются для каждой точки сечения. Касательные напряжения в крайних точках сечения равны нулю.

Пример 31. По условию примера 11 подобрать сечение стальной двутавровой балки (рис. 46, а). Проверить прочность принятого сечения по нормальным напряжениям в сечении с наибольшим изгибающим моментом и по касательным напряжениям в сечении с наибольшей поперечной силой. Материал — сталь марки С-235.

Решение. 1. Строим эпюры Q_x и M_x (см. пример 11). Наибольшее значение поперечной силы $Q_{\max} = 73,6$ кН, изгибающего момента $M_{\max} = 95,4$ кН·м (см. рис. 15).

2. Подберем сечение стальной двутавровой балки по наибольшему изгибающему моменту

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{95,4 \cdot 10^3}{230} = 415 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 415 \text{ см}^3,$$

где $R = 230$ МПа — расчетное сопротивление стали марки С-235 (прил. VIII).

По табл. 3 прил. I принимаем двутавровую балку № 30 с $W_x = 472 \text{ см}^3$, что больше, чем $W_x^{\text{тр}} = 415 \text{ см}^3$.

3. Проверим прочность принятого сечения:

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{95,4 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 202,1 \text{ МПа} < R = 230 \text{ МПа}.$$

Прочность сечения по нормальным напряжениям обеспечена.

4. Строим эпюру нормальных напряжений. Отложим от нулевой линии 0—0 (рис. 46, б) значение $\sigma_{\max} = 202,1$ МПа и $\sigma_{\min} = -202,1$ МПа и соединим полученные точки. Верхняя часть испытывает сжатие, нижняя — растяжение, так как по эпюре M_x видно, что балка прогибается (обращена выпуклостью) вниз.

5. Проверим прочность балки по касательным напряжениям. Заменим действительное сечение упрощенным (рис. 46, в). Размеры $d = 6,5$ мм; $t = 10,2$ мм; $b = 135$ мм приняты по табл. 3 прил. I.

Определим наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{1-1} = \tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{J_x b},$$

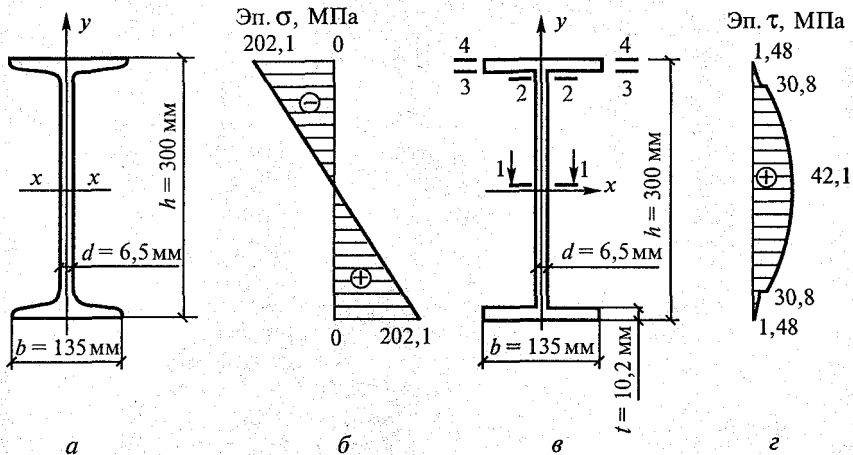


Рис. 46

$$\begin{aligned}
 \text{где } Q_{\max} &= 73,6 \text{ кН}; \quad S_x = tb(h/2 - t/2) + d(h/2 - t) \left(\frac{h/2 - t}{2} \right) = \\
 &= 1,02 \cdot 13,5 \left(\frac{30}{2} - \frac{1,02}{2} \right) + 0,65 \left(\frac{30}{2} - 1,02 \right) \left(\frac{15 - 1,02}{2} \right) = \\
 &= 263 \text{ см}^3; \\
 J_x &= 7080 \text{ см}^4; \quad d = 0,65 \text{ см.}
 \end{aligned}$$

Подставим числовые значения в формулу для τ_{\max} (сечение 1—1):

$$\tau_{\max} = \frac{73,6 \cdot 263}{7080 \cdot 0,65} = 4,21 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 42,1 \text{ МПа.}$$

Проверим прочность сечения по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = 42,1 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа,}$$

т.е. прочность обеспечена.

В прокатных балках, которые не несут больших сосредоточенных сил в приопорных участках, это условие обычно соблюдается с большим запасом.

6. Построим эпюру τ . Напряжение в сечении 2—2

$$\tau_{2-2} = \frac{73,6 \cdot 192,5}{7080 \cdot 0,65} = 3,08 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 30,8 \text{ МПа,}$$

$$\text{где } S_x = tb(h/2 - t/2) = 1,02 \cdot 13,5 (30/2 - 1,02/2) = 192,5 \text{ см.}$$

Напряжение в сечении 3—3

$$\tau_{3-3} = \frac{73,6 \cdot 192,5}{7080 \cdot 13,5} = 0,148 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 1,48 \text{ МПа},$$

где $b = 13,5$ см, так как сечение 3—3 проходит по полке.

Напряжение в сечении 4—4 равно нулю, так как $S_x = 0$.

По найденным значениям строим эпюру τ_y (рис. 46, з).

Задание для расчетно-графической работы 6. Подобрать сечение стальной двутавровой балки, проверить принятое сечение по нормальным (для сечения с наибольшим изгибающим моментом) и по касательным (для сечения с наибольшей поперечной силой) напряжениям и построить эпюры σ и τ для соответствующих сечений. Материал — сталь С-245. Остальные данные принять по одному из вариантов, показанных на рис. 7.

5.4. Подбор сечения центрально-сжатой составной стойки

К решению задачи рекомендуется приступить после решения самостоятельной работы 7.

1. *Задаются величиной коэффициента продольного изгиба φ .* В первом приближении его можно принять равным 0,6...0,8.

2. *Определяют требуемую площадь поперечного сечения стойки*

$$A_{\text{тр}} \geq F/\varphi R,$$

где F — центрально-сжимающая сила; R — расчетное сопротивление материала сжатию, МПа (прил. VIII).

3. *По найденной площади определяют номера профилей проката,* из которых состоит сечение, используя прил. I. В рамках расчетной работы рекомендуется принять профили одинаковыми по площади, если их несколько.

В практических расчетах приходится решать различные задачи: обеспечить равную в обеих плоскостях устойчивость стойки или наперед заданное отношение жесткостей (устойчивостей) и т.д. Сложной задачей является выбор типа сечения, его габаритов, которая довольно сложна и требует специальных знаний, поэтому рекомендации по подбору сечения упрощены.

4. *Проверяют устойчивость принятого сечения в следующем порядке:*

а) определяют расчетную длину стержня:

$$l_0 = \mu l,$$

где l — геометрическая длина стержня; μ — коэффициент приведения длины, который зависит от способа закрепления концов (прил. III);

б) определяют моменты инерции сечения J_x и J_y относительно главных центральных осей x и y , которые совпадают с осями симметрии сечения. Моменты инерции профилей проката относительно собственных осей определяются по ГОСТам (прил. I);

в) определяют радиусы инерции сечения относительно осей x и y :

$$i_x = \sqrt{J_x/A}, \quad i_y = \sqrt{J_y/A};$$

г) определяют гибкость стержня относительно осей x и y :

$$\lambda_x = \frac{l_0}{i_x}; \quad \lambda_y = \frac{l_0}{i_y};$$

д) по наибольшему значению λ и в зависимости от материала стойки определяют коэффициент продольного изгиба ϕ (прил. IV);

е) подставляют полученные значения в формулу:

$$\frac{F}{\phi A} \leq R.$$

Если это условие удовлетворено, то устойчивость стержня обеспечена, если не удовлетворено — не обеспечена. Если несущая способность стойки не обеспечена, то необходимо увеличить площадь сечения, приняв больший профиль, и проверить устойчивость стойки, добиваясь того, чтобы напряжение было меньше расчетного сопротивления. Если напряжение в стойке равно расчетному сопротивлению или немного меньше, то сечение считается рационально подобранным, т. е. экономичным. Если напряжение намного меньше расчетного сопротивления, то такое сечение не экономично, так как имеет большой запас прочности. Поэтому, если недонапряжение составляет более 5 %, то следует уменьшить площадь сечения (или увеличить гибкость) стойки, добиваясь, чтобы недонапряжение не превышало 5 %. В некоторых случаях этого не удается добиться из-за ограниченности сортамента профилей проката.

Пример 32. Подобрать сечение центрально-сжатой составной стойки, показанной на рис. 47. Материал стойки — сталь С-245.

Решение. 1. Задаемся величиной $\phi = 0,7$.

2. Определим требуемую площадь сечения

$$A_{\text{тр}} = \frac{F}{\phi R} = \frac{0,85 \text{ МН}}{0,7 \cdot 240 \text{ МПа}} = 0,00506 \text{ м}^2 = 50,6 \text{ см}^2,$$

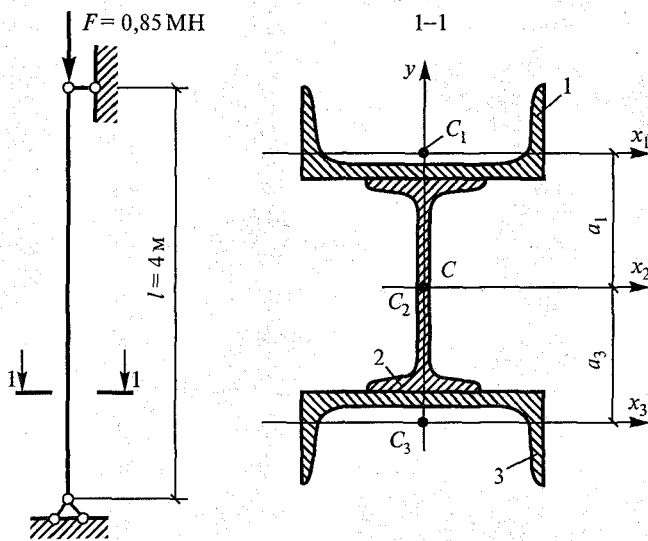


Рис. 47

где $R = 240 \text{ МПа}$ — расчетное сопротивление стали С-245 (прил. VIII).

Принимаем все профили одинаковыми по площади. На один профиль требуется площадь $50,6 : 3 = 16,8 \text{ см}^2$. Принимаем два швеллера № 14а площадью $A_1 = 2 \cdot 17 = 34 \text{ см}^2$ и двутавровую балку № 14 площадью $A_2 = 17,4 \text{ см}^2$. Общая площадь сечения

$$A = 34 + 17,4 = 51,4 \text{ см}^2$$

(см. табл. 3 и 4 прил. I).

3. Проверим устойчивость принятого сечения стержня в следующем порядке:

а) определим расчетную длину стержня

$$l_0 = \mu l = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м},$$

где $\mu = 1$ для стержня с шарнирным закреплением концов (прил. III);

б) определим момент инерции сечения относительно оси x :

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^{\text{дв}} + 2J_x^{\text{шв}} = J_{x \text{ табл}}^{\text{дв}} + 2(J_{y \text{ табл}}^{\text{шв}} + a_1^2 A_{\text{шв}}) = \\ &= 572 + 2(57,5 + 8,87^2 \cdot 176) = 3353 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\text{где } a_1 = \frac{h_{\text{дв}}}{2} + z_{0(\text{шв})} = \frac{14}{2} + 1,87 = 8,87 \text{ см}.$$

Определим момент инерции сечения относительно оси y :

$$J_y = J_y^{\text{шв}} + 2J_y^{\text{шв}} = J_{y \text{ табл}}^{\text{дв}} + 2J_{x \text{ табл}}^{\text{шв}} = 41,9 + 2 \cdot 545 = 1132 \text{ см}^4;$$

в) определим радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{J_x / A} = \sqrt{3353 / 51,4} = 8,08 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{J_y / A} = \sqrt{1132 / 51,4} = 4,7 \text{ см};$$

г) определим гибкость стержня относительно осей x и y :

$$\lambda_x = l_0 / i_x = 400 / 8,08 = 49,5;$$

$$\lambda_y = l_0 / i_y = 400 / 4,7 = 85,1;$$

д) для наибольшего значения гибкости $\lambda_y = 85,1$ определим коэффициент φ (см. прил. IV) по интерполяции между значениями

$$\lambda = 80 (\varphi = 0,686) \text{ и } \lambda = 90 (\varphi = 0,612);$$

$$\varphi = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} (85,1 - 80) = 0,648;$$

е) определим расчетное напряжение в сечении

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{0,85}{0,648 \cdot 51,4 \cdot 10^{-4}} = 255,2 \text{ МПа} > R = 240 \text{ МПа}.$$

Это недопустимо, поэтому необходим перерасчет.

1. Принимаем во втором приближении среднее значение между тем, которым задались, и тем, что получили:

$$\varphi = \frac{0,648 + 0,7}{2} = 0,687.$$

2. Требуемая площадь сечения

$$A_{\text{тр}} = \frac{0,85}{0,687 \cdot 240} = 51,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 51,6 \text{ см}^2.$$

На один профиль требуется $51,6 : 3 = 17,2 \text{ см}^2$. Принимаем два швеллера № 16 с $A_1 = 2 \cdot 18,1 = 36,2 \text{ см}^2$ и двутавровую балку № 14 с $A_2 = 17,4 \text{ см}^2$. Полная площадь сечения

$$A = 2 \cdot 18,1 + 17,4 + 53,6 \text{ см}^2.$$

3. Проверим устойчивость стойки:

а) $l_0 = 4 \text{ м}$, осталось прежним;

б) поскольку $J_x > J_y$, определим наименьший момент инерции, который дает наибольшую гибкость:

$$J_y = J_y^{\text{дв}} + 2J_y^{\text{шв}} = J_{y \text{ табл}}^{\text{дв}} + 2J_{x \text{ табл}}^{\text{шв}} = 41,9 + 2 \cdot 747 = 1536 \text{ см}^4;$$

в) радиус инерции

$$i_y = \sqrt{J_y/A} = \sqrt{1536/53,6} = 5,35 \text{ см};$$

г) гибкость стержня

$$\lambda_y = l_0/i_y = 400/5,35 = 74,8;$$

д) коэффициент продольного изгиба получим интерполяцией между

$$\lambda = 70 (\varphi = 0,754) \text{ и } \lambda = 80 (\varphi = 0,686);$$

$$\varphi = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} (74,8 - 70) = 0,721;$$

е) расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{0,85}{0,721 \cdot 53,6 \cdot 10^{-4}} = 219,9 \text{ МПа} < R = 240 \text{ МПа},$$

ж) недонапряжение равно

$$\frac{240 - 219,9}{240} 100\% = 8,37 > 5\%,$$

что допустимо, но нежелательно.

Выполним перерасчет, уменьшив номера профилей и, как правило, площадь поперечного сечения.

Возможны такие варианты сечения: двутавровая балка № 16 и два швеллера № 14 ($A = 51,4 \text{ см}^2$); двутавровая балка № 16 и два швеллера № 14 а ($A = 54,2 \text{ см}^2$). В первом случае напряжение $\sigma = 268,4 \text{ МПа}$, во втором $\sigma = 243,5 \text{ МПа}$. Решение необходимо провести самостоятельно по приведенной ранее схеме. В обоих случаях напряжения получились больше расчетного сопротивления $R = 240 \text{ МПа}$, что недопустимо.

Нам не удалось добиться того, чтобы недонапряжение стало меньше 5 %, поэтому оставляем сечение из двутавровой балки № 14 и двух швеллеров № 16 ($A = 53,6 \text{ см}^2$ и $R = 219,9 \text{ МПа}$).

Интересно отметить, что при площади сечения $A = 53,6 \text{ см}^2$ стойка недонапряжена на 8,37 %, а при площади сечения $A = 54,2 \text{ см}^2$ перенапряжена на 1,4 %, т.е. при меньшей площади сечения обладает большей устойчивостью (жесткостью). Такое явление происходит потому, что кроме площади сечения на устойчивость стойки влияют другие геометрические характеристики.

Ответ: принято сечение стойки из двух швеллеров № 16 и двутавровой балки № 14.

Задание для расчетно-графической работы 7. Подобрать сечение центрально-сжатой стойки по данным одного из вариантов, показанных на рис. 48. Материал стойки для нечетных вариантов — сталь С-245, для четных вариантов — сталь С-345.

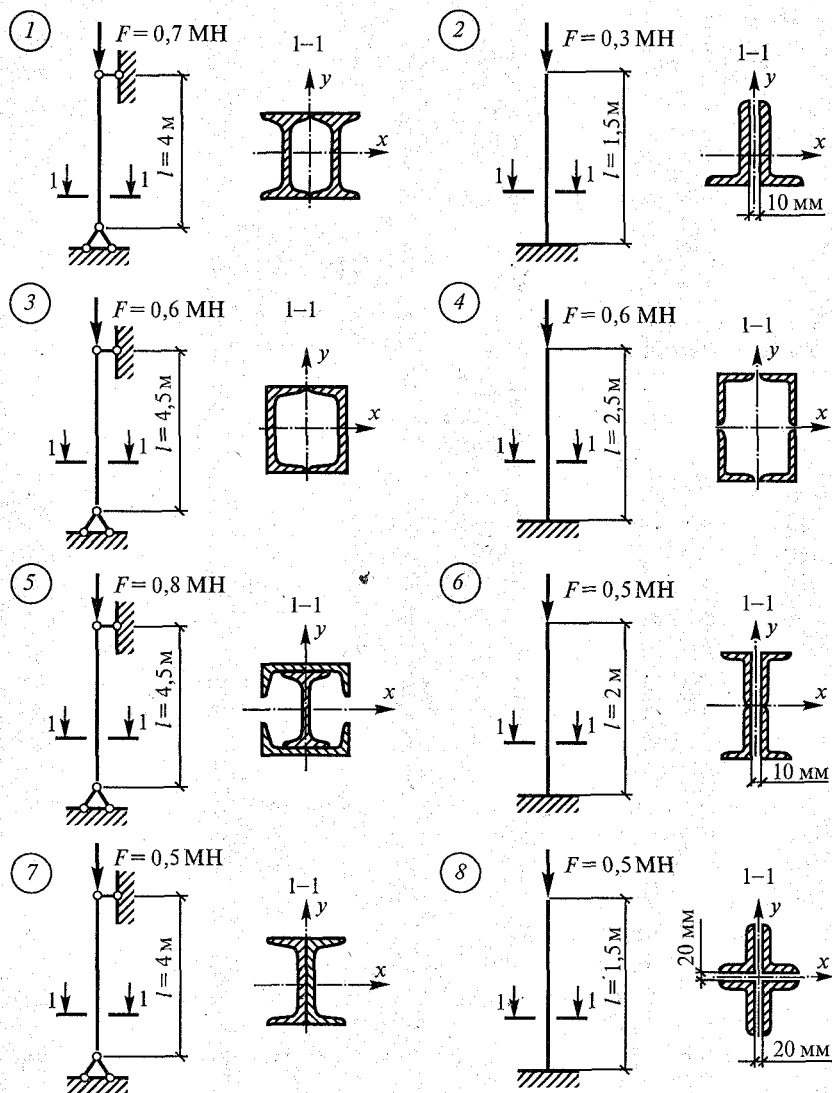


Рис. 48

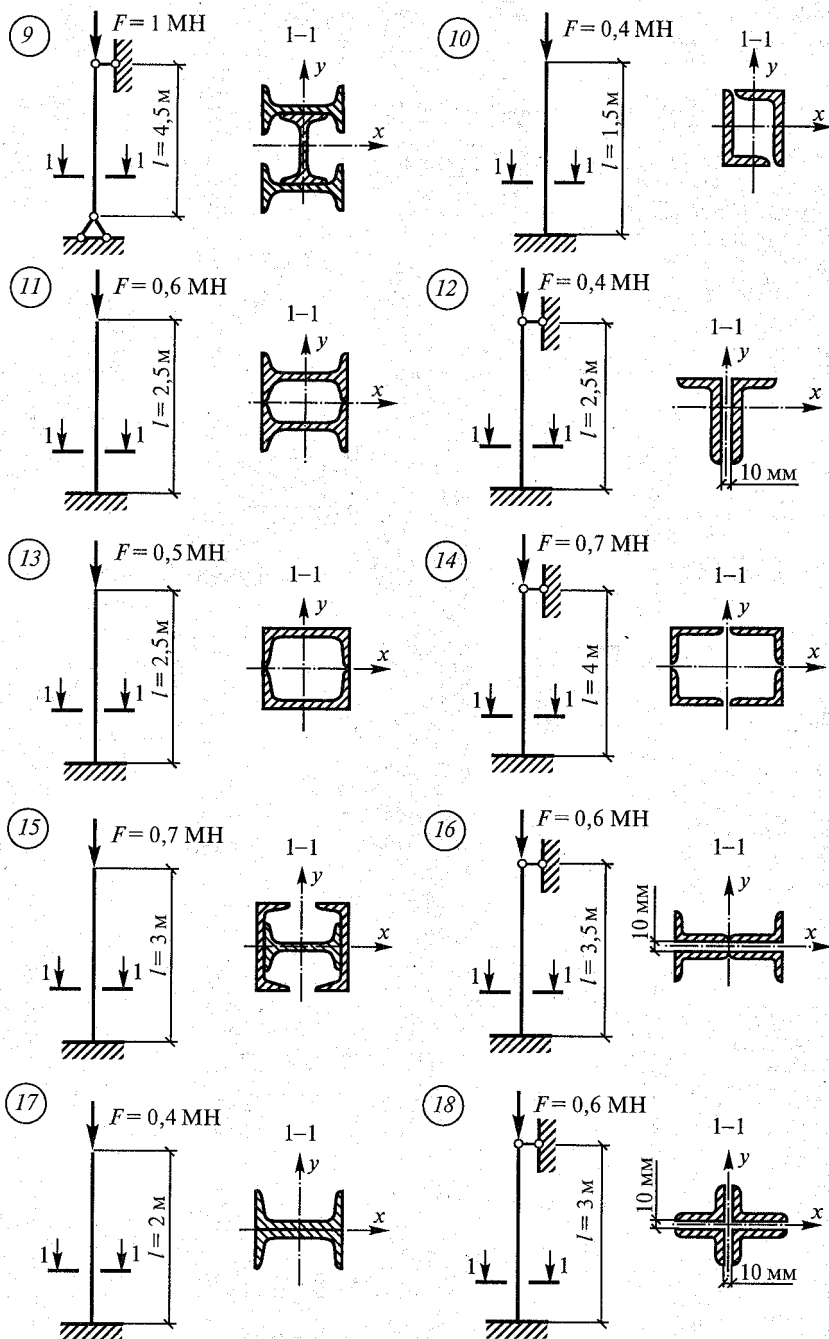


Рис. 48. Продолжение

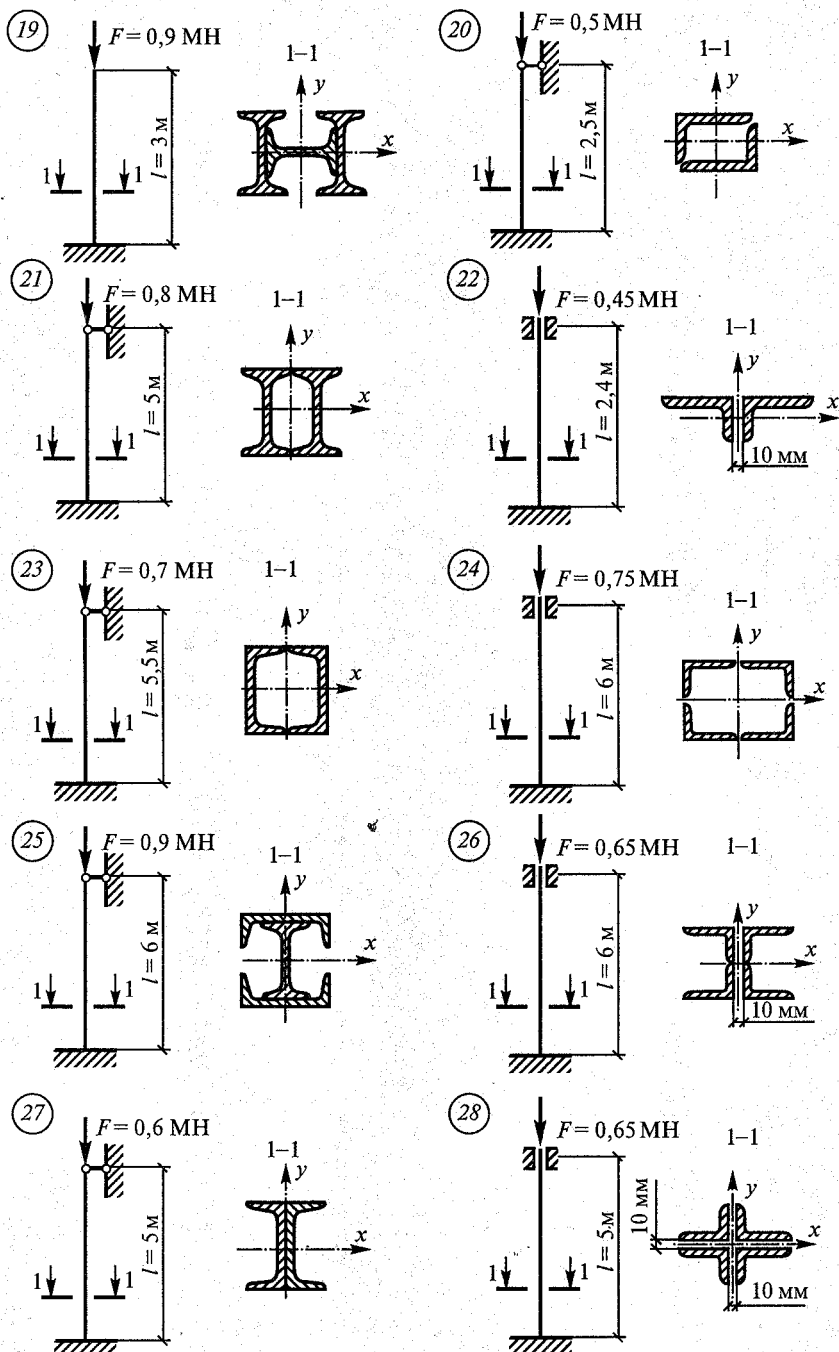


Рис. 48. Продолжение

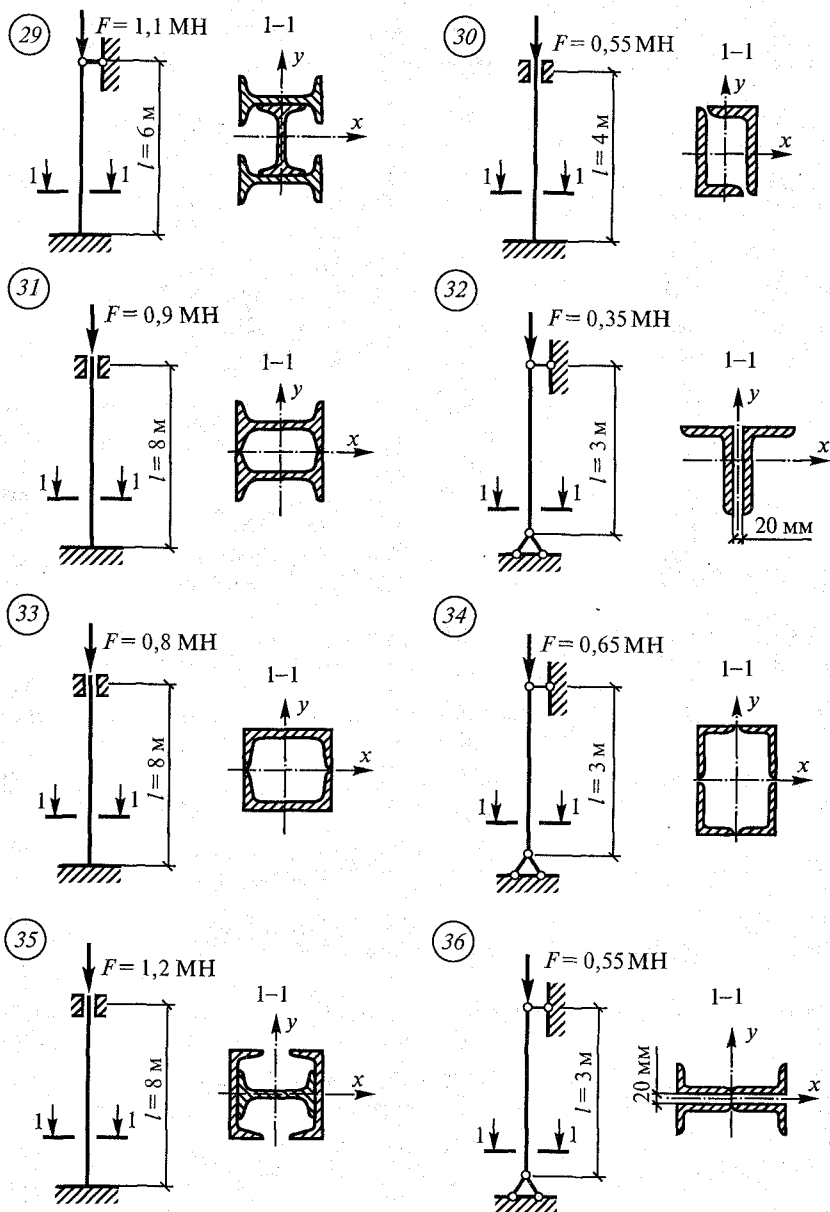


Рис. 48. Окончание

ГЛАВА 6

СТАТИКА СООРУЖЕНИЙ

6.1. Определение усилий в сечениях трехшарнирной арки

1. Мысленно отбрасывают опоры и заменяют их действие опорными реакциями. В опорах трехшарнирной арки возникают четыре реакции: две вертикальные V_A , V_B и две горизонтальные H_A , H_B , называемые распором.

2. Составляют четыре уравнения равновесия:

$$1) \sum M_A = 0; 2) \sum M_B = 0; 3) \sum M_C^{\text{лев (прав)}} = 0; 4) \sum X = 0,$$

из которых определяют четыре неизвестные реакции. Точками A и B обозначены опоры, а точкой C — шарнир.

Правильность определения V_A и V_B может быть уточнена из уравнения

$$\sum Y = 0.$$

При действии на арку только вертикальных нагрузок горизонтальные реакции H_A и H_B равны между собой и обычно обозначаются H .

3. Определяют изгибающие моменты в заданных сечениях арки (арочные изгибающие моменты):

$$M_k = M_k^0 - Hy_k,$$

где M_k — аточный изгибающий момент в любой точке арки; M_k^0 — балочный изгибающий момент в том же сечении, т.е. изгибающий момент в сечении балки, имеющей нагрузки и пролет, одинаковые с аркой; H — распор арки; y_k — ордината k -й точки, в которой определяется момент; определяется из уравнения оси арки, которое задано в условии задачи.

4. Определяют поперечные силы в заданных сечениях арки:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \alpha - H \sin \alpha,$$

где Q_k — аточная поперечная сила в любом сечении арки; Q_k^0 — балочная поперечная сила в том же сечении, т.е. поперечная сила в сечении балки, имеющей одинаковую нагрузку и пролет с аркой; α — угол, образуемый касательной к оси арки в данной точке k ; определяется из первой производной уравнения оси арки.

5. Определяют продольные силы в заданных сечениях арки:

$$N_k = -Q_k^0 \sin \alpha + H \cos \alpha,$$

где Q_k^0 , H и α — те же, что для Q_k .

При определении поперечных и продольных сил на правой половине арки можно рассматривать равновесие левой или правой (какой-то одной) ее части. Если рассматривать равновесие левой части, то:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \alpha + H \sin \alpha;$$

$$N_k = -Q_k^0 \sin \alpha + H \cos \alpha,$$

где Q_k^0 — балочная поперечная сила, равная сумме проекций всех левых сил на ось, перпендикулярную оси балки; α — острый угол между касательной и горизонталью; принимается таким же, как и для симметричных сечений левой половины арки.

Если рассматривается равновесие правой части арки, то формулы имеют тот же вид, но Q_k^0 принимается равной сумме проекций всех правых сил на ось, перпендикулярную оси балки.

Пример 33. Определить изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в точках A , D , C , E , B (рис. 49) арки параболического очертания. Уравнение параболы

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

Первая производная

$$y' = \frac{4f}{l^2} (l - 2x).$$

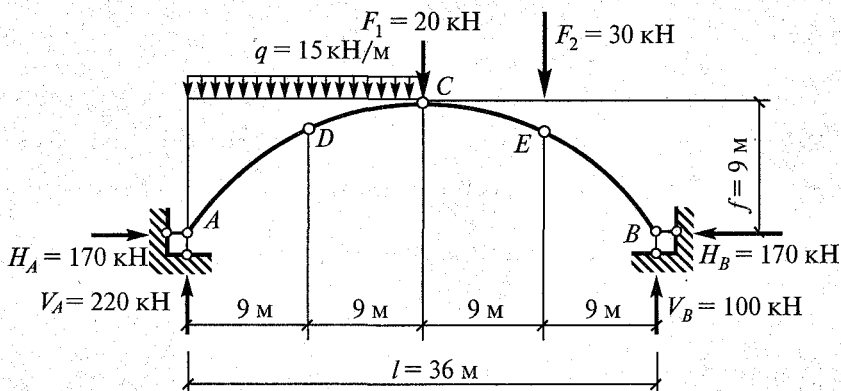


Рис. 49

Решение. 1. Обозначим опорные реакции V_A , V_B , H_A и H_B .
 2. Определим опорные реакции по уравнениям равновесия.
 Первое уравнение

$$\sum M_A = q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} + F_1 \cdot l/2 + F_2 \cdot 3/4l - V_B l = 0$$

или

$$15 \cdot 18 \cdot 9 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 27 - V_B \cdot 36 = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{15 \cdot 18 \cdot 9 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 27}{36} = \frac{3600}{36} = 100 \text{ кН.}$$

Второе уравнение

$$\sum M_B = V_A l - q \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{4} l - F_1 \frac{1}{2} - F_2 \frac{l}{4} = 0$$

или

$$V_A \cdot 36 - 15 \cdot 18 \cdot 27 - 20 \cdot 18 - 30 \cdot 9 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{15 \cdot 18 \cdot 27 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 9}{36} = \frac{7920}{36} = 220 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения V_A и V_B : $\sum Y = 0$ или $220 - 15 \cdot 18 - 20 - 30 + 100 = 0$, откуда $320 - 320 = 0$. Реакции найдены правильно.

Для составления третьего уравнения можно рассмотреть как левую, так и правую полуарки. Рассмотрим равновесие левой части арки относительно шарнира C :

$$\sum M_C^{\text{лев}} = V_A \frac{l}{2} - H_A f - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0$$

или

$$220 \cdot 18 - H_A \cdot 9 - 15 \cdot 18 \cdot 9 = 0,$$

$$\text{откуда } H_A = \frac{220 \cdot 18 - 15 \cdot 18 \cdot 9}{9} = \frac{1530}{9} = 170 \text{ кН.}$$

Четвертое уравнение принимает вид: $\sum X = H_A - H_B = 0$, откуда $H_A = H_B = 170$ кН. В дальнейшем распор будем обозначать: $H = 170$ кН.

3. Определим изгибающие моменты в точках A , D , C , E и B по формуле

$$M_k = M_k^0 - Hy.$$

Определим балочные изгибающие моменты в указанных точках:

$$M_A^0 = 0;$$

$$M_D^0 = V_A \frac{l}{4} - q \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{8} = 220 \cdot 9 - 15 \cdot 9 \cdot 4,5 = 1372 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C^0 = V_A \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 220 \cdot 18 - 15 \cdot 18 \cdot 9 = 1530 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E^0 = V_A l/4 = 100 \cdot 9 = 900 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_B^0 = 0.$$

Определим ординаты y_k указанных точек из уравнения параболы:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x);$$

при $x = 0 \quad y_A = 0;$

при $x = 9 \text{ м} \quad y_D = \frac{4 \cdot 9}{36} 9(36 - 9) = 6,75 \text{ м};$

при $x = 18 \text{ м} \quad y_C = 9 \text{ м};$

при $x = 27 \text{ м} \quad y_E = 6,75 \text{ м};$

при $x = 36 \text{ м} \quad y_B = 0.$

Определим арочные изгибающие моменты в точках:

$$M_A = M_A^0 - Hy_A = 0 - 0 = 0;$$

$$M_D = M_D^0 - Hy_D = 1372 - 170 \cdot 6,75 = 225 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = M_C^0 - Hy_C = 1530 - 170 \cdot 9 = 0 \text{ (момент в шарнире всегда равен нулю);}$$

$$M_E = M_E^0 - Hy_E = 900 - 170 \cdot 6,75 = -247,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_B = 0.$$

4. Определим поперечные силы в точках A, D, C, E и B:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \alpha - H \sin \alpha.$$

Определим балочные поперечные силы в указанных точках:

$$Q_A^0 = V_A = 220 \text{ кН};$$

$$Q_D^0 = V_A - ql/4 = 220 - 15 \cdot 9 = 85 \text{ кН};$$

$$Q_C^{0\text{лев}} = V_A - ql/2 = 220 - 15 \cdot 18 = -50 \text{ кН};$$

$$Q_C^{0\text{прав}} = V_A - ql/2 - F_1 = 220 - 15 \cdot 18 - 20 = -70 \text{ кН};$$

$$Q_E^{0\text{лев}} = Q_C^{0\text{прав}} = -70 \text{ кН}; \quad Q_E^{0\text{прав}} = Q_E^{0\text{лев}} - F_2 =$$

$$= -70 - 30 = -100 \text{ кН};$$

$$Q_B^0 = Q_E^{0\text{прав}} = -100 \text{ кН}.$$

Определим углы α для указанных точек. Известно, что

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4f}{l^2}(l - 2x).$$

Определим тангенсы углов для указанных точек, сами углы, а также синусы и косинусы углов:

$$\text{точка } A: x = 0, \operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot 9}{36^2}(36 - 0) = 1,$$

$$\text{откуда } \alpha = 45^\circ \text{ и } \sin 45^\circ = 0,707, \cos 45^\circ = 0,707;$$

$$\text{точка } D: x = 9 \text{ м, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot 9}{36^2}(36 - 2 \cdot 9) = 0,5,$$

$$\text{откуда } \alpha = 26^\circ 34' \text{ и } \sin 26^\circ 34' = 0,447, \cos 26^\circ 34' = 0,896;$$

$$\text{точка } C: x = 18 \text{ м, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \cdot 9}{36^2}(36 - 2 \cdot 18) = 0,$$

$$\text{откуда } \alpha = 0^\circ \text{ и } \sin 0^\circ = 0, \cos 0^\circ = 1;$$

$$\text{точка } E: x = 27 \text{ м, } \alpha = 26^\circ 34', \sin 26^\circ 34' = 0,447,$$

$$\cos 26^\circ 34' = 0,896, \text{ так как точка } E \text{ симметрична точке } D;$$

$$\text{точка } B: x = 36 \text{ м, } \alpha = 45^\circ, \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,707, \text{ так как точка } B \text{ симметрична точке } A.$$

Определяем абочные поперечные силы:

$$Q_A = Q_A^0 \cos 45^\circ - H \sin 45^\circ =$$

$$= 220 \cdot 0,707 - 170 \cdot 0,707 = 35,5 \text{ кН};$$

$$Q_D = Q_D^0 \cos 26^\circ 34' - H \sin 26^\circ 34' =$$

$$= 85 \cdot 0,896 - 170 \cdot 0,447 = 0,2 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\text{лев}} = Q_C^{0\text{лев}} \cos 0^\circ - H \sin 0^\circ = -50 \cdot 1 - 170 \cdot 0 = -50 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\text{прав}} = Q_C^{0\text{прав}} \cos 0^\circ - H \sin 0^\circ = -70 \cdot 1 - 170 \cdot 0 = -70 \text{ кН};$$

$$Q_E^{\text{лев}} = Q_E^{0\text{лев}} \cos 26^\circ 34' + H \sin 26^\circ 34' =$$

$$= -70 \cdot 0,896 + 170 \cdot 0,447 = 13,3 \text{ кН};$$

$$Q_E^{\text{прав}} = Q_E^{0\text{прав}} \cos 26^\circ 34' + H \sin 26^\circ 34' =$$

$$= -100 \cdot 0,896 + 170 \cdot 0,447 = -13,6 \text{ кН};$$

$$Q_B = Q_B^0 \cos 45^\circ + H \sin 45^\circ =$$

$$= -100 \cdot 0,707 + 170 \cdot 0,707 = 49,5 \text{ кН}.$$

В выражениях поперечной силы для сечений правой половины арки знак перед вторым слагаемым изменился на «плюс».

5. Определим продольные силы в точках A , D , C , E и B :

$$N_k = Q_k^0 \sin \alpha + H \cos \alpha.$$

Подставим числовые значения для каждой точки

$$N_A = Q_A^0 \sin 45^\circ + H \cos 45^\circ =$$

$$= 220 \cdot 0,707 + 170 \cdot 0,707 = 275,2 \text{ кН};$$

$$N_D = Q_D^0 \sin 26^\circ 34' + H \cos 26^\circ 34' = 85 \cdot 0,447 +$$

$$+ 170 \cdot 0,896 = 190,3 \text{ кН};$$

$$N_C^{\text{лев}} = Q_C^{\text{лев}} \sin 0^\circ + H \cos 0^\circ = -50 \cdot 0 + 170 \cdot 1 = 170 \text{ кН};$$

$$N_C^{\text{прав}} = Q_C^{\text{прав}} \sin 0^\circ + H \cos 0^\circ = -70 \cdot 0 + 170 \cdot 1 = 170 \text{ кН};$$

$$N_E^{\text{лев}} = Q_E^{\text{лев}} \sin 26^\circ 34' + H \cos 26^\circ 34' =$$

$$= 70 \cdot 0,447 + 170 \cdot 0,896 = 183,6 \text{ кН};$$

$$N_E^{\text{прав}} = Q_E^{\text{прав}} \sin 26^\circ 34' + H \cos 26^\circ 34' =$$

$$= 100 \cdot 0,447 + 170 \cdot 0,896 = 197 \text{ кН};$$

$$N_B = Q_B^0 \sin 45^\circ + H \cos 45^\circ =$$

$$= 100 \cdot 0,707 + 170 \cdot 0,707 = 190,7 \text{ кН}.$$

В выражениях продольной силы для сечений правой половины арки знак перед первым слагаемым изменился на «минус».

Если взять большее число точек для определения M_k , Q_k и N_k , например через 1—2 м, то по найденным значениям можно построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Это выходит за рамки задания.

Задание для расчетно-графической работы 8. Определить изгибающие моменты, поперечные и продольные силы в пяти точках: опорах, промежуточном шарнире и серединах левой и правой полуарки по данным одного из вариантов, показанных на рис. 50. Для нечетных вариантов принять очертание арки параболическим.

Уравнение оси арки

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x);$$

первая производная

$$y' = \frac{4f}{l^2} x(l-2x).$$

Для четных вариантов принять очертание арки по дуге окружности.

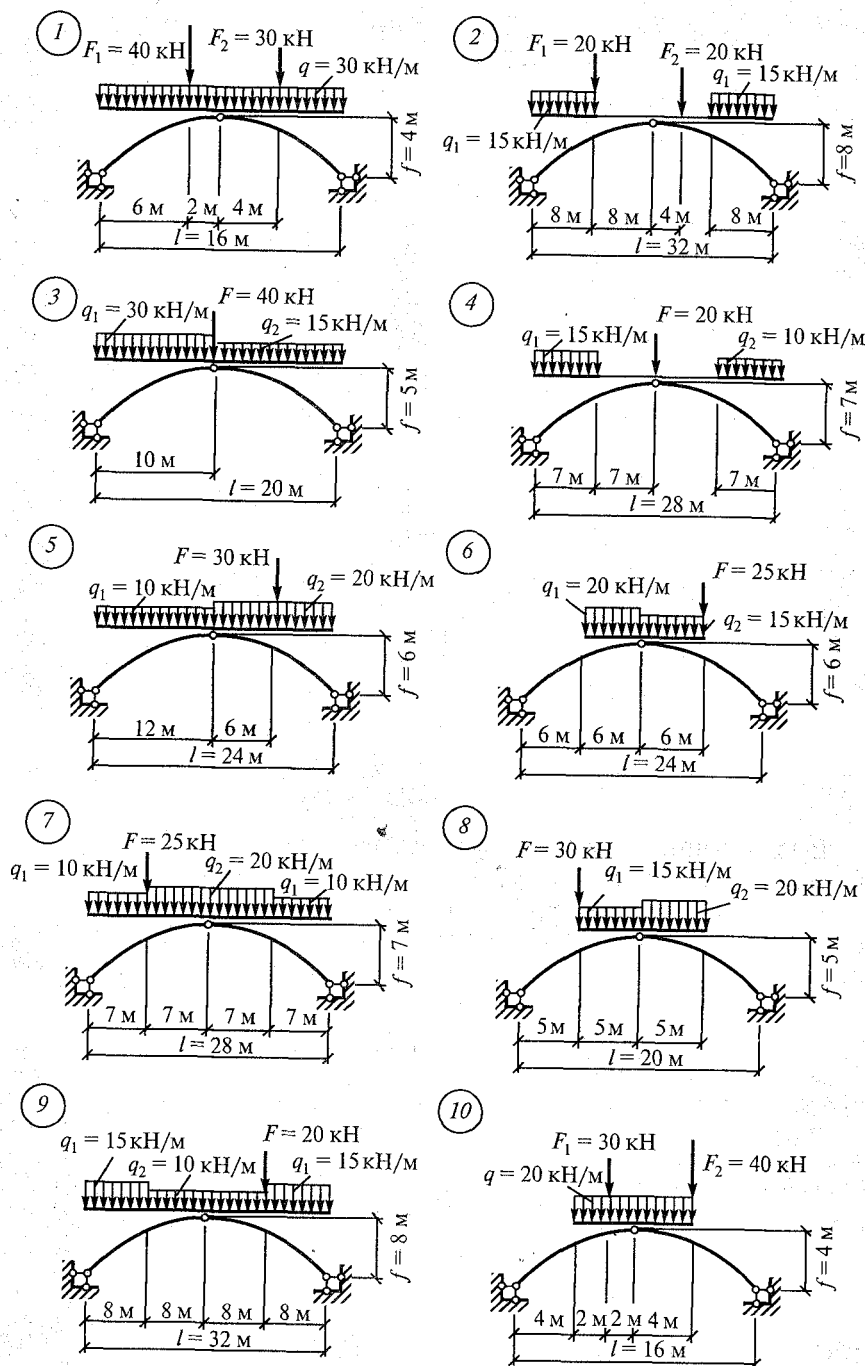


Рис. 50

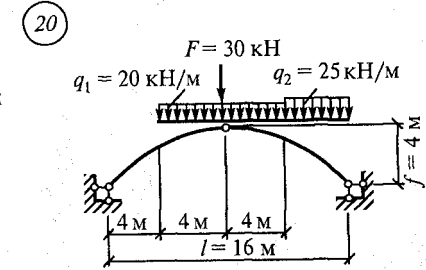
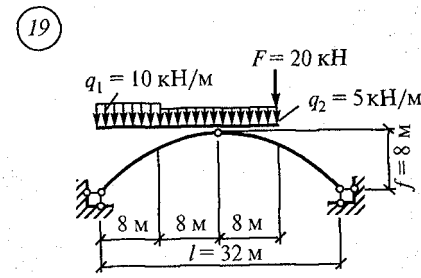
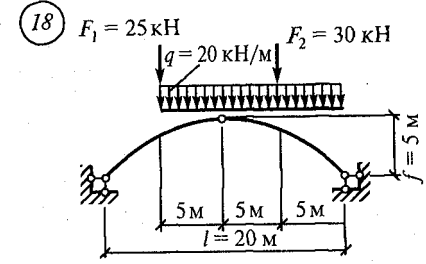
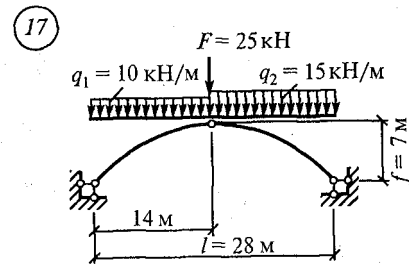
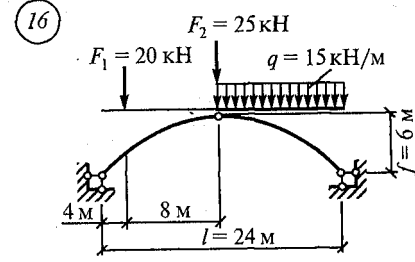
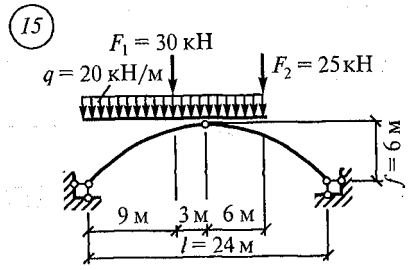
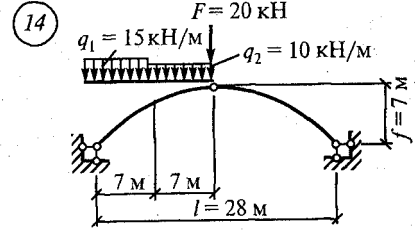
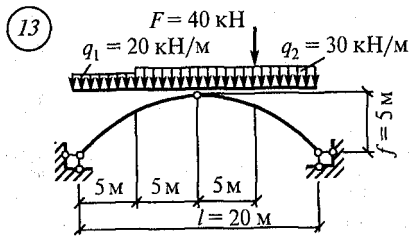
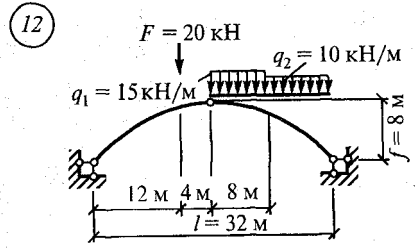
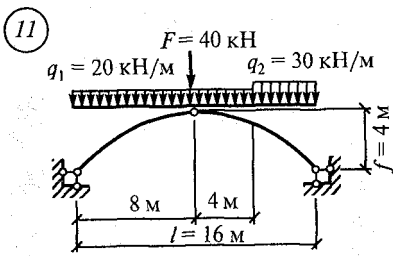


Рис. 50. Продолжение

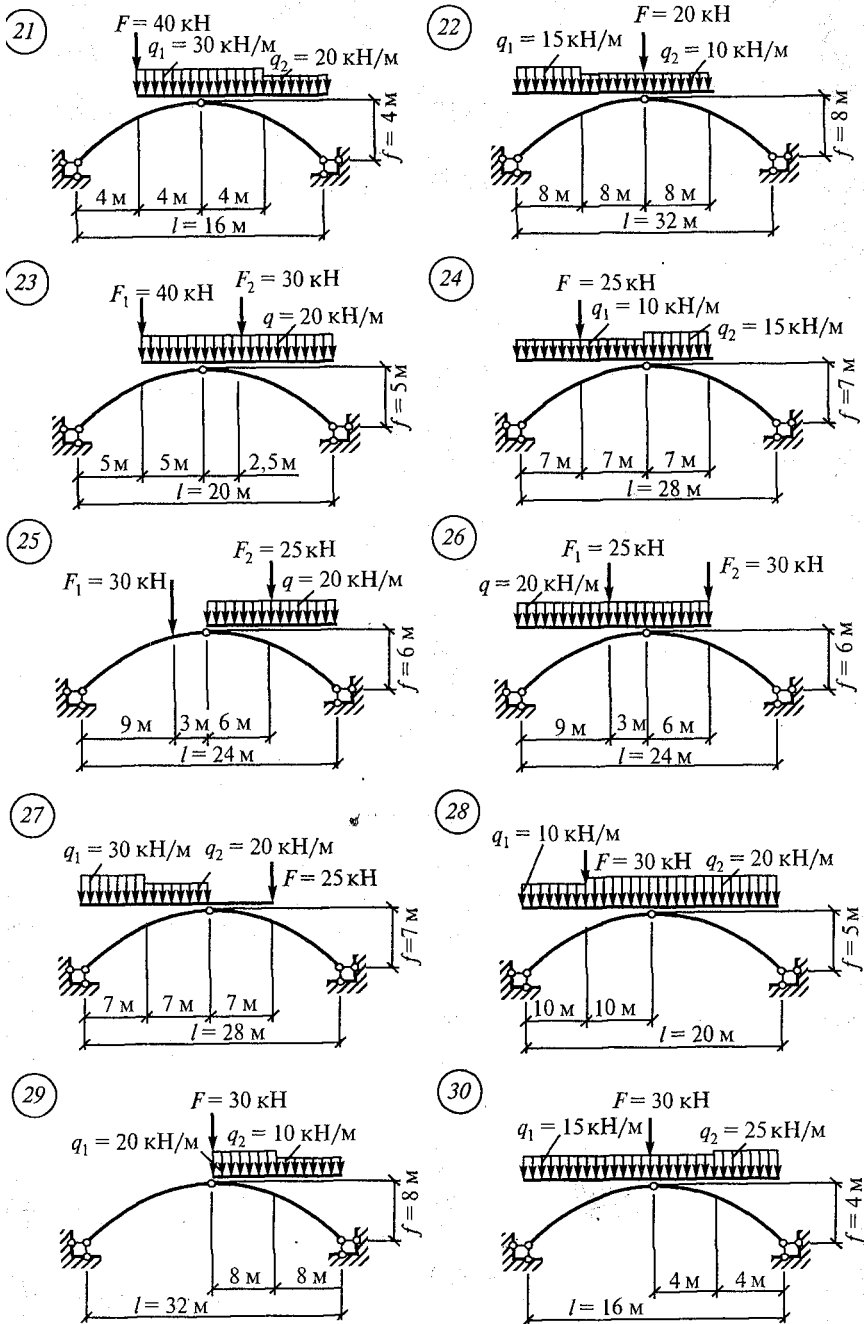


Рис. 50. Продолжение

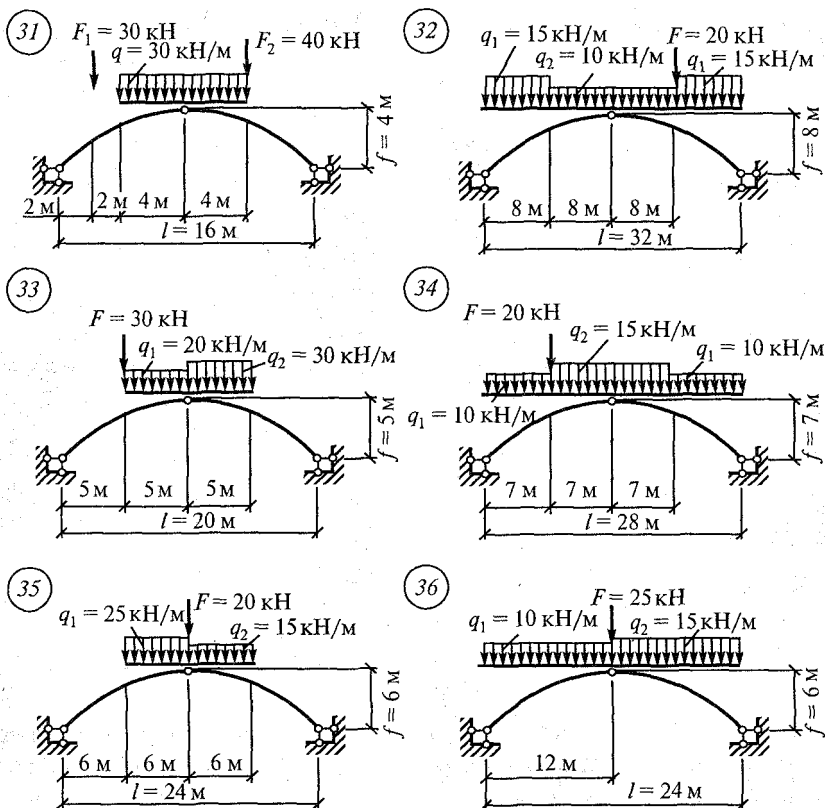


Рис. 50. Окончание

Уравнение оси арки

$$y = -\frac{1}{8}(3l - \sqrt{9l^2 + 64lx - 64x^2});$$

первая производная

$$y' = \frac{4(l - 2x)}{\sqrt{9l^2 - 64lx - 64x^2}}.$$

6.2. Графическое определение усилий в стержнях плоской фермы построением диаграммы Максвелла — Кремоны

1. Определяют расчетные нагрузки на 1 м^2 покрытия. Расчетная нагрузка равна произведению нормативной нагрузки на коэффициент перегрузки. Нормативную нагрузку, в свою очередь, опре-

деляют по правилам, приведенным в строительных нормах. Определение ее выходит за рамки задачи, поэтому нормативная постоянная g_n и нормативная временная (снеговая) s_n нагрузки приводятся в условии задачи.

Правила определения расчетных нагрузок также приводятся в строительных нормах. Порядок их определения следующий. Расчетная постоянная нагрузка g_d равна произведению нормативной нагрузки g_n на коэффициент надежности по постоянной нагрузке γ_g :

$$g_d = g_n \gamma_g$$

Расчетная временная нагрузка s_d равна произведению нормативной нагрузки s_n на коэффициент надежности по временной нагрузке γ_s :

$$s_d = s_n \gamma_s$$

Полная нагрузка равна сумме постоянной и временной нагрузок. Полная нормативная нагрузка

$$q_n = g_n + s_n$$

Полная расчетная нагрузка

$$q_d = g_d + s_d$$

Все эти нагрузки являются распределенными на 1 м^2 покрытия.

2. *Определяют узловые нагрузки*, т. е. нагрузки, приходящиеся на один узел фермы. Узловая нагрузка является сосредоточенной и равна произведению распределенной нагрузки на грузовую площадь, приходящуюся на этот узел. Например, полная нагрузка на один узел

$$F = q_d A_{\text{груз}},$$

где q_d — полная расчетная распределенная нагрузка на 1 м^2 покрытия; $A_{\text{груз}}$ — площадь покрытия, с которой собирается нагрузка на узел.

Грузовая площадь в общем случае определяется по формуле

$$A_{\text{груз}} = bd,$$

где b — шаг ферм или расстояние между смежными фермами; d — панель верхнего пояса фермы, или расстояние между серединами стержней пояса, примыкающих к узлу.

Грузовые площади могут быть одинаковыми для всех промежуточных узлов или разными. Следовательно, узловые силы тоже могут быть одинаковыми или разными.

3. *Дальнейшее решение ведется по методике самостоятельной работы 9.* В данном задании схемы ферм приближены к строительной практике и являются более сложными, чем задание 9.

Проверка решения может быть выполнена любым аналитическим способом.

Пример 34. Определить усилия в стержнях от полной расчетной нагрузки на всей ферме путем построения диаграммы Максвелла — Кремоны, если $g_n = 0,3 \text{ кН/м}^2$, $s_n = 0,2 \text{ кН/м}^2$, $\gamma_g = 1,1$, $\gamma_s = 1,4$, шаг ферм $b = 6 \text{ м}$ (рис. 51, а).

Решение. 1. *Определим расчетную нагрузку на 1 м²:*

расчетная постоянная

$$g_d = g_n \gamma_g = 0,3 \cdot 1,1 = 0,33 \text{ кН/м}^2;$$

расчетная временная

$$s_d = s_n \gamma_s = 0,2 \cdot 1,4 = 0,28 \text{ кН/м}^2;$$

полная расчетная

$$q_d = g_d + s_d = 0,33 + 0,28 = 0,61 \text{ кН/м}^2.$$

2. *Определим узловые нагрузки:*

на крайний узел D

$$F_1 = q_d b d / 2 = q \frac{db}{2};$$

на 2-, 3- и 4-й узлы E , L и M

$$F_2 = q_d db;$$

на 5-й узел R

$$F_3 = q_d b \frac{3}{2} d = \frac{3qbd}{2};$$

на коньковый узел H

$$F_4 = q_d b \cdot 2d = 2q_d db.$$

На правой половине фермы силы симметричны силам левой половины. Все силы кратны F_1 . Обозначим величину $q_d db = 0,61 \cdot 6 \cdot 3 = 10,98 \text{ кН}$ через F , тогда

$$F_1 = F/2; F_2 = F; F_3 = 3F/2; F_4 = 2F.$$

Приложим эти силы в соответствующих узлах (см. рис. 51, а).

3. *Вычертим геометрическую схему фермы в масштабе 1:600, т.е. в 1 см — 6 м, как показано на рис. 51, а.*

4. *Обозначим поля:*

внешние: $a, b, c, d, e, f, f', e', d', c', b', a', k$;

внутренние: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8', 7', 6', 5', 4', 3', 2', 1'$.

5. *Определим опорные реакции:*

а) выберем масштаб сил: в 0,5 см 10,98 кН или в 1 см 21,96 кН;

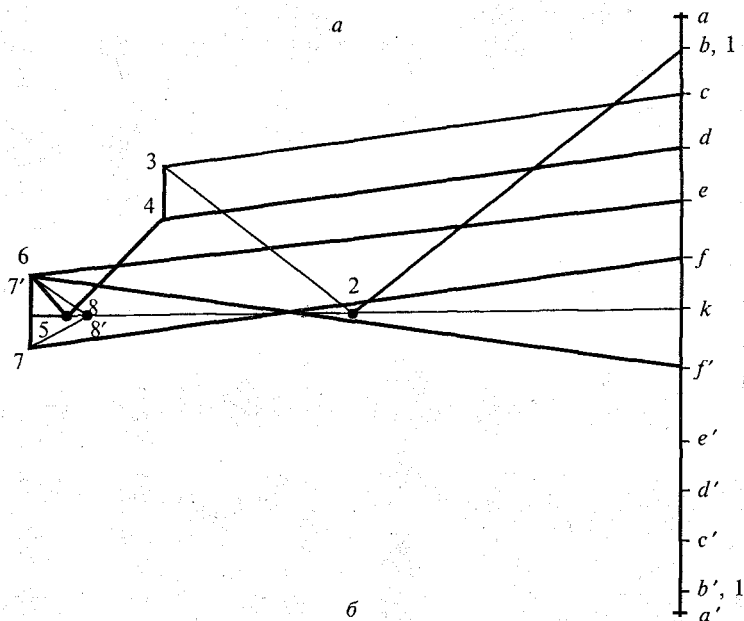
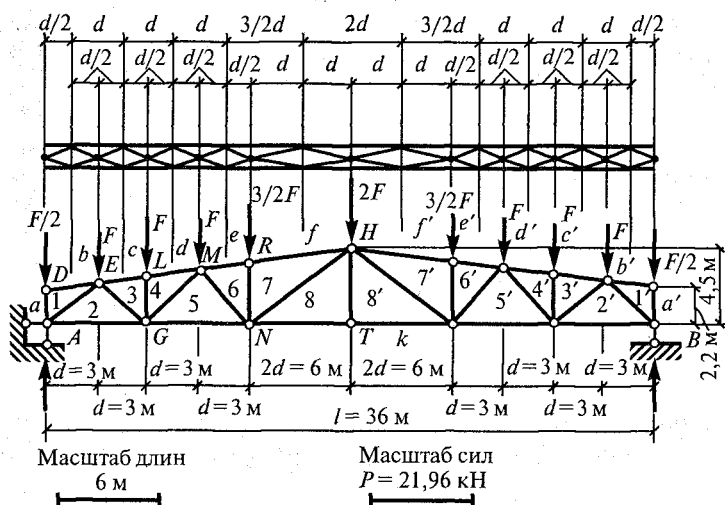


Рис. 51

б) строим силовую линию $a-b-c-d-e-f-f'-e'-d'-c'-b'-a'$ (рис. 51, б);

в) разделим эту линию пополам точкой k , расположенной между точками f и f' . Отрезок $a'k$, измеренный в масштабе сил, является правой опорной реакцией, отрезок ka — левой. Они одинаковы, и каждая равна $6F = 6 \cdot 10,98 = 65,88 \text{ кН}$.

6. Строим диаграмму усилий:

а) мысленно вырезаем узел D , в котором сходятся два стержня $b-1$ и $1-a$. На силовой линии уже есть точки a и b .

Проведем через них линии, параллельные стержням $b-1$ и $1-a$, они пересекутся в точке b ; здесь же должна лежать точка 1. Усилие $1-a$ равно силе $F_1 = F/2 = 5,49$ кН, а усилие $b-1$ равно нулю. Стержень $1-a$ сжат, так как усилие $1-a$ направлено к узлу (вверх);

б) вырезаем узел A , в котором сходятся два стержня $1-2$ и $2-k$, усилия в которых не известны. На диаграмме уже есть точки 1 и k . Проведем через точку 1 линию, параллельную стержню $2-k$, до взаимного пересечения в точке, которую обозначим 2. Отрезок $1-2$ равен 4,35 см, следовательно, усилие в стержне $1-2$ равно $4,35 \cdot 21,96 = 95,53$ кН. Отрезок $2-k$ равен 3,3 см, усилие $2-k$ равно $3,3 \cdot 21,96 = 72,47$ кН. Определим знак усилия $1-2$. На схеме стержень читается $1-2$; на диаграмме движение от точки 1 к точке 2 направлено вниз по линии $1-2$. Перенесем это движение на стержень $1-2$, оно направлено к узлу, значит стержень сжат. Определим знак усилия $2-k$: стержень на схеме фермы читается $2-k$; на диаграмме усилий движение от точки 2 к точке k направлено слева направо. Перенесем это движение на стержень $2-k$, оно направлено от узла, т.е. стержень растянут;

в) рассмотрим узел E , в котором сходятся два стержня $c-3$ и $3-2$, усилия в которых не известны. На диаграмме усилий уже есть точки c и 2. Проведем через точку c линию, параллельную стержню $c-3$, а через точку 2 — линию, параллельную стержню $3-2$, до взаимного пересечения в точке, которую обозначим 3. Длина отрезка $c-3$ равна 5,15 см; усилие $c-3$ равно $5,15 \cdot 21,96 = 113,09$ кН. Длина отрезка $3-2$ равна 2,4 см, усилие в стержне $3-2$ равно $2,4 \cdot 21,96 = 52,7$ кН. Определим знак усилия $c-3$: стержень читается $c-3$, на диаграмме движение от точки c к точке 3 направлено справа налево. Перенесем это движение на стержень $c-3$, оно направлено к узлу, т.е. стержень сжат. Определим знак усилия $3-2$: стержень читается $3-2$, на диаграмме движение от точки 3 к точке 2 направлено слева направо (по усилию); перенесем это движение на стержень $3-2$; оно направлено от узла — стержень растянут;

г) рассмотрим узел L , где сходятся стержни $d-4$ и $4-3$, усилия в которых не известны. На диаграмме через точки d и 3 проводим линии, параллельные стержням $4-3$ и $d-4$, получим точку 4. Усилие $d-4$ равно $5,15 \cdot 21,96 = 113,09$ кН, усилие $4-3$ равно $0,5 \cdot 21,96 = 10,98$ кН. Оба стержня сжаты;

д) рассмотрим узлы G , M , N , H , T и, рассуждая по приведенной схеме (см. самостоятельную работу 10), определим величины и знаки усилий в остальных стержнях.

По результатам решения составляем таблицу усилий (табл. 3).

Таблица 3

Усилия в стержнях фермы, кН

Стержень	<i>a</i> —1	<i>b</i> —1	1—2	<i>k</i> —2	<i>c</i> —3	2—3
Усилие, кН	—5,49	0	—95,53	72,47	—113,09	52,7

Стержень	3—4	<i>d</i> —4	4—5	5— <i>k</i>	<i>e</i> —6	
Усилие, кН	—10,98	—113,09	—32,39	133,41	—142,19	

Стержень	6—5	6—7	<i>f</i> —7	7—8	8— <i>k</i>	8—8
Усилие, кН	11,53	—16,47	—142,19	—12,63	130,66	0

Проверим правильность найденных усилий каким-либо аналитическим способом, например способом сквозных сечений или способом моментной точки. Это дает возможность проверить усилие в любом стержне без определения усилий в других стержнях. Проверим, например, усилия в трех стержнях *MR*, *MN* и *GN* (при графическом решении они были обозначены соответственно *e*—6, 6—5 и 5—*f*). Обозначим усилия в указанных стержнях S_{MR} , S_{MN} и S_{GN} .

Рассечем ферму сечением 1—1 на две части (рис. 52, *a*) так, чтобы оно пересекло стержни, усилия в которых определяются. При определении каждого усилия указывается так называемая моментная точка, т.е. такая точка, в которой пересекаются все стержни (или линии их действия), кроме стержня, в котором находится усилие. Относительно этой точки составляется сумма моментов всех сил, расположенных на одной части фермы (левой или правой).

Определим усилие в стержне *GN*. Моментной точкой для определения усилия S_{GN} является точка *M* (узел *M*). Возьмем сумму моментов всех сил, расположенных на левой части фермы относительно точки *M*:

$$S_{GN} h_1 + 6F \cdot 3d - F/2 \cdot 3d - F \cdot 2d - Fd = 0,$$

где h_1 — плечо усилия S_{GN} относительно точки *M*:

$$h_1 = h_0 + 3d \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2,2 + 3 \cdot 3 \cdot 0,1278 = 3,35 \text{ м},$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4,5 - 2,2}{18} = 0,1278, \quad \alpha = 7^\circ 15'.$$

Подставим числовые значения в уравнение для определения S_{GN} :

$$-S_{GN} \cdot 3,35 + 54F - 4,5F - 6F = 0,$$

$$\text{откуда } S_{GN} = \frac{40,5F}{3,35} = 12,09F.$$

Помня, что $F = 10,98 \text{ кН}$, $S_{GN} = 12,09 \cdot 10,98 = 132,7 \text{ кН}$.

При графическом способе усилие в этом стержне равно $133,4 \text{ кН}$. Погрешность графического способа решения составляет:

$$\frac{133,4 - 132,7}{132,7} 100 = 0,53\%.$$

Определим усилие в стержне MR . Моментной точкой для определения усилия S_{MR} является точка N (рис. 52, б). Составим сумму моментов всех сил, расположенных на правой части фермы относительно точки N :

$$S_{MR} h_2 + 2F 2d + 3/2 F 4d + F 5d + F 6d + F 7d + F/8 d - 6F 8d = 0,$$

где h_2 — плечо усилия S_{MR} относительно точки N :

$$h_2 = NR \cos \alpha = 3,73 \cos 7^\circ 15' = 3,7 \text{ м},$$

где $NR = h_0 + 4d \operatorname{tg} \alpha = 2,2 + 4 \cdot 3 \cdot \operatorname{tg} 7^\circ 15' = 3,73 \text{ м}$.

Подставим числовые значения в уравнение для определения

$$-S_{MR} \cdot 3,7 + 12F + 18F + 15F + 18F + 21F + 12F - 144F = 0,$$

откуда $S_{MR} = -48F/3,7 = -12,97F$,

или $S_{MR} = -12,97 \cdot 10,98 = -142,3 \text{ кН}$, так как $F = 10,98 \text{ кН}$.

Погрешность вычислений при графическом способе составила:

$$\frac{142,3 - 142,19}{142,3} 100\% = 0,17\%.$$

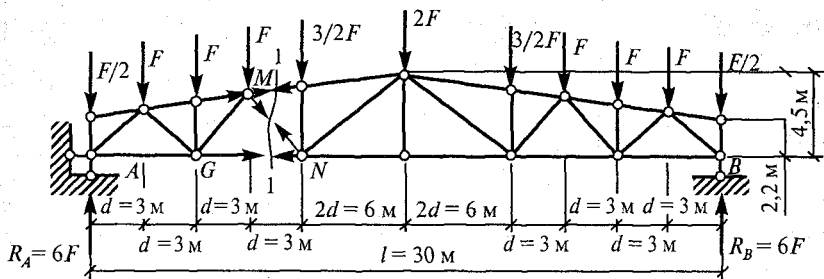
Определим усилие в раскосе MN . Моментной точкой для определения усилия S_{MN} будет точка пересечения линий, являющихся продолжением верхнего и нижнего поясов (или усилия S_{MR} и S_{GN}) — точка O (рис. 52, в). Составим сумму моментов всех сил, расположенных на левой части фермы относительно точки O :

$$S_{MN} h_3 + Fl_1 + F(l_1 - d) + F(l_1 - 2d) + \frac{F}{2}(l_1 - 3d) - \\ - 6F(l_1 - 3d) = 0,$$

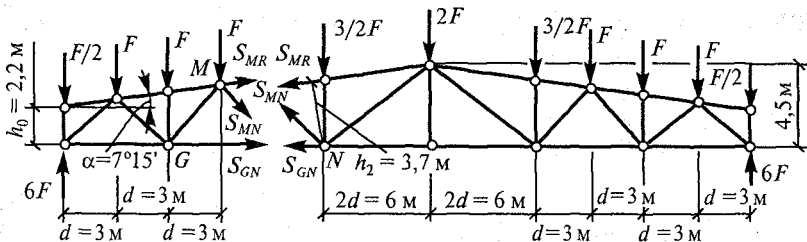
где h_3 — плечо усилия S_{MN} относительно точки O :

$$h_3 = (l_1 + d) \cos \gamma = (26,21 + 3) \cos 41^\circ 58' = 21,72 \text{ м},$$

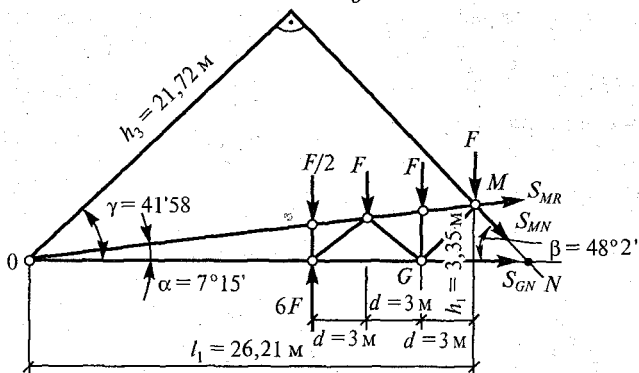
где $\gamma = 90^\circ - \beta = 90 - 48^\circ 2' = 41^\circ 58'$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{3,35}{3} = 1,117$;



a



б



в

Рис. 52

$$\beta = 48^\circ 2'; l_1 = \frac{h_1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3,35}{0,1278} = 26,21 \text{ м.}$$

Подставим числовые значения в формулу для определения S_{MN} :

$$S_{MN} \cdot 21,72 + F \cdot 26,21 + F \cdot 23,31 + F \cdot 20,21 + \frac{F}{2} 17,21 - 6F \cdot 17,21 = 0,$$

откуда $S_{MN} = 25,03/21,72 = -1,152F$,

или $S_{MN} = -1,152 \cdot 10,98 = -12,65 \text{ кН.}$

При графическом способе решения усилие в этом стержне получилось равным $-12,63$ кН.

Задание для расчетно-графической работы 9. Определить усилия в стержнях фермы от полной расчетной нагрузки на всей ферме путем построения диаграммы Максвелла—Кремоны и проверить усилия в одном (двух) стержнях способом сквозных сечений по данным одного из вариантов, показанных на рис. 53. Для четных вариантов принять: $g_n = 1,2 \text{ кН/м}^2$, $s_n = 1,5 \text{ кН/м}^2$; для нечетных вариантов — $g_n = 0,8 \text{ кН/м}^2$, $s_n = 1,0 \text{ кН/м}^2$. Для всех вариантов принять $\gamma_g = 1,1$, $\gamma_s = 1,4$, шаг ферм — 6 м.

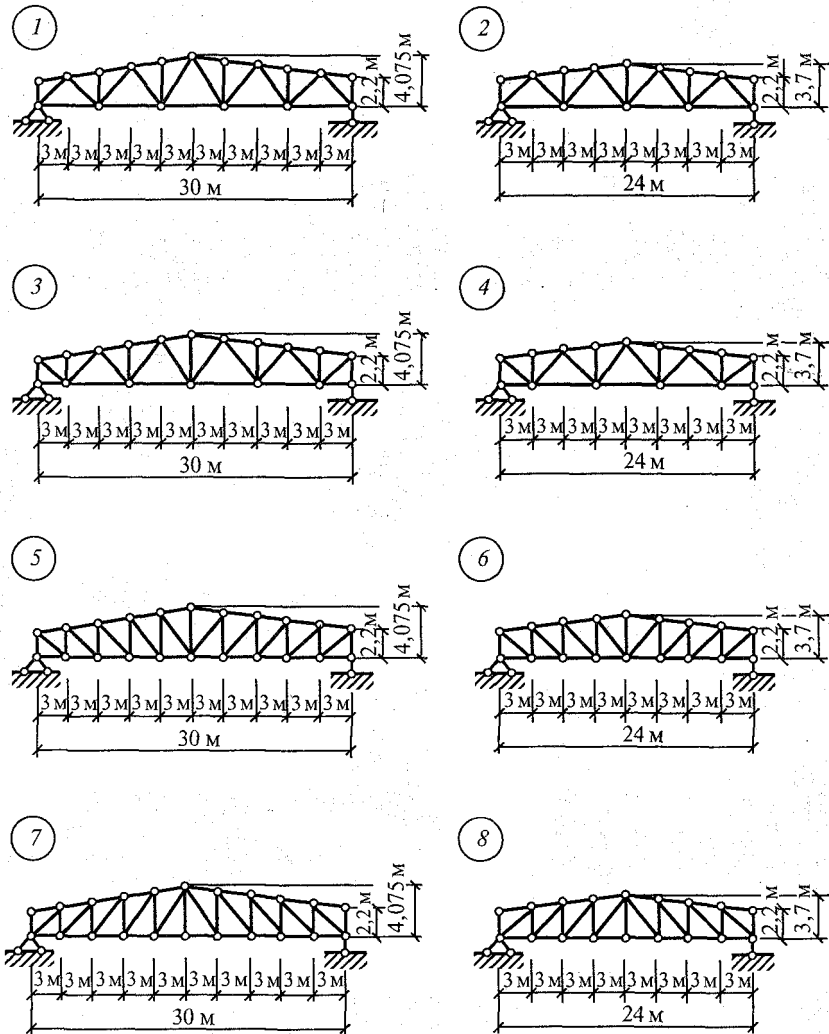


Рис. 53

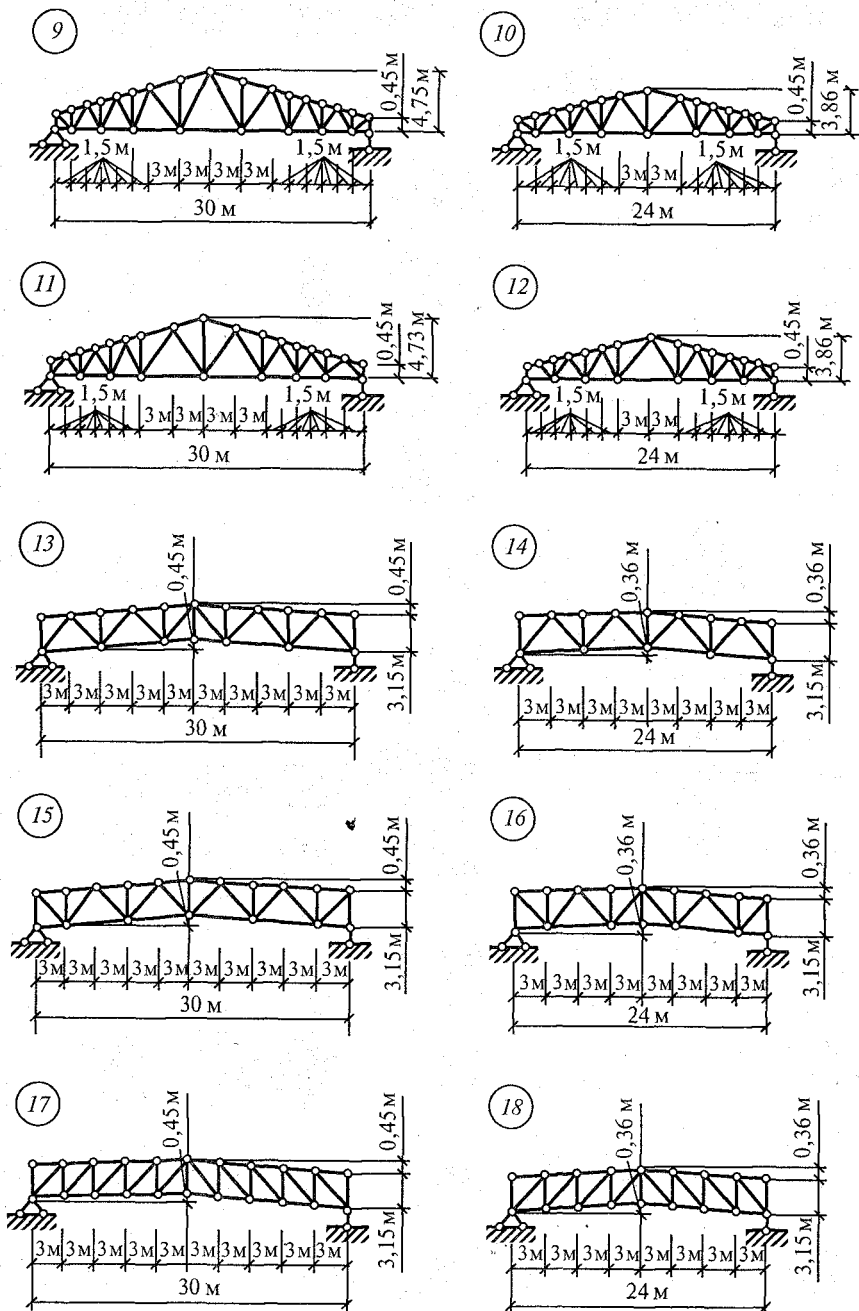


Рис. 53. Продолжение

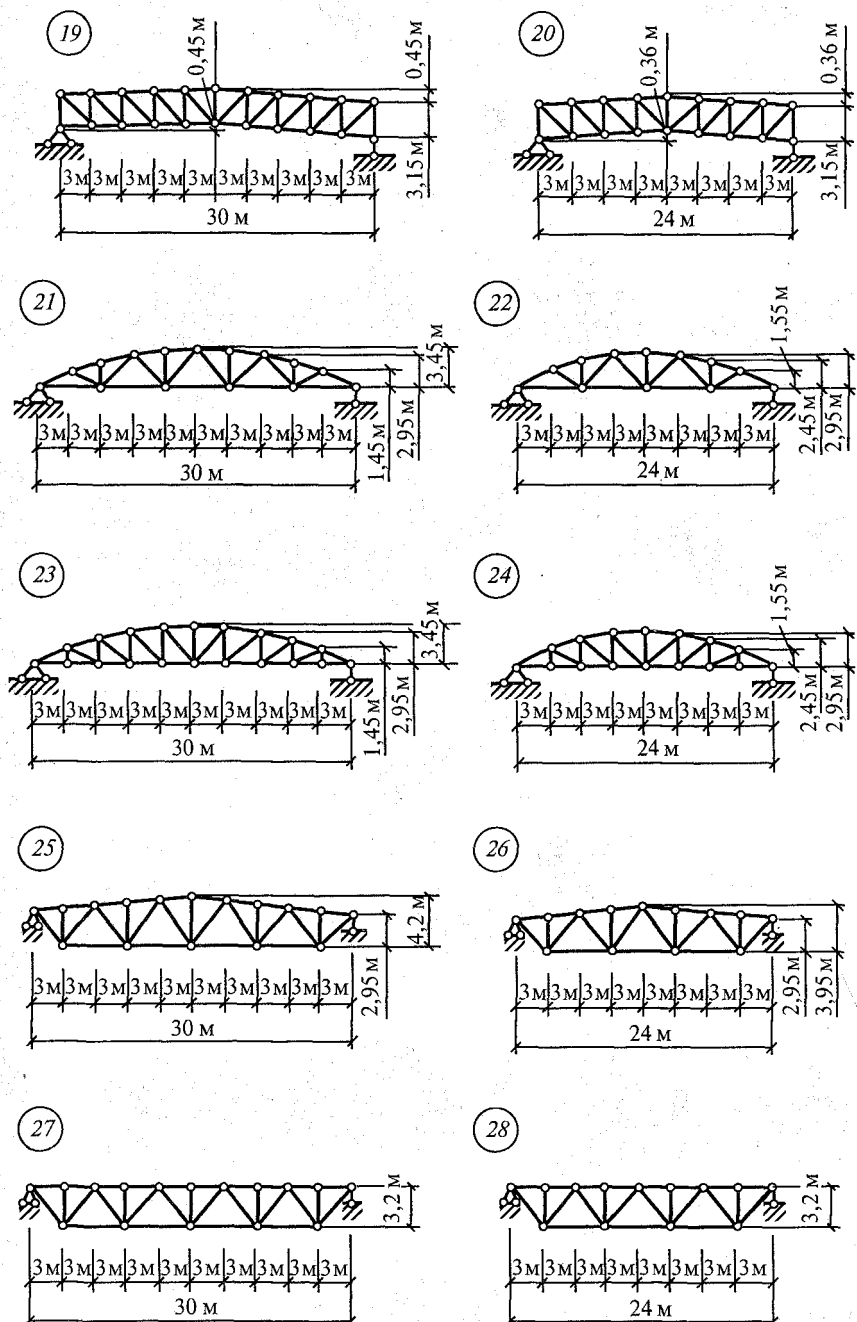


Рис. 53. Продолжение

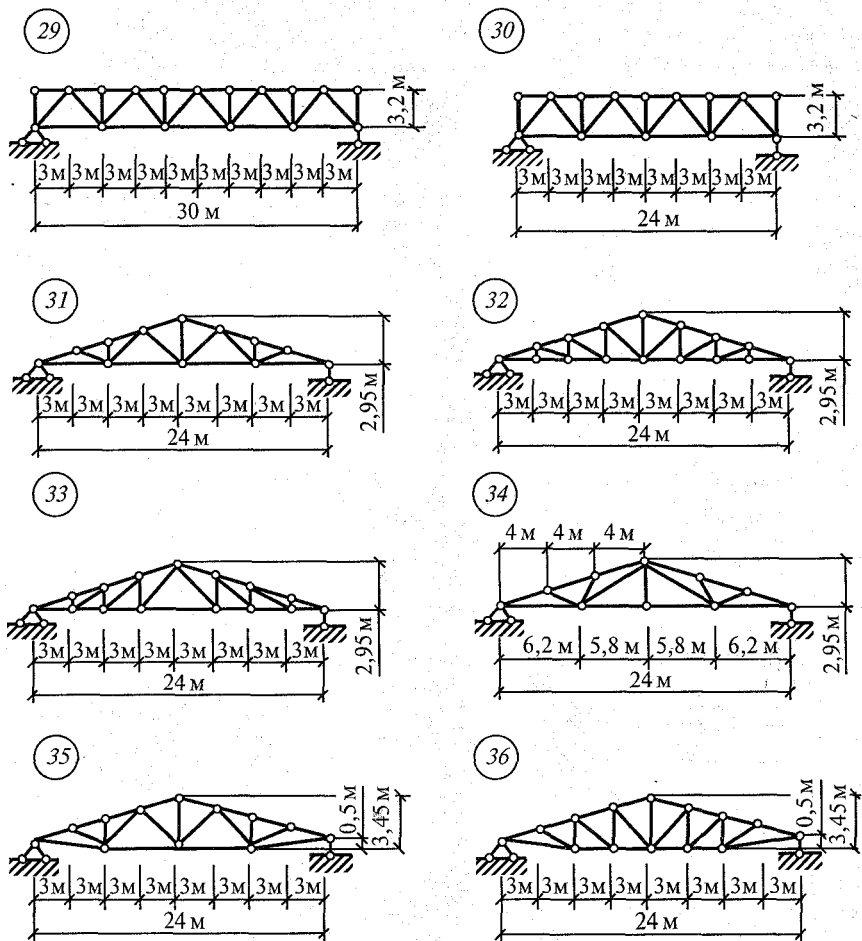


Рис. 53. Окончание

6.3. Расчет статически неопределимой рамы

1. *Определяют степень статической неопределимости системы:*

$$Л = 2Ш + C_{оп} - 3Д,$$

где Ш — число промежуточных шарниров в раме; $C_{оп}$ — число опорных стержней, крепящих раму к основанию; шарнирно-подвижная опора имеет один опорный стержень, шарнирно-неподвижная опора имеет два опорных стержня.

но-неподвижная — два, жесткая защемляющая — три; D — число жестких дисков, образующих систему.

Степень статической неопределимости системы равна числу лишних связей. В задачах для расчетно-графической работы приведены дважды статически неопределимые рамы. В этом следует убедиться.

2. *Выбирают основную систему*, которую лучше иметь статически определимой. Для этого необходимо отбросить лишние связи и заменить их действие неизвестными пока реакциями. В задачах для расчетной графической работы есть возможность основную систему получить в виде консольной рамы или бруса с ломаной осью, отбрасывая две связи и заменяя их действие реакциями, которые обозначают X_1 и X_2 .

3. *Определяют изгибающие моменты в характерных точках от заданной нагрузки для основной системы* и строят эпюру моментов. Эта эпюра называется грузовой и обозначается M_F .

4. *Строят эпюры моментов от единичных сил* $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$. Эти эпюры называются единичными и обозначаются \bar{M}_1 и \bar{M}_2 .

5. *Составляют канонические уравнения метода сил*. Число уравнений зависит от степени статической неопределимости системы (числа неизвестных). Для системы с двумя неизвестными уравнения принимают вид:

$$1) \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$2) \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Определяют коэффициенты при неизвестных путем перемножения единичных эпюр и свободные члены путем перемножения единичных эпюр на грузовую эпюру. При этом следует пользоваться прил. V. Из уравнений находят неизвестные X_1 и X_2 .

6. *Строят эпюры моментов от найденных сил* M_{X_1} и M_{X_2} , умножая значения эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 на X_1 и X_2 .

7. *Определяют изгибающие моменты в характерных точках от заданной нагрузки для заданной системы* путем суммирования значений моментов эпюр M_F , M_{X_1} и M_{X_2} .

На этом решение задачи заканчивается. Построение эпюр Q_x , N_x и выполнение деформационной проверки выходит за рамки задачи. Они могут быть построены по правилам, приведенным в самостоятельной работе 8.

Пример 35. Построить эпюру M_x для рамы, показанной на рис. 54, а.

Решение. 1. *Определяем степень статической неопределимости заданной системы:*

$$Л = 2Ш + C_{оп} - 3Д = 2 \cdot 0 + 5 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Рама имеет две лишние связи и является дважды статически неопределимой.

2. *Выбираем основную систему.* Отбросим правую опору, имеющую две связи (два опорных стержня). Основная система — статически определяемая консольная рама. Заменим действие отброшенных связей двумя силами X_1 и X_2 , пока неизвестными (рис. 54, б).

3. *Определяем величины изгибающих моментов в характерных точках от заданной нагрузки для основной системы.*

Стойка BD :

$$M_B = 0; \quad M_K = 0;$$

$$M_D = -Fh/2 = -30 \cdot 3 = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ригель CD :

$$M_D = -Fh/2 = -30 \cdot 3 = -90 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = -Fh/2 - \frac{ql^2}{2} = -30 \cdot 3 - \frac{20 \cdot 6^2}{2} = -90 - 360 = -450 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Изгибающий момент в середине ригеля

$$M_{x=3\text{м}} = -Fh/2 - ql/2l/4 = -90 - \frac{20 \cdot 6^2}{8} = -180 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Стойка AC :

$$M_C = -450 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_A = Fh/2 - ql^2/2 = 30 \cdot 3 - \frac{20 \cdot 6^2}{2} = 90 - 360 = -270 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_F (рис. 54, в).

4. *Определяем моменты в характерных точках от единичных сил*
 $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$:

а) от силы $\bar{X}_1 = 1$.

Стойка BD :

$$\bar{M}_B = \bar{M}_K = \bar{M}_D = 0.$$

Ригель CD :

$$\bar{M}_D = 0; \quad \bar{M}_C = X_1 l = 1 \cdot 6 = 6 \text{ м};$$

Стойка AC :

$$\bar{M}_C = \bar{M}_A = \bar{X}_1 l = 1 \cdot 6 = 6 \text{ м}.$$

По найденным значениям строим эпюру \bar{M}_1 (рис. 54, г);

б) от силы $\bar{X}_2 = 1$.

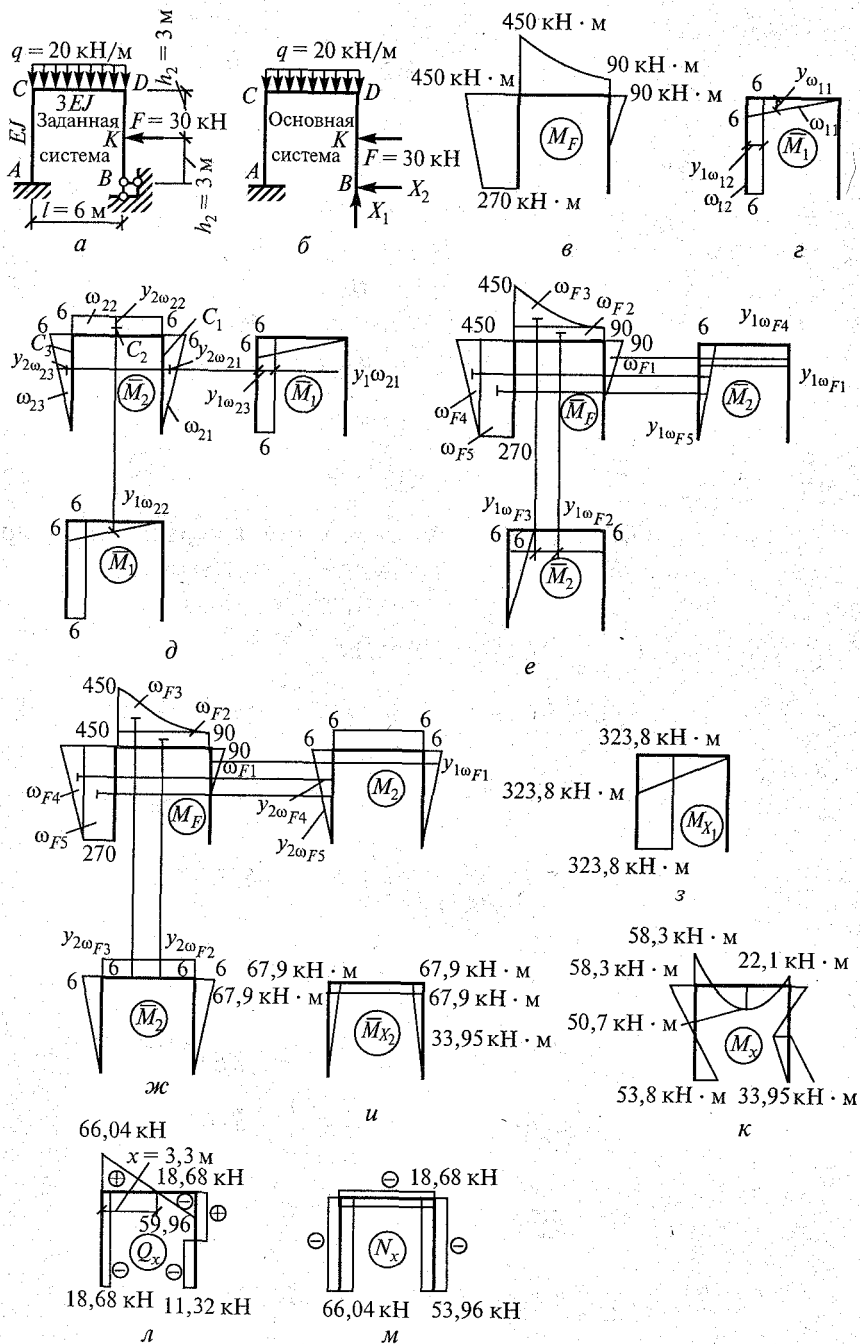


Рис. 54

Стойка BD :

$$\overline{M}_B = 0; \overline{M}_K = -\overline{X}_2 h/2 = -1 \cdot 3 = -3 \text{ м.}$$

$$\overline{M}_D = -\overline{X}_2 h = -1 \cdot 6 = -6 \text{ м.}$$

Ригель CD :

$$\overline{M}_D = \overline{M}_C = -6 \text{ м;}$$

Стойка AC :

$$\overline{M}_C = 6 \cdot 1 \text{ м; } \overline{M}_A = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру \overline{M}_2 (рис. 54, ∂).

5. Составляем канонические уравнения метода сил:

$$1) \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$2) \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Пользуясь данными прил. V, определим коэффициенты при δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} , δ_{21} при X_1 и X_2 и свободные члены Δ_{1F} и Δ_{2F} :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{3EJ} \omega_{11} y_{1\omega_{11}} + \frac{1}{EJ} \omega_{12} y_{1\omega_{12}} = \\ &= \frac{1}{3EJ} \left(\frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 \right) + \frac{1}{EJ} 6 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{240}{EJ} \text{ (рис. 54, } \varepsilon); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EJ} \omega_{21} y_{2\omega_{21}} + \frac{1}{3EJ} \omega_{22} y_{2\omega_{22}} + \frac{1}{EJ} \omega_{23} y_{2\omega_{23}} = \\ &= \frac{1}{EJ} 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{3} 6 + \frac{1}{3EJ} 6 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{EJ} 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 = \\ &= \frac{72 + 72 + 72}{EJ} = \frac{216}{EJ} \text{ (рис. 54, } \partial); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EJ} \omega_{21} y_{1\omega_{21}} - \frac{1}{3EJ} \omega_{22} y_{1\omega_{22}} - \frac{1}{3EJ} \omega_{23} y_{1\omega_{23}} = \\ &= \frac{1}{EJ} 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{3EJ} 6 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} - \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \cdot 6 = \\ &= 0 - \frac{36}{EJ} - \frac{108}{EJ} = -\frac{144}{EJ} \text{ (рис. 54, } \partial); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EJ} \omega_{F1} y_{1\omega_{F1}} - \frac{1}{3EJ} (\omega_{F2} y_{1\omega_{F2}} + \omega_{F3} y_{1\omega_{F3}}) - \\ &- \frac{1}{EJ} (\omega_{F4} y_{1\omega_{F4}} + \omega_{F5} y_{1\omega_{F5}}) = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 90 \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times 3 \cdot 0 - \frac{1}{3EJ} \left(90 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{3} 360 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} 6 \right) - \frac{1}{EJ} \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} 180 \cdot 6 \cdot 6 + 270 \cdot 6 \cdot 6 \right) = \frac{-1620 - 12960}{EJ} = \\ & = -\frac{14580}{EJ} \text{ (рис. 54, e);} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \frac{1}{EJ} \omega_{F1} y_{2\omega_{F1}} + \frac{1}{3EJ} (\omega_{F2} y_{2\omega_{F2}} + \omega_{F3} y_{2\omega_{F3}}) + \\ &+ \frac{1}{EJ} (\omega_{F4} y_{2\omega_{F4}} + \omega_{F5} y_{2\omega_{F5}}) = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 90 \cdot 3 \cdot \frac{5}{6} 6 + \\ &+ \frac{1}{3EJ} \left(90 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{3} 360 \cdot 6 \cdot 6 \right) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} 180 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 6 + 270 \cdot 6 \cdot \frac{6}{2} \right) = \\ &= \frac{675 + 2560 + 7020}{EJ} = \frac{10215}{EJ} \text{ (рис. 54, ж).} \end{aligned}$$

Подставим полученные значения в канонические уравнения:

$$240X_1 - 144X_2 - 14580 = 0; \quad -144X_1 + 216X_2 + 10215 = 0.$$

Решив систему уравнений, получим:

$$X_1 = 53,96 \text{ кН}; \quad X_2 = -11,32 \text{ кН}.$$

Знак «минус» перед значением силы X_2 означает, что она в действительности направлена в сторону, противоположную показанной на рис. 54, б.

6. Строим эпюры изгибающих моментов от сил X_1 и X_2 , равных не единице, а значениям, полученным из решения уравнений:

а) от силы $X_1 = 53,96$ кН. Величины моментов от этой силы можно получить умножением значений эпюры \bar{M}_1 на 53,96 кН:

$$M_C = 6 \cdot 53,96 = 323,8 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 54, з);}$$

б) от силы $X_2 = -11,32$ кН. Величины моментов от этой силы можно получить умножением значений эпюры \bar{M}_2 на -11,32 кН:

$$M_D = M_C = -6(-11,32) = 67,9 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 54, и).}$$

7. Находим величины изгибающих моментов в характерных точках, суммируя значения моментов эпюр M_F , M_{X_1} и M_{X_2} .

Стойка BD:

$$M_B = 0; \quad M_K = \frac{67,9}{2} = 33,95 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = 67,9 - 90 = -22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ригель CD :

$$M_D = -22,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_C = -450 + 323,8 + 67,9 = -58,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$M_K = -180 + \frac{323,8}{2} + 67,9 = 49,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Стойка AC :

$$M_A = 323,8 - 270 = 53,8 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_C = -58,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис. 54, κ). Значения моментов на ригеле между точками C и D должны быть уточнены после построения эпюры Q_x или путем использования дифференциальных зависимостей между значениями изгибающих моментов и поперечных сил. В данном случае наибольшее значение изгибающего момента на ригеле получается в точке на расстоянии 3,3 м от точки C и равно 50,7 кН·м. Такие действия, как построение эпюр Q_x и N_x и выполнение проверки, выходят за рамки задания. Эпюры Q_x и N_x приведены на рис. 54, λ , μ .

Пример 36. Построить эпюру M_x для рамы, показанной на рис. 55, a .

Решение. 1. *Определим степень статической неопределимости заданной системы:*

$$L = 2Ш + C_{\text{оп}} - 3Д = 2 \cdot 0 + 5 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Рама имеет две лишние связи и является дважды статически неопределимой.

2. *Выберем основную систему.* Отбросим шарнирную опору A , имеющую две связи. Заменим действие отброшенных связей двумя пока неизвестными силами X_1 и X_2 (рис. 55, b).

3. *Определим изгибающие моменты в характерных точках от заданной нагрузки для основной системы.*

Ригель AD :

$$M_A = M_C = 0; M_D = -Fl/2 = -40 \cdot 3 = -120 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Стойка BD :

$$M_D = -120 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_B = -Fl/2 - ql/2 = -40 \cdot 3 - 12 \cdot 6 \cdot 3 = -336 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_K = -Fl/2 - q \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = -40 \cdot 3 - 12 \cdot 3 \cdot 1,5 = -174 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_F (рис. 55, $в$).

4. *Определим значения изгибающих моментов от единичных сил X_1 и X_2 :*

а) от силы $\bar{X}_1 = 1$.

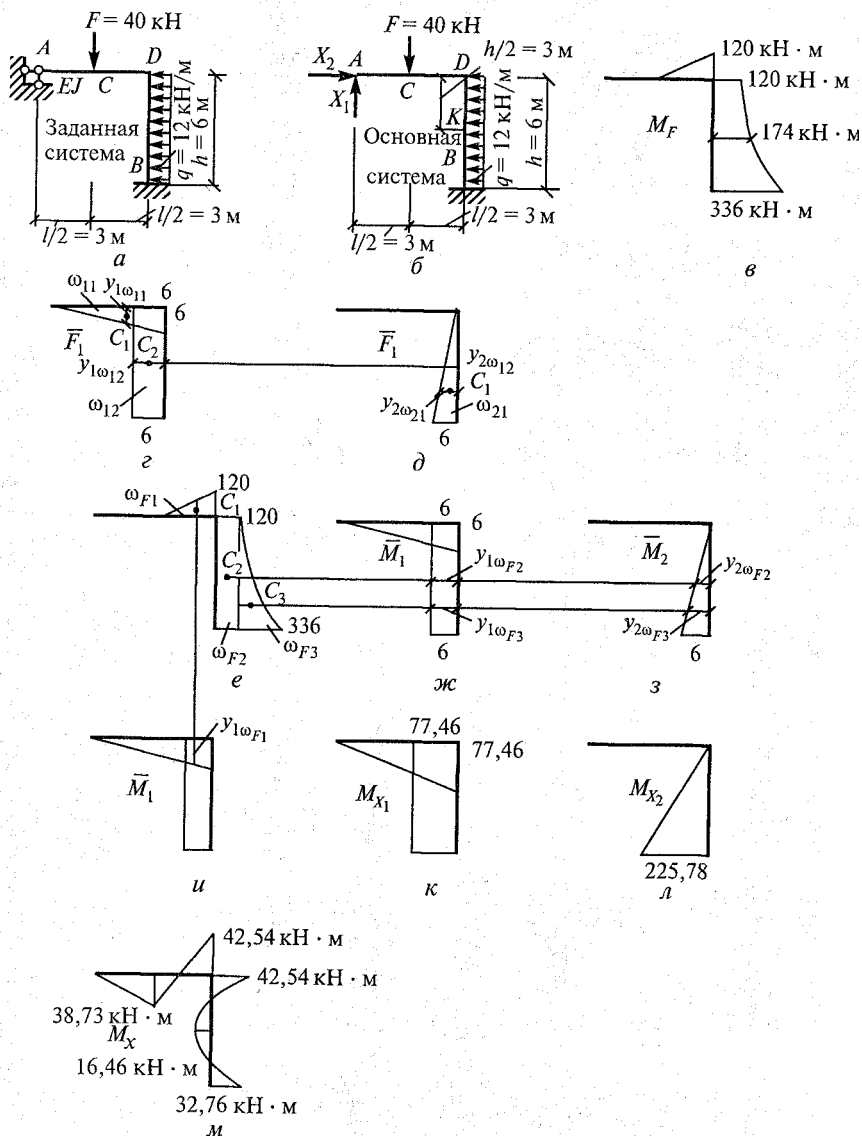


Рис. 55

Ригель AD:

$$\bar{M}_A = 0; \bar{M}_D = \bar{X}_1 l = 1 \cdot 6 = 6 \text{ м.}$$

Стойка BD:

$$\bar{M}_D = 6 \cdot 1 \cdot \text{м}; \bar{M}_A = \bar{X}_1 l = 1 \cdot 6 = 6 \text{ м.}$$

По найденным значениям строим эпюру \overline{M}_1 (рис. 55, з);
 б) от силы $\overline{X}_2 = 1$.

Ригель AD :

$$M_A = \overline{M}_D = 0.$$

Стойка BD :

$$\overline{M}_D = 0; \quad \overline{M}_B = \overline{X}_2 h = 1 \cdot 6 = 6 \text{ м.}$$

По найденным значениям строим эпюру M_2 (рис. 55, д).

5. Составим канонические уравнения метода сил:

$$1) \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$2) \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Пользуясь прил. V, определим коэффициенты δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} при неизвестных X_1 , X_2 и свободные члены Δ_{1F} , Δ_{2F} :

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ} \omega_{11} y_{1\omega_{11}} + \frac{1}{2EJ} \omega_{12} y_{1\omega_{12}} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \frac{2}{3} 6 + \\ &+ \frac{1}{2EJ} 6 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{72 + 108}{EJ} = \frac{180}{EJ} \quad (\text{рис. 55, з}); \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EJ} \omega_{21} y_{2\omega_{21}} + \frac{1}{2EJ} \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \frac{2}{3} 6 = \frac{36}{EJ} \quad (\text{рис. 55, д});$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2EJ} \omega_{12} y_{2\omega_{12}} = \frac{1}{2EJ} 6 \cdot 6 \frac{6}{2} = \frac{54}{EJ} \quad (\text{см. рис. 55, з, д});$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{1}{EJ} \omega_{F1} y_{1\omega_{F1}} - \frac{1}{2EJ} \omega_{F2} y_{1\omega_{F2}} - \frac{1}{2EJ} \omega_{F3} y_{1\omega_{F3}} = \\ &= -\frac{1}{EJ} \frac{1}{2} 120 \cdot 3 \frac{5}{6} 6 - \frac{1}{2EJ} 120 \cdot 6 \cdot 6 - \frac{1}{2EJ} \frac{1}{3} 216 \cdot 6 \cdot 6 = \\ &= -\frac{1}{EJ} (900 + 2160 + 1296) = -\frac{4356}{EJ} \quad (\text{рис. 55, е, ж, и, к}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \frac{1}{2EJ} (\omega_{F2} y_{2\omega_{F2}} + \omega_{F3} y_{2\omega_{F3}}) = \\ &= \frac{1}{2EJ} \left(120 \cdot 6 \frac{6}{2} + \frac{1}{3} 216 \cdot 6 \frac{3}{4} 6 \right) = -\frac{1}{2EJ} (2160 + 1944) = \\ &= -\frac{2052}{EJ} \quad (\text{см. рис. 55, е, и}). \end{aligned}$$

Подставим числовые значения в канонические уравнения

$$180X_1 + 54X_2 - 4356 = 0; \quad 54X_1 + 36X_2 - 2052 = 0.$$

Решив систему уравнений, получим $X_1 = 12,91$ кН; $X_2 = 37,63$ кН.

6. Строим эпюры изгибающих моментов от сил X_1 и X_2 :

а) от силы $X_1 = 12,91$ кН. Величины моментов от этой силы получим, умножив значения моментов эпюры M_1 на 12,91 кН:

$$M_B = M_D = 6 \cdot 12,91 = 77,46 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 55, л);}$$

б) от силы $X_2 = 37,63$ кН. Величины моментов от этой силы получим, умножив значения моментов эпюры M_2 на 37,63 кН:

$$M_B = 6 \cdot 37,63 = 225,78 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 55, м).}$$

7. Определим величины изгибающих моментов в характерных точках заданной системы, суммируя значения изгибающих моментов M_F , M_{X_1} и M_{X_2} в тех же точках.

Ригель AD :

$$M_A = 0; \quad M_C = 38,73 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = -120 + 77,46 = -42,54 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Стойка DB :

$$M_D = -42,54 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_K = -174 + 77,6 + \frac{225,78}{2} = 16,36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = -336 + 77,46 + 225,78 = -32,76 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x от заданной нагрузки для заданной системы (рис. 55, н).

Задание для расчетно-графической работы 10. Построить эпюру M_x для статически неопределимой рамы по данным одного из вариантов, показанных на рис. 56.

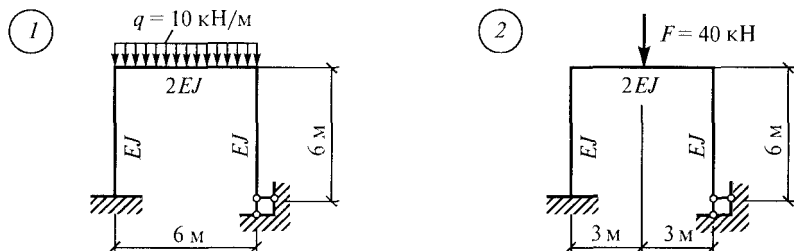


Рис. 56

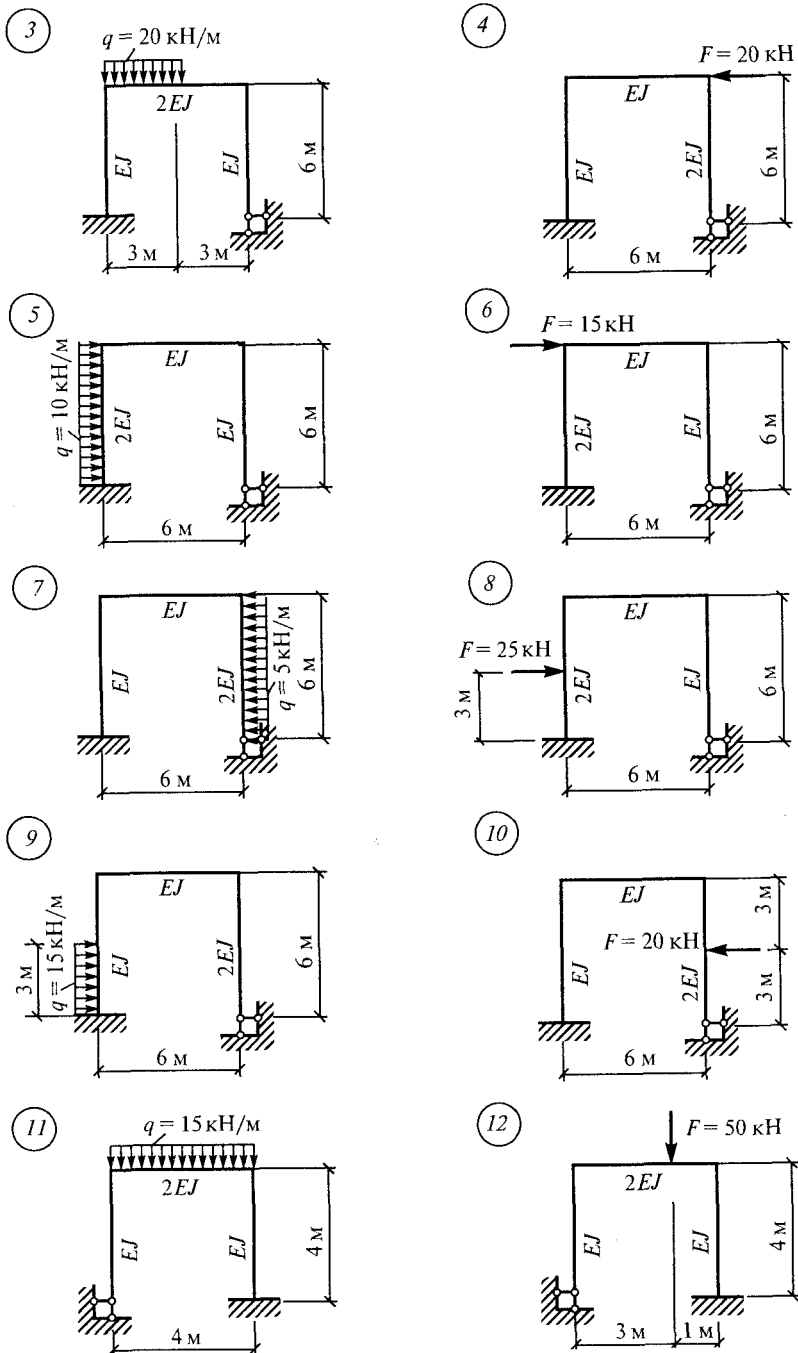


Рис. 56. Продолжение

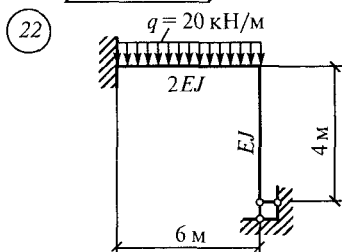
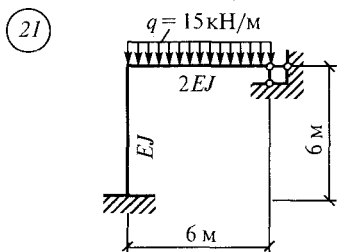
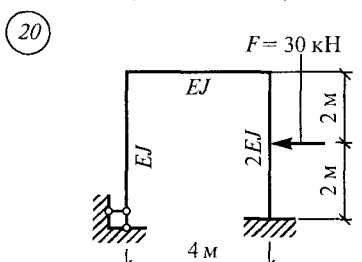
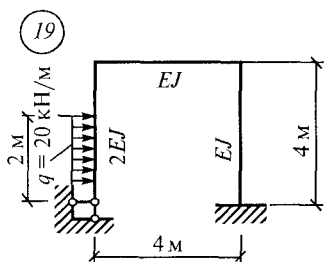
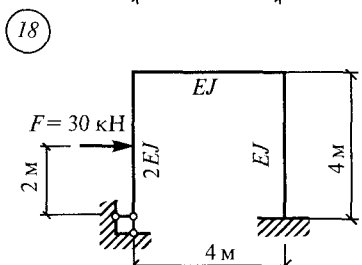
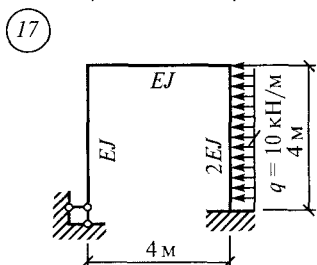
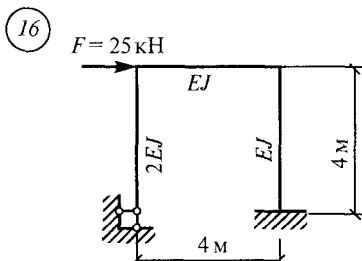
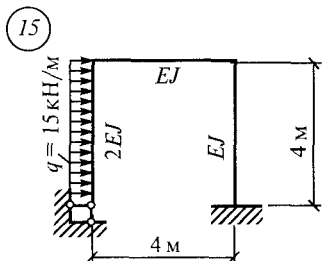
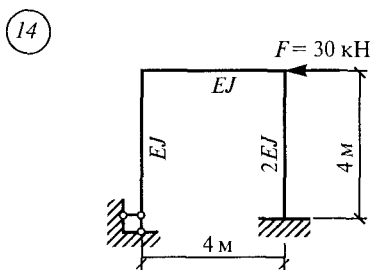
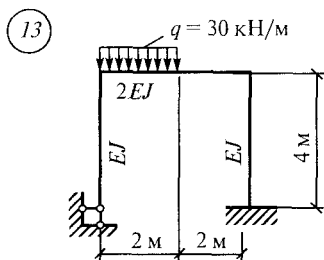


Рис. 56. Продолжение

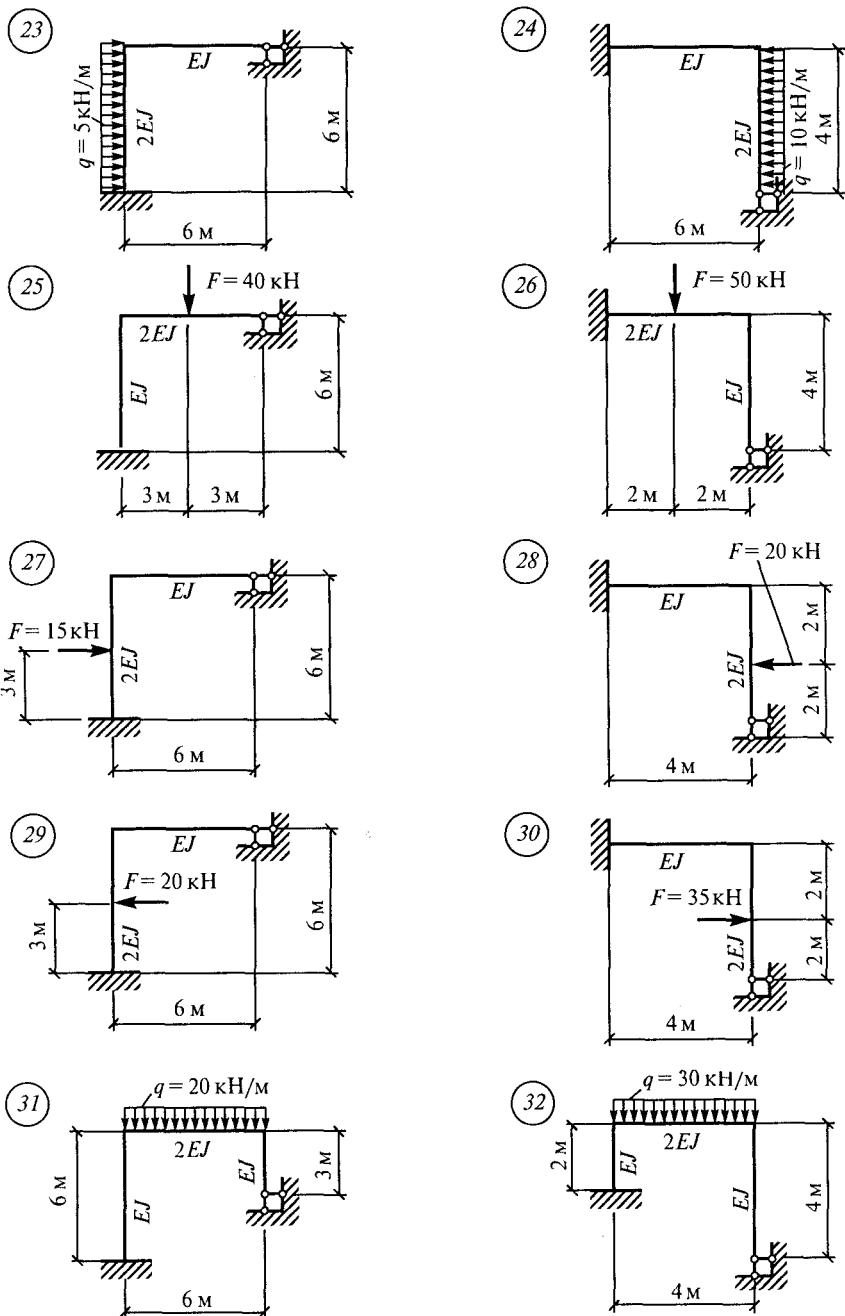


Рис. 56. Продолжение

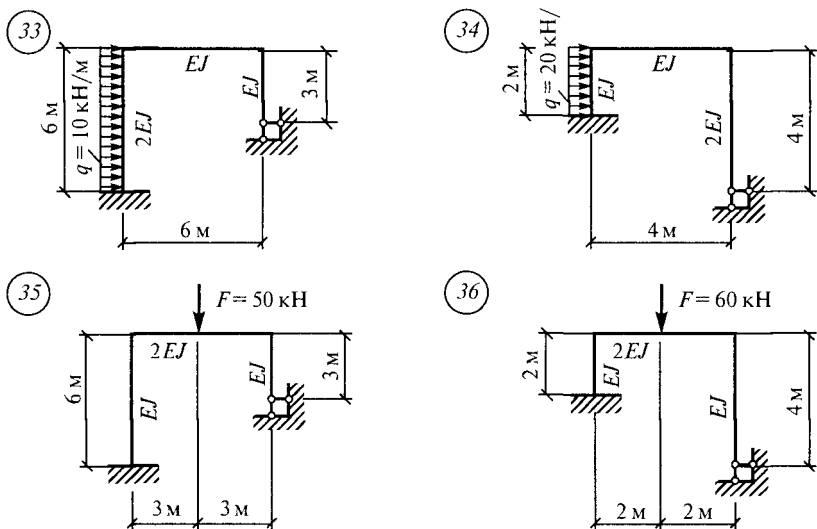


Рис. 56. Окончание

6.4. Расчет неразрезной балки по уравнению трех моментов

К решению задачи рекомендуется приступить после выполнения самостоятельной работы 11. Порядок решения остается таким же.

Пример 37. Построить эпюры Q_x и M_x для неразрезной балки, показанной на рис. 57, а.

Решение. 1. Обозначим пролеты l_1 , l_2 , l_3 и опоры 0, 1, 2, 3.

2. От заданной системы переходим к основной. Вместо опор вводим шарниры и заменяем действие отброшенных связей опорными моментами M_0 , M_1 , M_2 и M_3 . Консоль в основной системе отбросим (рис. 57, б). Фиктивные опорные реакции на основной системе показаны условно.

3. Определим значения изгибающих моментов M_x^0 от заданной нагрузки для основной системы (см. прил. V):

$$M_D^0 = \frac{F a b}{l_1} = \frac{90 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 120 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E^0 = \frac{q_1 l_2^2}{8} = \frac{30 \cdot 4^2}{8} = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_G^0 = \frac{q_2 l_3^2}{8} = \frac{20 \cdot 7^2}{8} = 122,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x^0 (рис. 57, в).

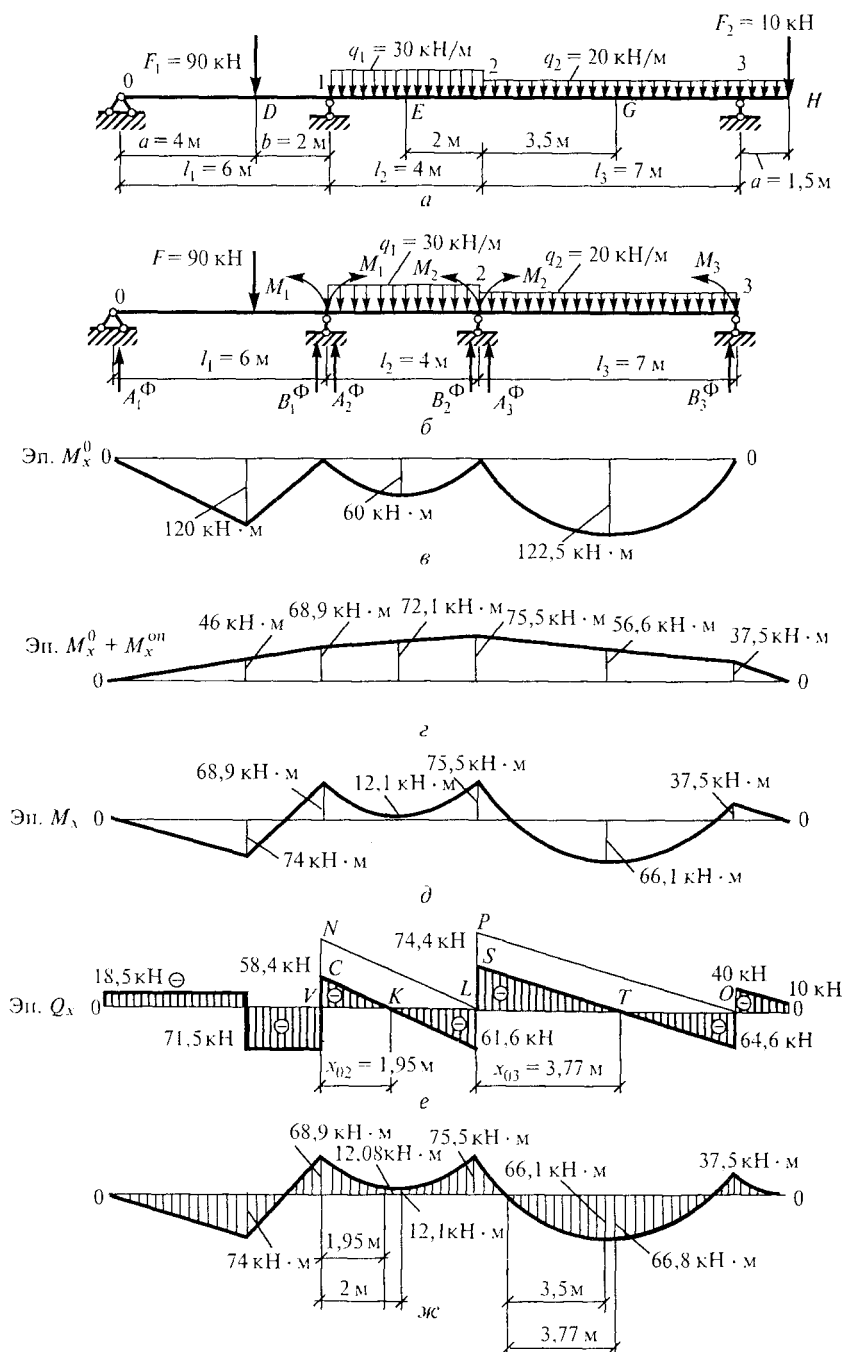


Рис. 57

4. Составим уравнения трех моментов. Таких уравнений будет два для промежуточных опор 1 и 2.

Для опоры 1

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 (B_1^\Phi + A_2^\Phi).$$

Для опоры 2

$$M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6 (B_2^\Phi + A_3^\Phi).$$

В этих уравнениях

$M_0 = 0$, так как опора 0 шарнирная;

$$M_3 = -Fa - \frac{q_2 a^2}{2} = -10 \cdot 1,5 - \frac{20 \cdot 1,5^2}{2} = 37,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$B_1^\Phi, A_2^\Phi, B_2^\Phi$ и A_3^Φ определим по прил. VII;

$$B_1^\Phi = \frac{F_1 ab(l_1 + a)}{6l_1} = \frac{90 \cdot 4 \cdot 2(6 + 4)}{6 \cdot 6} = 200 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$A_2^\Phi = B_2^\Phi = \frac{q_1 l_2^3}{24} = \frac{30 \cdot 4^3}{24} = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$A_3^\Phi = \frac{q_2 l_3^3}{24} = \frac{20 \cdot 7^3}{24} = 285,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Подставим найденные значения в уравнения трех моментов:

$$2M_1 (6 + 4) + M_2 \cdot 4 = -6 (200 + 80);$$

$$M_1 \cdot 4 + 2M_2 (4 + 7) - 37,5 \cdot 7 = -6 (80 + 285,8).$$

После упрощения получим

$$5M_1 + M_2 = -420; \quad 4M_1 + 22M_2 = -1932,5.$$

Решив систему двух уравнений, найдем

$$M_1 = 68,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = -75,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В целях единообразия дальнейших вычислений обозначим эти моменты $M_1^{\text{оп}}$ и $M_2^{\text{оп}}$.

5. По найденным значениям строим эпюру моментов $M_x^{\text{оп}}$ (см. рис. 57, в), откладывая значения моментов $M_1^{\text{оп}}$, $M_2^{\text{оп}}$ и $M_3^{\text{оп}}$ на опорах в отрицательную сторону и соединяя концы отрезков прямыми линиями.

6. Определяем значения изгибающих моментов для заданной системы от заданной нагрузки в характерных точках путем суммирования значений эпюр M_x^0 и $M_x^{\text{оп}}$ (рис. 57, г):

$$M_x = M_x^0 + M_x^{\text{оп}}.$$

На опоре 0

$$M_0^0 = 0; \quad M_0^{\text{оп}} = 0; \quad M_0 = 0;$$

в точке D

$$M_D^0 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_D^{\text{оп}} = \frac{4}{6}(-68,9) = -46 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = 120 - 46 = 74 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на опоре 1

$$M_1^0 = 0; \quad M_1^{\text{оп}} = -68,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_1 = M_1^{\text{оп}} = -68,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке E

$$M_E^0 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_E^{\text{оп}} = -\frac{68,9 + 75,5}{2} = -72,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = 60 - 72,1 = -12,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на опоре 2

$$M_2^0 = 0; \quad M_2^{\text{оп}} = -75,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = M_2^{\text{оп}} = -75,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке G

$$M_G^0 = 122,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_G^{\text{оп}} = -\frac{75,5 + 37,5}{2} = -56,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_G = 122,5 - 56,4 = 66,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на опоре 3

$$M_3^0 = 0; \quad M_3^{\text{оп}} = -37,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_3^{\text{оп}} = -37,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке H

$$M_H^0 = 0; \quad M_H^{\text{оп}} = 0; \quad M_H = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис. 57, д). Значения моментов во втором и третьем пролетах не являются экстремальными. Они будут уточнены после построения эпюры Q_x .

7. Определим значения поперечных сил на n -й опоре по формулам (см. прил. VI):

$$1) Q_n^{\text{лев}} = B_n^0 + \frac{M_n + M_{n-1}}{l_n};$$

$$2) Q_n^{\text{прав}} = A_{n+1}^0 + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}.$$

Пролет 0—1.

На опоре 0

$$\begin{aligned} Q_0^{\text{прав}} &= A_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1} - \frac{Fb}{l_1} + \frac{M_1 - M_0}{l_1} = \\ &= \frac{90 \cdot 2}{6} + \frac{-68,9 - 0}{6} = 18,5 \text{ кН}; \end{aligned}$$

на опоре 1, чуть левее,

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{лев}} &= -B_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1} = -\frac{Fa}{l_1} + \frac{M_1 - M_0}{l_1} = \\ &= -\frac{90 \cdot 4}{6} + \frac{-68,9 - 0}{6} = -71,5 \text{ кН}; \end{aligned}$$

в точке D

$$\begin{aligned} Q_D^{\text{лев}} &= Q_0^{\text{прав}} = 18,5 \text{ кН}; \quad Q_D^{\text{прав}} = Q_D^{\text{лев}} - F_1 = \\ &= 18,5 - 90 = -71,5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

На участках 0D и D1 эпюра Q_x представляет собой прямую линию, параллельную нулевой.

Пролет 1—2.

На опоре 1, чуть правее,

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{прав}} &= A_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{q_1 l_2}{2} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \\ &= \frac{30 \cdot 4}{2} + \frac{-75 + 68,9}{4} = 58,4 \text{ кН}; \end{aligned}$$

на опоре 2, чуть левее,

$$\begin{aligned} Q_2^{\text{лев}} &= -B_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -\frac{q_1 l_2}{2} + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -\frac{30 \cdot 4}{2} + \\ &+ \frac{-75 + 68,9}{4} = -61,6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

В пролете 1—2 эпюра Q_x — прямая линия, наклонная к нулевой и пересекающая ее. Определим положение точки K, в которой эпюра Q_x пересекает нулевую линию. Из подобия треугольников VCK и VNL

$$x_{02} : 4 = 58,4 : 120, \text{ откуда } x_{02} = \frac{58,4 \cdot 4}{120} = 1,95 \text{ м.}$$

Пролет 2—3.

На опоре 2, чуть правее,

$$Q_2^{\text{прав}} = A_3^0 + \frac{M_3 - M_2}{l_3} = -\frac{q_2 l_3}{2} + \frac{M_3 - M_2}{l_3} =$$

$$= \frac{20 \cdot 7}{2} + \frac{-37,5 + 75,5}{7} = 75,4 \text{ кН};$$

на опоре 3, чуть левее,

$$Q_3^{\text{лев}} = -B_3^0 + \frac{M_3 - M_2}{l_3} = -\frac{q_2 l_3}{2} + \frac{M_3 - M_2}{l_3} =$$

$$= -\frac{20 \cdot 7}{2} + \frac{-37,5 + 75,5}{7} = 64,6 \text{ кН}.$$

В пролете 2—3 эпюра Q_x — прямая линия, наклонная к нулевой. Она пересекает нулевую линию в точке T . Определим положение этой точки из подобия треугольников STL и POL :

$$x_{03} : 7 = 75,4 : 140; \text{ откуда } x_{03} = (75,4 \cdot 4) / 140 = 3,77 \text{ м}.$$

Консоль 3—G.

На опоре 3 (чуть правее) поперечную силу найдем из суммы проекций всех правых сил на ось y :

$$Q_3^{\text{прав}} = qa + F_2 = 20 \cdot 1,5 + 10 = 40 \text{ кН}.$$

В точке G

$$Q_G = 10 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру Q_x (рис. 57, e).

8. Определим опорные реакции на опорах:

на опоре 0

$$R_0 = -Q_0^{\text{лев}} + Q_0^{\text{прав}} = 0 + 18,5 = 18,5 \text{ кН};$$

на опоре 1

$$R_1 = -Q_1^{\text{лев}} + Q_1^{\text{прав}} = 71,5 + 58,4 = 129,9 \text{ кН};$$

на опоре 2

$$R_2 = -Q_2^{\text{лев}} + Q_2^{\text{прав}} = 61,6 + 75,4 = 137 \text{ кН};$$

на опоре 3

$$R_3 = -Q_3^{\text{лев}} + Q_3^{\text{прав}} = 64,6 + 40 = 104,6 \text{ кН}.$$

9. Проверим правильность определения опорных реакций по уравнению $\sum Y = 0$ или $18,5 + 129,9 + 137 + 104,6 - 90 - 30 \cdot 4 - 20 \cdot 8,5 - 10 = 0$, откуда $390 - 390 = 0$.

10. Уточним эпюру M_x . Определим изгибающий момент в сечении на расстоянии $x_{02} = 1,95$ м от опоры 1:

$$\begin{aligned} M_{x_{02}} &= R_0(l_1 + x_{02}) - F_1(b + x_{02}) + R_1x_{02} - \frac{qx_{02}^2}{2} = \\ &= 18,5(6 + 1,95) - 90(2 + 1,95) + 129,9 \cdot 1,95 - \\ &\quad - \frac{30 \cdot 1,95^2}{2} = 12,08 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Определим изгибающий момент в сечении на расстоянии $x_{03} = 3,77$ м от опоры 2. Рассмотрим правую часть балки:

$$\begin{aligned} M_{x_{03}} &= -F_2(l_2 - x_{03} + a) - q_2 \frac{(l_3 - x_{03} + a)^2}{2} + R_3(l_3 - x_{03}) = \\ &= -10(7 - 3,77 + 1,5) - 20 \frac{(7 - 3,77 + 1,5)^2}{2} + \\ &\quad + 104,6(7 - 3,77) = 66,8 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Построим эпюру M_x с уточненными значениями моментов (рис. 57, ж).

Пример 38. Построить эпюры M_x и Q_x для неразрезной балки, показанной на рис. 58, а.

Решение. 1. Обозначим пролеты l_1, l_2 и опоры 0, 1, 2.

2. Выберем основную систему. На опоры введем шарниры и обозначим опорные моменты M_0, M_1 и M_2 . Для получения уравнений трех моментов вместо жесткой заделки введем еще один (фиктивный) пролет $l_3 = 0$ и опору 3 с опорным моментом $M_3 = 0$ (рис. 58, б).

3. Определим величины изгибающих моментов для основной системы от заданной нагрузки (см. прил. VI).

В точке С

$$M_C^0 = \frac{ql_1^2}{8} + \frac{F_2 l_1}{4} = \frac{25 \cdot 7^2}{8} + \frac{40 \cdot 7}{4} = 223,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точках D и E

$$M_D^0 = M_E^0 = F_3 a = 80 \cdot 1,5 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x^0 (рис. 58, в).

4. Составим уравнения трех моментов.

Для опоры 1:

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi).$$

Для опоры 2:

$$M_1 l_2 + 2 M_2 (l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6(B_2^\Phi + A_3^\Phi),$$

где $M_0 = -F_1 b = -30 \cdot 1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_3 = 0$; $l_3 = 0$ (по условию задачи);

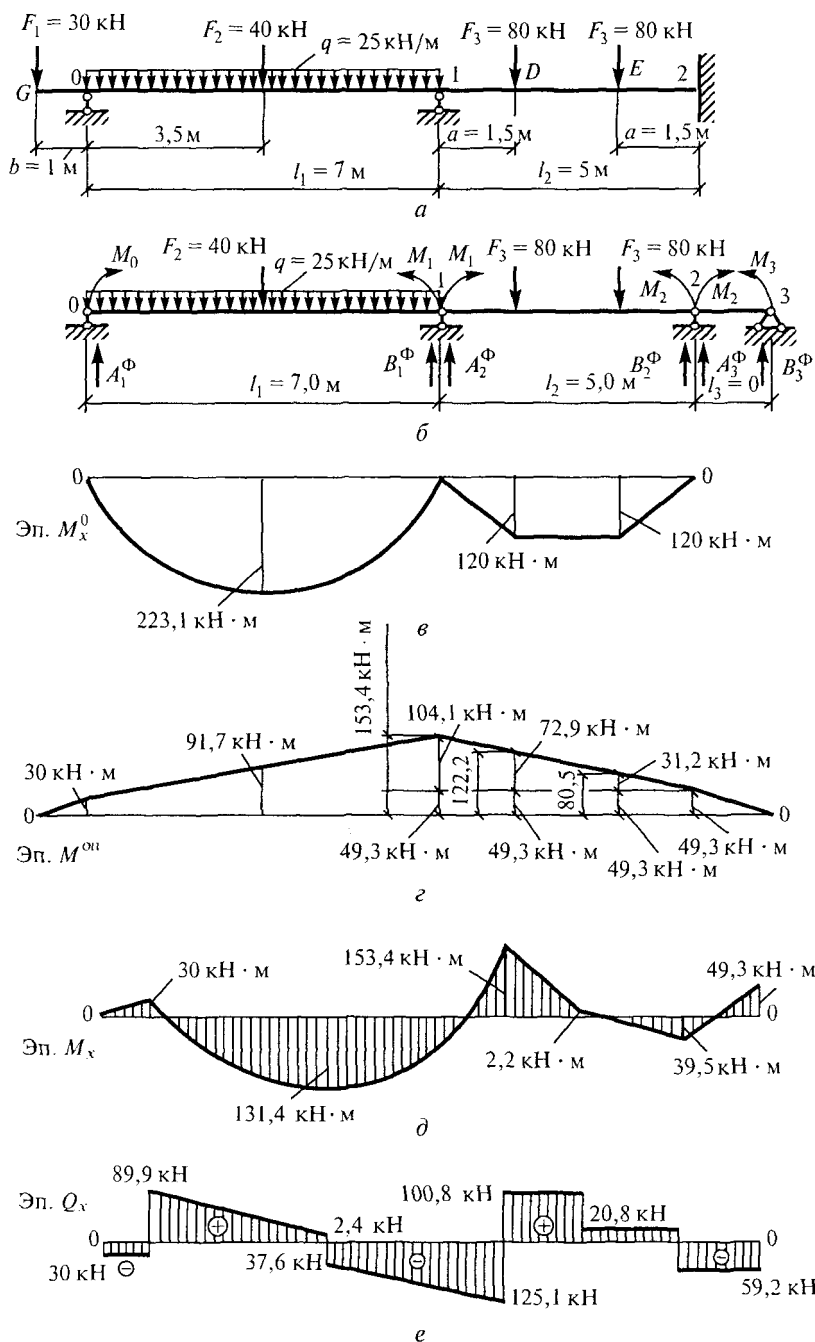


Рис. 58

$$B_1^\Phi = \frac{F_2 l_1^2}{16} + \frac{q l_1^3}{24} = \frac{40 \cdot 7^2}{16} + \frac{25 \cdot 7^3}{24} = 479,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$A_2^\Phi = B_2^\Phi = \frac{F_3 a(l-a)}{2} = \frac{80 \cdot 1,5(5-1,5)}{2} = 210 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

(прил. VIII).

Подставим полученные значения в уравнения трех моментов:

$$-30 \cdot 7 + 2M_1(7+5) + M_2 \cdot 5 = -6(479,8 + 210);$$

$$M_1 \cdot 5 + 2M_2(5+0) + 0 = -6(210+0).$$

После упрощения получим

$$24M_1 + 5M_2 = -3928,8; \quad 5M_1 + 10M_2 = -1260.$$

Решив совместно оба уравнения, получим $M_1 = -153,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
 $M_2 = -49,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

5. По найденным значениям строим эпюру опорных моментов $M^{\text{оп}}$ (рис. 58, з). Определим опорные моменты.

В точке C

$$M_C^{\text{оп}} = -\frac{153,4 - 30}{2} - 30 = -91,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке D

$$M_D^{\text{оп}} = -49,3 + (-153,4 + 49,3) \frac{3,5}{5} = -122,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке E

$$M_E^{\text{оп}} = -49,3 + (-153,4 + 49,3) \frac{1,5}{5} = -80,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

6. Определим значения M_x от заданной нагрузки для заданной схемы путем суммирования эпюр M_x^0 и $M_x^{\text{оп}}$:

$$M_x = M_x^0 + M_x^{\text{оп}}.$$

В точке G

$$M_G^0 = 0; \quad M_G^{\text{оп}} = 0; \quad M_G = 0;$$

на опоре 0

$$M_0^0 = 0; \quad M_0^{\text{оп}} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_0 = M_0^{\text{оп}} = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке C

$$M_C^0 = 223,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_C^{\text{оп}} = -91,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = 223,1 - 91,7 = 131,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на опоре 1

$$M_1^0 = 0; M_1^{\text{оп}} = -153,4 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_1 = M_1^{\text{оп}} = -153,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке D

$$M_D^0 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_D^{\text{оп}} = -122,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = 120 - 122,2 = -2,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

в точке E

$$M_E^0 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_E^{\text{оп}} = -80,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = 120 - 80,5 = 39,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

на опоре 2

$$M_2^0 = 0; M_2^{\text{оп}} = -49,3 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2 = M_2^{\text{оп}} = -49,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру M_x (рис. 58, д).

7. Определим значения поперечных сил в характерных точках.

Консоль GO.

В точке G

$$Q_G = -30 \text{ кН};$$

на опоре 0, чуть левее,

$$Q_0^{\text{лев}} = -30 \text{ кН}.$$

Пролет 0—1.

На опоре 0, чуть правее,

$$\begin{aligned} Q_0^{\text{прав}} &= A_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1} = \frac{ql_1}{2} + \frac{F_2}{2} + \frac{M_1 - M_0}{l_1} = \\ &= \frac{25 \cdot 7}{2} + \frac{40}{2} + \frac{-153,4 + 30}{7} = 89,9 \text{ кН}; \end{aligned}$$

в точке C, чуть левее,

$$Q_C^{\text{лев}} = Q_0^{\text{прав}} - ql_1/2 = 89,9 - 25 \frac{7}{2} = 2,4 \text{ кН};$$

в точке C, чуть правее,

$$Q_C^{\text{прав}} = Q_C^{\text{лев}} - F_2 = 2,4 - 40 = -37,6 \text{ кН};$$

на опоре 1, чуть левее

$$Q_1^{\text{лев}} = Q_C^{\text{прав}} - ql_1/2 = -37,6 - 25 \frac{7}{2} = -125,1 \text{ кН}.$$

Пролет 1—2.

На опоре 1, чуть правее,

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{прав}} &= A_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = F_3 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = \\ &= 80 + \frac{-49,3 + 153,4}{5} = 100,8 \text{ кН}; \end{aligned}$$

в точке D

$$\begin{aligned} Q_D^{\text{лев}} &= Q_1^{\text{прав}} = 100,8 \text{ кН}; \quad Q_D^{\text{прав}} = Q_D^{\text{лев}} - F_3 = \\ &= 100,8 - 80 = 20,8 \text{ кН}; \end{aligned}$$

в точке E

$$\begin{aligned} Q_E^{\text{лев}} &= Q_D^{\text{прав}} = 20,8 \text{ кН}; \quad Q_E^{\text{прав}} = Q_E^{\text{лев}} - F_4 = \\ &= 20,8 - 80 = -59,2 \text{ кН}; \end{aligned}$$

на опоре 2, чуть левее

$$\begin{aligned} Q_2^{\text{лев}} &= Q_E^{\text{прав}} = -59,2 \text{ кН}, \text{ или по общей формуле} \\ Q_2^{\text{лев}} &= -B_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -F_3 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} = -80 + \\ &+ \frac{-49,3 + 153,4}{2} = 59,2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

По найденным значениям строим эпюру Q_x (рис. 58, е).

8. Определим опорные реакции:

$$\begin{aligned} R_0 &= -Q_0^{\text{лев}} + Q_0^{\text{прав}} = 30 + 89,9 = 119,9 \text{ кН}; \\ R_1 &= -Q_1^{\text{лев}} + Q_1^{\text{прав}} = 125,1 + 100,8 = 225,9 \text{ кН}; \\ R_2 &= -Q_2^{\text{лев}} = -59,2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

9. Проверим правильность определения опорных реакций:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0 \text{ или } 119,9 + 225,9 + 59,2 - 30 - 40 - 25 \cdot 7 - 80 - \\ &- 80 = 0, \text{ откуда } 405 - 405 = 0. \end{aligned}$$

В качестве проверки всего решения необходимо найти момент в любой (лучше нескольких) точке балки, рассматривая левую или правую ее часть. Определим момент, например в точке C .

Рассмотрим левую часть балки:

$$M_C = -F_1(b + l_1/2) + R_0 l_1/2 - q \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{4} = -30(1 + 4,5) +$$

$$+ 119,9 \cdot 3,5 - 25 \cdot 3,5 \cdot 1,75 = 131,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Рассмотрим правую часть балки:

$$\begin{aligned} M_C &= -R_2(l_2 + l_1/2) - F_4(l_1/2 + l_2 - a) - F_3(l_1/2 + a) + \\ &+ R_1 l_1/2 - q \frac{l_1}{2} \frac{l_1}{4} + M_2 = 59,2 \cdot 8,5 - 80 \cdot 7 - 80 \cdot 5 + \\ &+ 225,9 \cdot 3,5 - 25 \cdot 3,5 \cdot 1,75 - 49,3 = 131,4 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Моменты от правых и левых сил получились одинаковыми:

$$M_C^{\text{лев}} = 131,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \approx M_C^{\text{прав}} = 131,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Оба эти момента равны моменту в точке C на эпюре M_x .

Задание для расчетно-графической работы 11. Построить эпюры Q_x и M_x для неразрезной балки по данным одного из вариантов, приведенных на рис. 59.

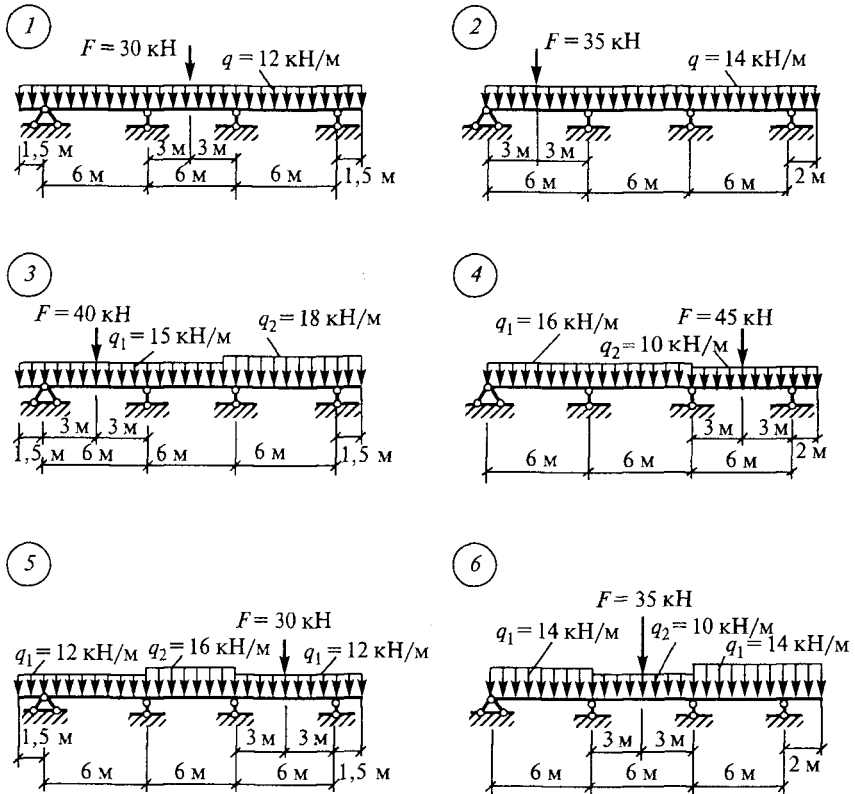
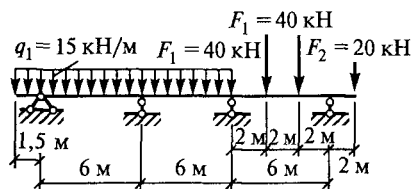
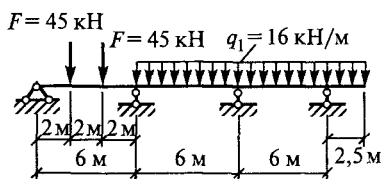


Рис. 59

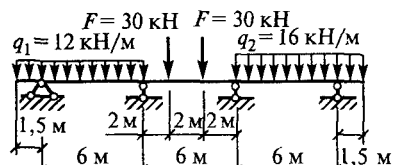
7



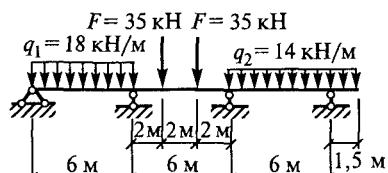
8



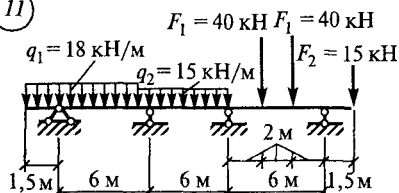
9



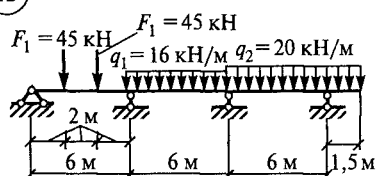
10



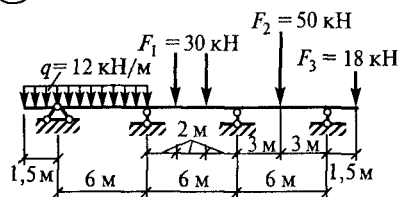
11



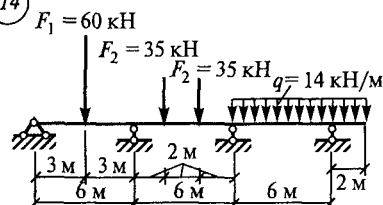
12



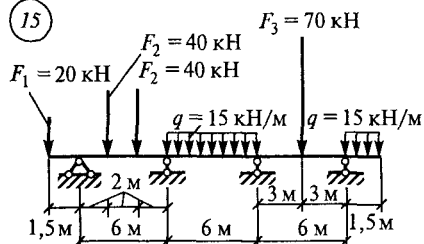
13



14



15



16

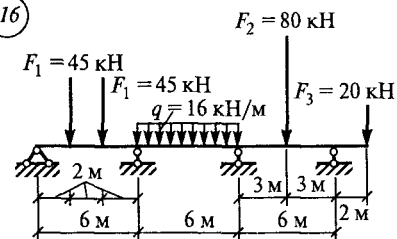


Рис. 59. Продолжение

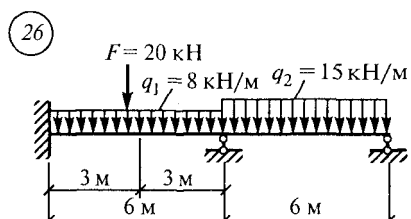
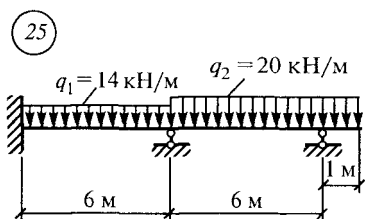
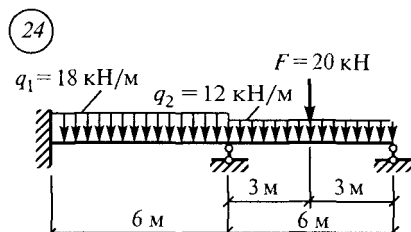
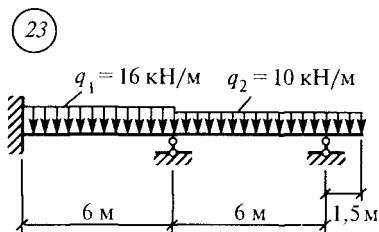
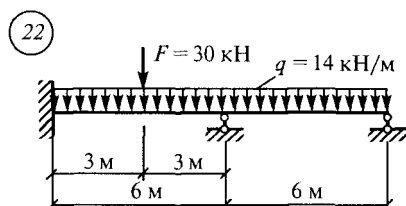
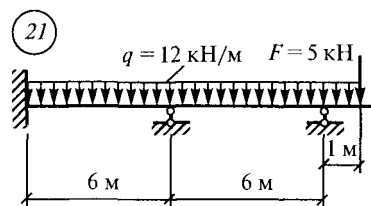
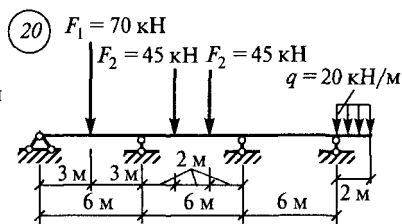
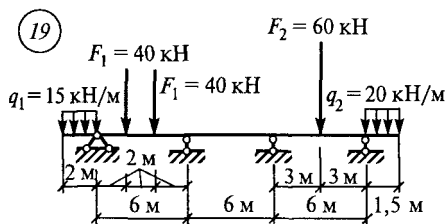
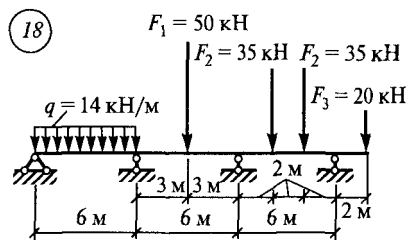
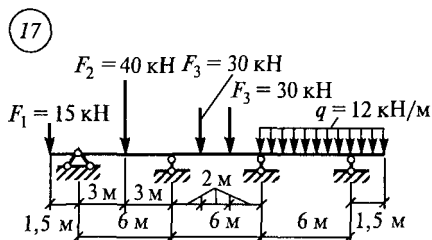
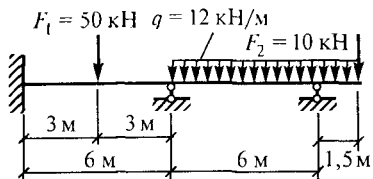
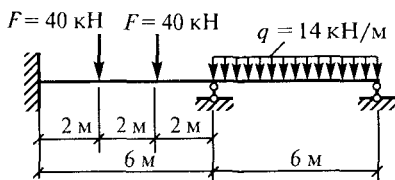


Рис. 59. Продолжение

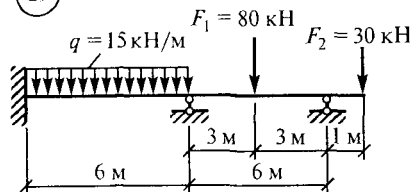
27



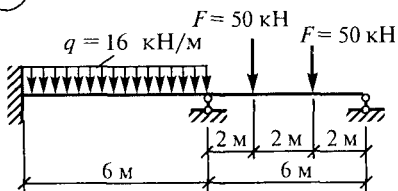
28



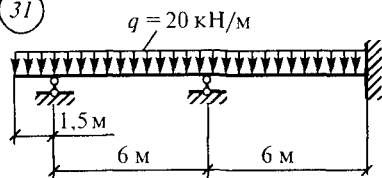
29



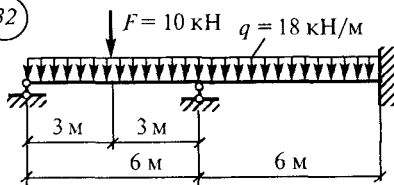
30



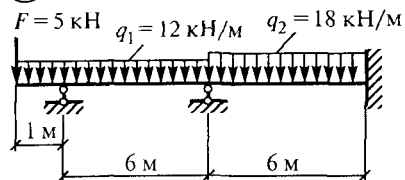
31



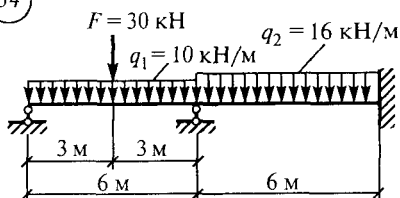
32



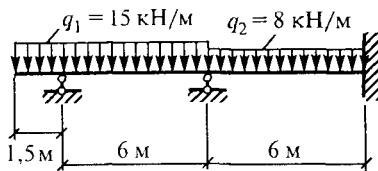
33



34



35



36

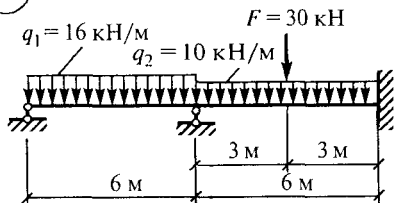


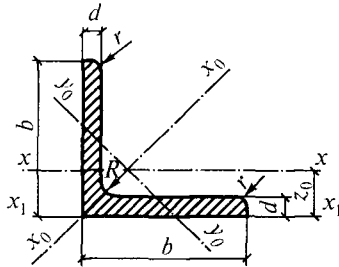
Рис. 59. Окончание

Приложения

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Таблица 1

Сталь прокатная угловая равнополочная (ГОСТ 8609—86)



Обозначения:

b — ширина полки;

d — толщина полки;

R — радиус внутреннего закругления;

r — радиус закругления полки;

J — момент инерции;

i — радиус инерции;

z_0 — расстояние от центра тяжести до полки.

Номер профиля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м дли- ны, кг	Справочные величины для осей							
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>	<i>r</i>			<i>x — x</i>		<i>x</i> ₀ — <i>x</i> ₀		<i>y</i> ₀ — <i>y</i> ₀		<i>x</i> ₁ — <i>x</i> ₁	<i>z</i> ₀ , см
							<i>J</i> _{<i>x</i>} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>x</i>} , см	<i>J</i> _{<i>x</i>0 max} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>x</i>0 max} , см	<i>J</i> _{<i>y</i>0 min} , см ⁴	<i>i</i> _{<i>y</i>0 min} , см	<i>J</i> _{<i>x</i>1} , см ⁴	
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4			3,48	2,73	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26
		5			4,29	3,37	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4			3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5			4,80	3,77	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	4	6	2	4,38	3,44	13,10	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5			5,41	4,25	16,00	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57

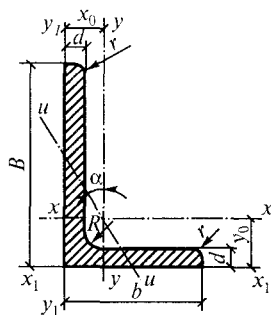
Номер профиля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м дли- ны, кг	Справочные величины для осей							
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>	<i>r</i>			<i>x — x</i>		<i>x₀ — x₀</i>		<i>y₀ — y₀</i>		<i>x₁ — x₁</i>	<i>z₀</i> , см
							<i>J_x</i> , см ⁴	<i>i_x</i> , см	<i>J_{x₀max}</i> , см ⁴	<i>i_{x₀max}</i> , см	<i>J_{y₀min}</i> , см ⁴	<i>i_{y₀min}</i> , см	<i>J_{x₁}</i> , см ⁴	
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,90	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5			6,13	4,81	23,10	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6			7,28	5,72	27,10	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	8	2,7	6,20	4,87	29,00	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5			6,86	5,38	31,90	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6			8,15	6,39	37,60	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7			9,42	7,39	43,00	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8			10,70	8,37	48,20	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
7,5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,50	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6			8,78	6,89	46,60	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7			10,10	7,96	53,30	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8			11,50	9,02	59,80	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15
		9			12,80	10,10	66,10	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,70	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6			9,38	7,36	57,00	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19
		7			10,80	8,51	65,30	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23
		8			12,30	9,65	73,40	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27
9	90	6	10	3,3	10,60	8,33	82,10	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43
		7			12,30	9,64	94,30	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47
		8			13,90	10,90	106,00	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51
		9			15,60	12,20	118,00	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55

10	100	6,5	12	4	12,8	10,1	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68
		7			13,8	10,8	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71
		8			15,6	12,2	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75
		10			19,2	15,1	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83
		12			22,8	17,9	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91
		14			26,3	20,6	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99
		16			29,7	23,3	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06
11	110	7	12	4	15,2	11,9	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96
		8			17,2	13,5	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00
12,5	125	8	14	4,6	19,7	15,5	294,0	3,87	467,0	4,87	122,0	2,49	516,0	3,36
		9			22,0	17,3	327,0	3,86	520,0	4,86	135,0	2,48	582,0	3,40
		10			24,3	19,1	360,0	3,85	571,0	4,84	149,0	2,47	649,0	3,45
		12			28,9	22,7	422,0	3,82	670,0	4,82	174,0	2,46	782,0	3,53
		14			33,4	26,2	482,0	3,80	764,0	4,78	200,0	2,45	916,0	3,61
		16			37,8	29,6	539,0	3,78	853,0	4,75	224,0	2,44	1051,0	3,68
14	140	9	14	4,6	24,7	19,4	466,0	4,34	739,0	5,47	192,0	2,79	818,0	3,78
		10			27,3	21,5	512,0	4,33	814,0	5,46	211,0	2,78	911,0	3,82
		12			32,5	25,5	602,0	4,31	957,0	5,43	248,0	2,76	1097,0	3,90
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7	774,0	4,96	1229,0	6,25	319,0	3,19	1356,0	4,30
		11			34,4	27,0	844,0	4,95	1341,0	6,24	348,0	3,18	1494,0	4,35
		12			37,4	29,4	913,0	4,94	1450,0	6,23	376,0	3,17	1633,0	4,39
		14			43,3	34,0	1046,0	4,92	1662,0	6,20	431,0	3,16	1911,0	4,47
		16			49,1	38,5	1175,0	4,89	1866,0	6,17	485,0	3,14	2191,0	4,55
		18			54,8	43,0	1299,0	4,87	2061,0	6,13	537,0	3,13	2472,0	4,63
		20			60,4	47,4	1419,0	4,85	2248,0	6,10	589,0	3,12	2756,0	4,70
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5	1216,0	5,60	1933,0	7,06	500,0	3,59	2128,0	4,85
		12			42,2	33,1	1317,0	5,59	2093,0	7,04	540,0	3,58	2324,0	4,89

Номер профиля	Размеры, мм				Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м дли- ны, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	R	r			x — x		x ₀ — x ₀		y ₀ — y ₀		x ₁ — x ₁	z ₀ , см
							J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x₀max} , см ⁴	i _{x₀max} , см	J _{y₀min} , см ⁴	i _{y₀min} , см	J _{x₁} , см ⁴	
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823,0	6,22	2896,0	7,84	749,0	3,99	3182,0	5,37
		13			50,9	39,9	1961,0	6,21	3116,0	7,83	805,0	3,98	3452,0	5,42
		14			51,6	42,8	2097,0	6,20	3333,0	7,81	861,0	3,97	3722,0	5,46
		16			62,0	48,7	2363,0	6,17	3755,0	7,78	970,0	3,96	4264,0	5,54
		20			76,5	60,1	2871,0	6,12	4560,0	7,72	1182,0	3,93	5355,0	5,70
		25			94,3	74,0	3466,0	6,06	5494,0	7,63	1438,0	3,91	6733,0	5,89
		30			111,5	87,6	4020,0	6,00	6351,0	7,55	1688,0	3,89	8130,0	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814,0	6,83	4470,0	8,60	1159,0	4,38	4941,0	5,93
		16			68,6	53,8	3175,0	6,81	5045,0	8,58	1306,0	4,36	5661,0	6,02
		16			78,4	61,5	4717,0	7,76	7492,0	9,78	1942,0	4,98	8286,0	6,75
		18			87,7	68,9	5247,0	7,73	8337,0	9,75	2158,0	4,96	9342,0	6,83
		20			97,0	76,1	5765,0	7,71	9160,0	9,72	2370,0	4,94	10401	6,91
25	250	22	24	8	106,1	83,3	6 270,0	7,69	9961,0	9,69	2579,0	4,93	11464	7,00
		25			119,1	94,0	7006,0	7,65	11125	9,64	2887,0	4,91	13064	7,11
		28			133,1	104,5	7717,0	7,61	12244	9,59	3190,0	4,89	14674	7,23
		30			142,0	111,4	8177,0	7,59	12965	9,56	3389,0	4,89	15753	7,31

Таблица 2

Сталь прокатная угловая неравнополочная (ГОСТ 8510—86)



Обозначения:

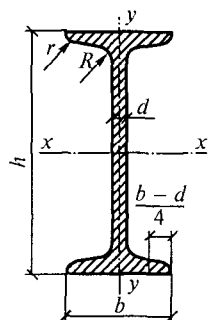
 B — ширина большой полки; b — ширина малой полки; d — толщина полки; R — радиус внутреннего закругления; r — радиус закругления полки; J — момент инерции; i — радиус инерции; x_0, y_0 — расстояния от центра тяжести до наружных границ полки.

Номер про- филя	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м дли- ны, кг	Справочные величины для осей											Тан- генс угла α
	B	b	d	R	r			x—x		y—y		x ₁ —x ₁		y ₁ —y ₁		u—u			
								J _x , см ⁴	i _x , см	J _y , см ⁴	i _y , см	J _{x₁} , см ⁴	y ₀ , см	J _{y₁} , см ⁴	x ₀ , см	J _{u min} , см ⁴	i _{u min} , см ⁴		
5,5/3,6	56	36	4 5	6	2	3,58 4,41	2,81 3,46	11,4 13,8	1,78 1,77	3,7 4,48	1,02 1,01	23,2 29,2	1,82 1,86	6,25 7,91	0,84 0,88	2,19 2,66	0,78 0,78	0,506 0,404	
6,3/4	63	40	4	7	2,3	4,04	3,17	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397	
			5			5,98	3,91	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,80	0,95	3,73	0,86	0,396	
			6			5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393	
			8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,90	1,07	5,58	0,85	0,386	
7,4/5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,39	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,20	1,05	5,34	0,98	0,406	

Номер про- филя	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м дли- ны, кг	Справочные величины для осей										Тан- генс угла α
	B	b	d	R	r			x—x		y—y		x ₁ —x ₁		y ₁ —y ₁		u—u		
								J _x , см ⁴	i _x , см	J _y , см ⁴	i _y , см	J _{x₁} , см ⁴	y ₀ , см	J _{y₁} , см ⁴	x ₀ , см	J _{u min} , см ⁴	i _{u min} , см ⁴	
7,5/5	75	50	5 6 8	8	2,7	6,11 7,25 9,47	4,79 5,69 7,43	34,8 40,9 52,4	2,39 2,38 2,35	12,5 14,6 18,5	1,43 1,42 1,40	69,7 83,9 112,0	2,39 2,44 2,52	20,8 25,2 34,2	1,17 1,21 1,29	7,24 8,48 10,90	1,09 1,08 1,07	0,436 0,435 0,430
8/5	80	50	5 6	8	2,7	6,36 7,55	4,99 5,92	41,6 49,0	2,56 2,55	12,7 14,8	1,41 1,40	84,6 102,0	2,60 2,65	20,8 25,2	1,13 1,17	7,58 8,88	1,09 1,08	0,387 0,386
9/5,6	90	56	5,5 6 8	9	3	7,86 8,54 11,18	6,17 6,70 8,77	65,3 70,6 90,9	2,88 2,88 2,85	19,7 21,2 27,1	1,58 1,58 1,56	132,0 145,0 194,0	2,92 2,95 3,04	32,2 35,2 47,8	1,26 1,28 1,36	11,80 12,70 16,30	1,22 1,22 1,21	0,384 0,384 0,380
10/6,3	100	63	6 7 8 10	10	3,3	9,59 11,10 12,60 15,50	7,53 8,70 9,87 12,10	98,3 113,0 127,0 154,0	3,20 3,19 3,18 3,15	30,6 35,0 39,2 47,1	1,79 1,78 1,77 1,75	198,0 232,0 266,0 333,0	3,23 3,28 3,32 3,40	49,9 58,7 67,6 85,8	1,42 1,46 1,50 1,58	18,20 20,80 23,40 28,30	1,38 1,37 1,36 1,35	0,393 0,392 0,391 0,387
11/7	110	70	6,5 8	10	3,3	11,40 13,90	8,98 10,90	142,0 172,0	3,53 3,51	45,6 54,6	2,00 1,98	286,0 353,0	3,55 3,61	74,3 92,3	1,58 1,64	26,90 32,30	1,53 1,52	0,402 0,400
12,5/8	125	80	7 8 10 12	11	3,7	14,10 16,00 19,70 23,40	11,00 12,50 15,50 18,30	227,0 256,0 312,0 365,0	4,01 4,00 3,98 3,95	73,7 83,0 100,0 117,0	2,29 2,28 2,26 2,24	452,0 518,0 649,0 781,0	4,01 4,05 4,14 4,22	119,0 137,0 173,0 210,0	1,80 1,84 1,92 2,00	43,30 48,80 59,30 69,50	1,76 1,75 1,74 1,72	0,407 0,406 0,404 0,400
14/9	140	90	8 10	12	4	18,00 22,20	14,10 17,50	364,0 444,0	4,49 4,47	120,0 146,0	2,58 2,56	727,0 911,0	4,49 4,58	194,0 245,0	2,03 2,12	70,30 85,50	1,98 1,96	0,411 0,409

16/10	160	100	9	13	4,3	22,90	18,00	606,0	5,15	186,0	2,85	1221	5,19	300,0	2,23	110,0	2,20	0,391
			10			25,30	19,80	667,0	5,13	204,0	2,84	1359	5,23	335,0	2,28	121,0	2,19	0,390
			12			30,00	23,60	784,0	5,11	239,0	2,82	1634	5,32	405,0	2,36	142,0	2,18	0,388
			14			34,70	27,30	897,0	5,08	272,0	2,80	1910	5,40	477,0	2,43	162,0	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,30	22,20	952,0	5,80	276,0	3,12	1933	5,88	444,0	2,44	165,0	2,42	0,375
			12			33,70	26,40	1123,0	5,77	324,0	3,10	2324	5,97	537,0	2,52	194,0	2,40	0,374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,90	27,40	1449,0	6,45	446,0	3,58	2920	6,50	718,0	2,79	264,0	2,75	0,392
			12			37,90	29,70	1568,0	6,43	482,0	3,57	3189	6,54	786,0	2,83	285,0	2,74	0,392
			14			43,90	34,40	1801,0	6,41	551,0	3,54	3726	6,62	922,0	2,91	327,0	2,73	0,390
			16			49,80	39,10	2026,0	6,38	617,0	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367,0	2,72	0,388
25/16	250	160	12	18	6	48,30	37,90	3147,0	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604,0	3,54	0,410
			16			63,60	49,90	4091,0	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781,0	3,50	0,408
			18			71,10	55,80	4545,0	7,99	145,0	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866,0	3,49	0,407
			20			78,50	61,70	4987,0	7,97	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949,0	3,48	0,405

Сталь прокатная — балки двутавровые (ГОСТ 8239—72)



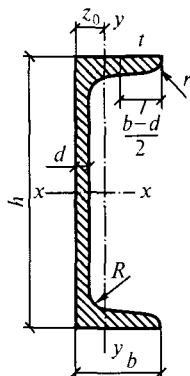
Обозначения:

- h — высота балки;
 b — ширина полки;
 d — толщина стенки;
 t — средняя толщина полки;
 R — радиус внутреннего закругления;
 r — радиус закругления полки;
 J — момент инерции;
 W — момент сопротивления;
 S — статический момент полусечения;
 i — радиус инерции.

Номер профиля	Масса 1 м дли- ны, кг	Размеры, мм						Пло- щадь сече- ния, см ²	Справочные величины для осей						
		<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>		<i>x — x</i>				<i>y — y</i>		
									<i>J_x</i> , см ²	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>S_x</i> , см ³	<i>J_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³	<i>i_y</i> , см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12

20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254	9,22	143	106	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	20,5	4,0	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,20	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407	11,30	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,30	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518	12,50	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,50	339	419	59,9	3,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,70	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	27696	1231	18,10	708	808	101,0	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100	39727	1589	19,90	919	1043	123,0	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118	55962	2035	21,80	1181	1356	151,0	3,39
60	108,0	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138	76806	2560	23,60	1491	1725	182,0	3,54

Сталь прокатная — швеллеры (ГОСТ 8240—72)



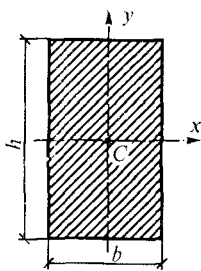
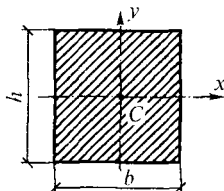
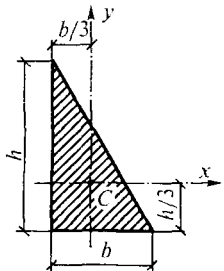
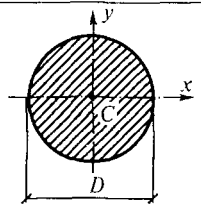
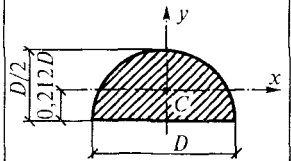
Обозначения:

 h — высота швеллера; b — ширина полки; d — толщина стенки; t — средняя толщина полки; R — радиус внутреннего закругления; r — радиус закругления полки; J — момент инерции; W — момент сопротивления; S — статический момент полусечения; i — радиус инерции; z_0 — расстояние от оси y — y до наружной грани стенки.

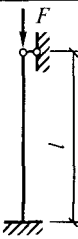


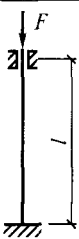
Номер про- филя	Масса 1 м дли- ны, кг	Размеры, мм						Пло- щадь сече- ния, см ²	Справочные величины для осей							
		h	b	d	t	R	r		x — x				y — y			z ₀ , см
									J _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	J _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	
5	4,84	50	32	4,4	7	6	2,5	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67

14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	16,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46
24	24	240	90	5,6	10	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,2	270	95	6	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	272	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Моменты инерции простых геометрических фигур

Сечение	J_x	J_y
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$
	$\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05 D^4$	$\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05 D^4$
	$0,00686 D^4$	$\frac{\pi D^4}{128} \approx 0,025 D^4$

Коэффициенты приведения длины стержня

Способы закрепления концов стержня				
Коэффициент μ	1	2	0,7	0,5

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Таблица I

Коэффициенты продольного изгиба φ
центрально-сжатых элементов из стали

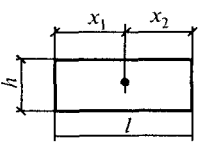
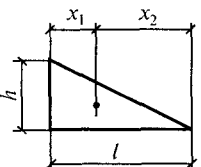
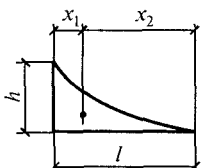
Гиб- кость λ	Коэффициенты φ для элементов из стали с расчетным R_y , МПа								
	200	220	225	230	235	240	280	290	300
10	0,998	0,987	0,987	0,987	0,987	0,985	0,985	0,985	0,984
20	0,967	0,964	0,963	0,963	0,962	0,962	0,959	0,958	0,957
30	0,939	0,935	0,934	0,933	0,932	0,931	0,924	0,922	0,920
40	0,906	0,900	0,898	0,897	0,895	0,894	0,883	0,880	0,878
50	0,869	0,860	0,858	0,856	0,854	0,852	0,836	0,832	0,829
60	0,827	0,816	0,813	0,810	0,807	0,805	0,785	0,780	0,775
70	0,782	0,768	0,764	0,761	0,757	0,754	0,724	0,714	0,705
80	0,734	0,710	0,704	0,698	0,692	0,686	0,641	0,631	0,621
90	0,665	0,638	0,631	0,625	0,618	0,612	0,565	0,554	0,543
100	0,599	0,710	0,563	0,556	0,549	0,542	0,493	0,481	0,470
110	0,537	0,507	0,499	0,492	0,485	0,478	0,427	0,415	0,404
120	0,479	0,449	0,441	0,434	0,426	0,419	0,366	0,354	0,343
130	0,425	0,394	0,386	0,379	0,371	0,364	0,313	0,303	0,294
140	0,376	0,345	0,337	0,330	0,322	0,315	0,272	0,264	0,256
150	0,328	0,302	0,295	0,389	0,282	0,276	0,239	0,232	0,225
160	0,290	0,267	0,261	0,355	0,249	0,244	0,212	0,205	0,199

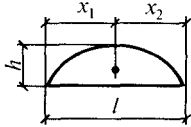
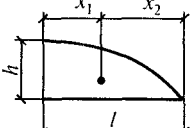
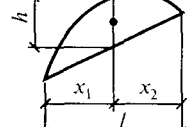
**Коэффициенты продольного изгиба φ
центрально-сжатых элементов из алюминия**

Гибкость λ	Коэффициент φ для элементов из алюминия			Гибкость λ	Коэффициент φ для элементов из алюминия		
	АМг2М	АМг2П АД31Т1	АД31Т		АМг2М	АМг2П АД31Т1	АД31Т
10	1	1	1	90	0,608	0,392	0,656
20	0,982	0,924	0,995	100	0,555	0,318	0,610
30	0,915	0,850	0,930	110	0,506	0,263	0,562
40	0,860	0,785	0,880	120	0,458	0,221	0,518
50	0,812	0,717	0,835	130	0,415	0,188	0,475
60	0,766	0,645	0,793	140	0,362	0,162	0,435
70	0,717	0,565	0,750	150	0,313	0,141	0,400
80	0,665	0,490	0,706	160	—	—	—

ПРИЛОЖЕНИЕ V

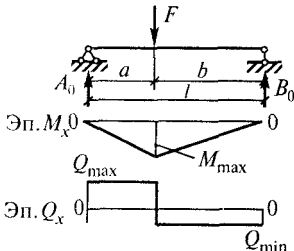
Площади и координаты центров тяжести фигур

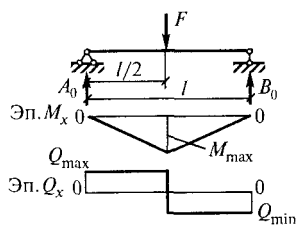
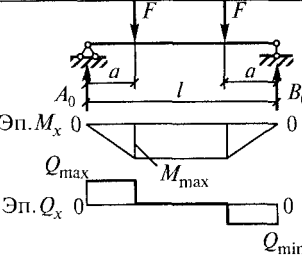
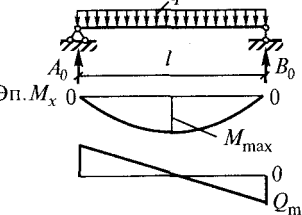
Фигуры	Площадь, ω	Абсциссы центра тяжести	
		x_1	x_2
	lh	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2}{3}l$
	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3}{4}l$

Фигуры	Площадь, ω	Абсциссы центра тяжести	
		x_1	x_2
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{8}l$	$\frac{5}{8}l$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Опорные реакции, эпюры Q_x и M_x простых балок

Схема, нагрузка, эпюры	Опорные реакции		Q_{\max}	M_{\max}
	A_0	B_0		
	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{Fl}{4}$

Схема, нагрузка, эпюры	Опорные реакции		Q_{\max}	M_{\max}
	A_0	B_0		
 <p>Эп. M_x 0 M_{\max} 0 Эп. Q_x 0 Q_{\max} 0 Q_{\min}</p>	$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fab}{l}$
 <p>Эп. M_x 0 M_{\max} 0 Эп. Q_x 0 Q_{\max} 0 Q_{\min}</p>	F	F	F	Fa
 <p>Эп. M_x 0 M_{\max} 0 Эп. Q_x 0 Q_{\max} 0 Q_{\min}</p>	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$

ПРИЛОЖЕНИЕ VII

Фиктивные опорные реакции балок

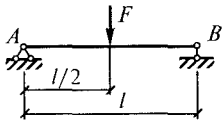
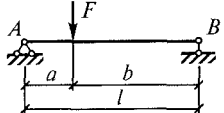
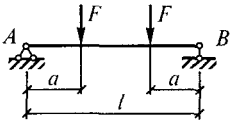
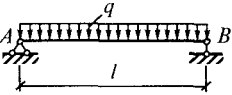
Схема	A^{Φ}	B^{Φ}
	$\frac{Fl^2}{16}$	$\frac{Fl^2}{16}$
	$\frac{Fab(l+b)}{6l}$	$\frac{Fab(l+a)}{6l}$

Схема	$A^Ф$	$B^Ф$
	$\frac{Fa(l-a)}{2}$	$\frac{Fa(l-a)}{2}$
	$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$

ПРИЛОЖЕНИЕ VIII

Расчетные сопротивления R стали и алюминия

Материал	Марка, класс	ГОСТ	Расчетное сопротивление	
			по пределу текучести, на растяжение, сжатие	на сдвиг
Сталь прокатная	C-235,	27772—88	230	130
	C-245,		240	140
	C-345		335	190
Алюминий деформируемый	АМг2М	—	68	39
	АМг2П	—	147	88
	АД31Т	—	54	34
	АД31Т1	—	147	88
Сталь арматурная горячекатаная	A-I	—	225	—
	A-II	—	280	—
	A-III, $d = 6...8$ мм	—	355	—
	A-III, $d = 10...40$ мм	—	365	—

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркуша А.И.* Руководство к решению задач по теоретической механике. — М.: Высшая школа, 1976. — 288 с.
2. *Михайлов А.М.* Основы расчета элементов строительных конструкций в примерах. — М.: Высшая школа, 1986. — 416 с.
3. *Мухин А.В.* Статика сооружений в примерах. — М.: Высшая школа, 1979. — 304 с.
4. *Портаев Л.П., Петраков А.А., Портаев В.Л.* Техническая механика. — М.: Стройиздат, 1987. — 464 с.
5. *Улитин Н.С., Першин А.Н., Лауенбург Л.В.* Сборник задач по технической механике. — М.: Высшая школа, 1978. — 399 с.
6. СНиП II-23-81*. Стальные конструкции. — М.: Минстрой России, 1995. — 96 с.
7. СНиП 2.03.09-85. Аллюминиевые конструкции. — М.: Стройиздат, 1984. — 46 с.
8. СН 528-80. Перечень единиц физических величин, подлежащих применению в строительстве. — М.: Стройиздат, 1981. — 34 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Раздел I. Самостоятельные и контрольные работы.	5
Глава 1. Теоретическая механика. Статика	5
1.1. Определение реакций идеальных связей аналитическим способом	5
1.2. Определение опорных реакций балки на двух опорах при действии вертикальных нагрузок	15
1.3. Определение положения центра тяжести сечения	22
Глава 2. Сопротивление материалов	31
2.1. Подбор сечений стержней из расчета на прочность.	31
2.2. Определение главных центральных моментов инерции сечения	38
2.3. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для простой балки	42
2.4. Определение допустимого значения центрально-сжимающей силы	53
Глава 3. Статика сооружений	61
3.1. Построение эпюр внутренних усилий для простейшей одноконтурной рамы.	61
3.2. Графическое определение усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла—Кремоны.	71
3.3. Определение линейных перемещений в простейших консольных рамах	80
3.4. Расчет статически неопределимой (неразрезной) балки по уравнению трех моментов.	90
Раздел II. Расчетно-графические работы	101
Глава 4. Теоретическая механика. Статика	101
4.1. Определение усилий в стержнях простейшей консольной фермы	101
4.2. Определение опорных реакций балки на двух опорах. . .	111
4.3. Определение положения центра тяжести сечения.	118
Глава 5. Сопротивление материалов	130
5.1. Определение усилий в стержнях статически неопределимой системы.	130
5.2. Определение главных моментов инерции сечения	140
5.3. Подбор сечения балки из прокатного двутавра.	144
5.4. Подбор сечения центрально-сжатой составной стойки. . .	148

Глава 6. Статика сооружений	157
6.1. Определение усилий в сечениях трехшарнирной арки . . .	157
6.2. Графическое определение усилий в стержнях плоской фермы построением диаграммы Максвелла—Кремоны . .	166
6.3. Расчет статически неопределимой рамы	177
6.4. Расчет неразрезной балки по уравнению трех моментов	190
Приложения	205
Список литературы	222