Министерство образования и науки Республики Татарстан
Альметьевский государственный нефтяной институт

А.Г. Шляхова, А.И. Хатыпов, А.Т. Шляхов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания

по организации самостоятельной

и выполнению расчетно-графической работ

по дисциплинам:

«Теоретическая механика»
для бакалавров направлений
140100- «Теплоэнергетика и теплотехника»,
140400 - «Электроэнергетика и электротехника»,
151000- «Технологические машины и оборудование»,
151900- «Конструкторско- технологическое обеспечение машиностроительных производств»,
220400- «Управление в технических системах»,
220700- «Автоматизация технологических процессов и производств»,

«Теоретическая и прикладная механика. Теоретическая механика»
для бакалавров направления
131000 «Нефтегазовое дело»

всех форм обучения

Альметьевск 2013

УДК 531
Ш-70

Шляхова А.Г., Хатыпов А.И., Шляхов А.Т.

Теоретическая механика. Методические указания по организации самостоятельной и расчетно-графической работ по дисциплинам: 140100-«Теплоэнергетика и теплотехника», 140400 - «Электроэнергетика и электротехника», 151000- «Технологические машины и оборудование», 151900-«Конструкторско- технологическое обеспечение машиностроительных производств», 220400- «Управление в технических системах», 220700-«Автоматизация технологических процессов и производств»; «Теоретическая и прикладная механика. Теоретическая механика» для бакалавров направления 131000 «Нефтегазовое дело» всех форм обучения. – Альметьевск: Альметьевский государственный нефтяной институт,2013.- 84с.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы над курсом теоретической механики, содержат решенные задачи и задания для самостоятельного решения из «Сборника задач по теоретической механики» В.А.Диевского, И.А.Малышева и 30 вариантов заданий и решенные типовые задачи по динамике. Задания могут использоваться как для текущего контроля усвоения знаний, так и для формирования на их основе расчетно-графических работ. Пособие представляет раздел теоретической механики статика, кинематика, динамика. К самостоятельным заданиям даны ответы.

Печатается по решению учебно-методического совета АГНИ.

Рецензент:

Булатов Р.Б. - кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации и информационных технологий АГНИ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретической механикой называется наука, изучающая общие законы механического движения и взаимодействия материальных тел и устанавливающая общие приемы и методы решения вопросов, связанных с этим движением и взаимодействием.

Целью преподавания дисциплины является формирование инженерного мышления. т.е. умение видеть в каждой механической системе ее расчетную модель, подготовка к изучению общеинженерных и специальных дисциплин, раскрытие роли теоретической механики как базы инженерного образование.

Задачей изучения дисциплины является усвоение студентами основных понятий, общих законов, теорем и принципов теоретической механики, формирование навыков их практического применения к решению конкретных задач.

Теоретическая механика использует аппарат высшей математики и является теоретической основой как общеобразовательных дисциплин теории механизмов и машин, сопротивление материалов, деталей машин, так как и специальных дисциплин, изучаемых студентами всех механических и электромеханических специальностей.

Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков решения задач.

СТАТИКА.
Тема: ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Определить реакции опор A и B однородной балки весом G = 8 кН, находящейся под действием силы F = 6 кН (действующей под углом α = 45°) и равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью q = 3 кН/м. Схема балки и геометрические размеры в метрах.

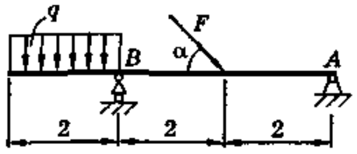


Рисунок 1.

Решение. Воспользуемся принципом освобождаемости от связей, отбросим их и введем соответствующие реакции. В точке B балка имеет скользящую (шарнирно-подвижную) опору, реакция которой R_B имеет известное направление (перпендикулярно опорной поверхности).

Реакция шарнирно-неподвижной опоры в точке A имеет неизвестное направление, и ее следует разложить на составляющие по осям $\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Y}_A$ (рис.1).

Распределенную по длине l= 2м нагрузку заменим сосредоточенной силой: Q = ql = 3 · 2 = 6 кН и приложим в середине участка распределения. Учтем также силу тяжести балки G, приложенную посередине балки.

Распределенную по длине l= 2м нагрузку заменим сосредоточенной силой: Q = ql = 3 · 2 = 6 кН и приложим в середине участка распределения. Учтем также силу тяжести балки G, приложенную посередине балки.

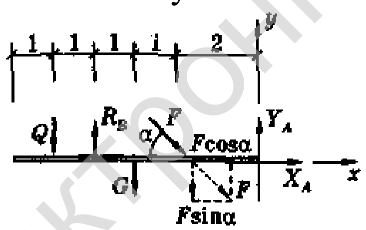


Рисунок 2.

Составим уравнения равновесия балки в следующей форме: одно уравнение проекций и два уравнения моментов. Такой выбор формы уравнений определяется тем, что в данном случае и в точке A, и в точке B пересекаются по две неизвестные силы. Кроме того, для удобства составления уравнений моментов силу F можно разложить на составляющие по осям: Fcos α и Fsin α и использовать затем теорему Вариньона, согласно которой момент равнодействующей системы сил равен сумме моментов исходных сил. Уравнения равновесия получаем в виде

$\sum F_{KX} = 0; \quad F\cos\alpha + X_A = 0;$

$\sum M_a(\overline{F}k) = 0$; $Q \cdot 5 - R_B \cdot 4 + G \cdot 3 + F\sin\alpha \cdot 2 = 0$;

$\sum M_B(\overline{F}K) = 0$; $Q \cdot 1 - G \cdot l - F\sin\alpha\, 2 + Y_A \cdot 4 = 0$.

Решая эти уравнения с учетом исходных данных, находим

X_A = -4,24 кН; R_B = 15,6 кН; Y_A = 2,62 кН.

Отрицательный знак у величины X_A указывает на то, что ее действительное направление противоположно принятому.

Усилие, передаваемое через шарнир А, можно вычислить, складывая векторно реакции X_A и Y_A:

$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ = 4,98 кН.

Для проверки правильности решения можно составить, например, сумму проекций сил на ось у и убедиться в том, что она (с небольшой погрешностью, определенной приближенностью вычислений) равна нулю:

$\sum F_{ky} = -Q + R_B - G - F\sin\alpha + Y_A = 0$.

Ответ: X_A = -4,24 кН; R_B = 15,6 кН; Y_A = 2,62 кН.

Задача 2.

Определить реакции в заделке невесомой консольной балки (рис. 3), находящейся под действием пары сил с моментом М = 4 кНм и линейно распределенной нагрузки с максимальной интенсивностью q_{max} = 1,5 кН/м. Длина балки l = 12 м.

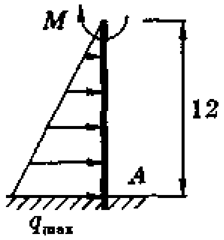


Рисунок 3.

Решение. Воспользуемся принципом освобождаемости от связей, отбросим связи и введем реакции, которые для заделки будут представлять собой две составляющие силы реакции по осям X_A и Y_A и пару с моментом M_A — моментом заделки.

Кроме того, распределенную силу заменим сосредоточенной, равной в данном случае площади треугольника нагрузки:

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} l = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 12 = 9kH$$

и проходящей через центр тяжести этого треугольника, то есть на расстоянии 1/3 от основания и 2/3 от вершины (4 м и 8 м).

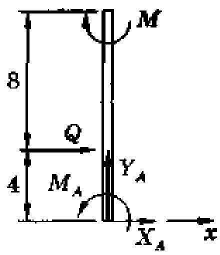


Рисунок 4.

Для расчетной схемы составляем два уравнения проекций на оси x и y и одно уравнение моментов относительно точки А:

$x: X_A + Q = 0;$

$M_A: M_A - Q \cdot 4 - M = 0;$

$y: Y_A = 0$

Решая эти уравнения, получаем

$X_A = -Q = -9$kН; $Y_A = 0$;

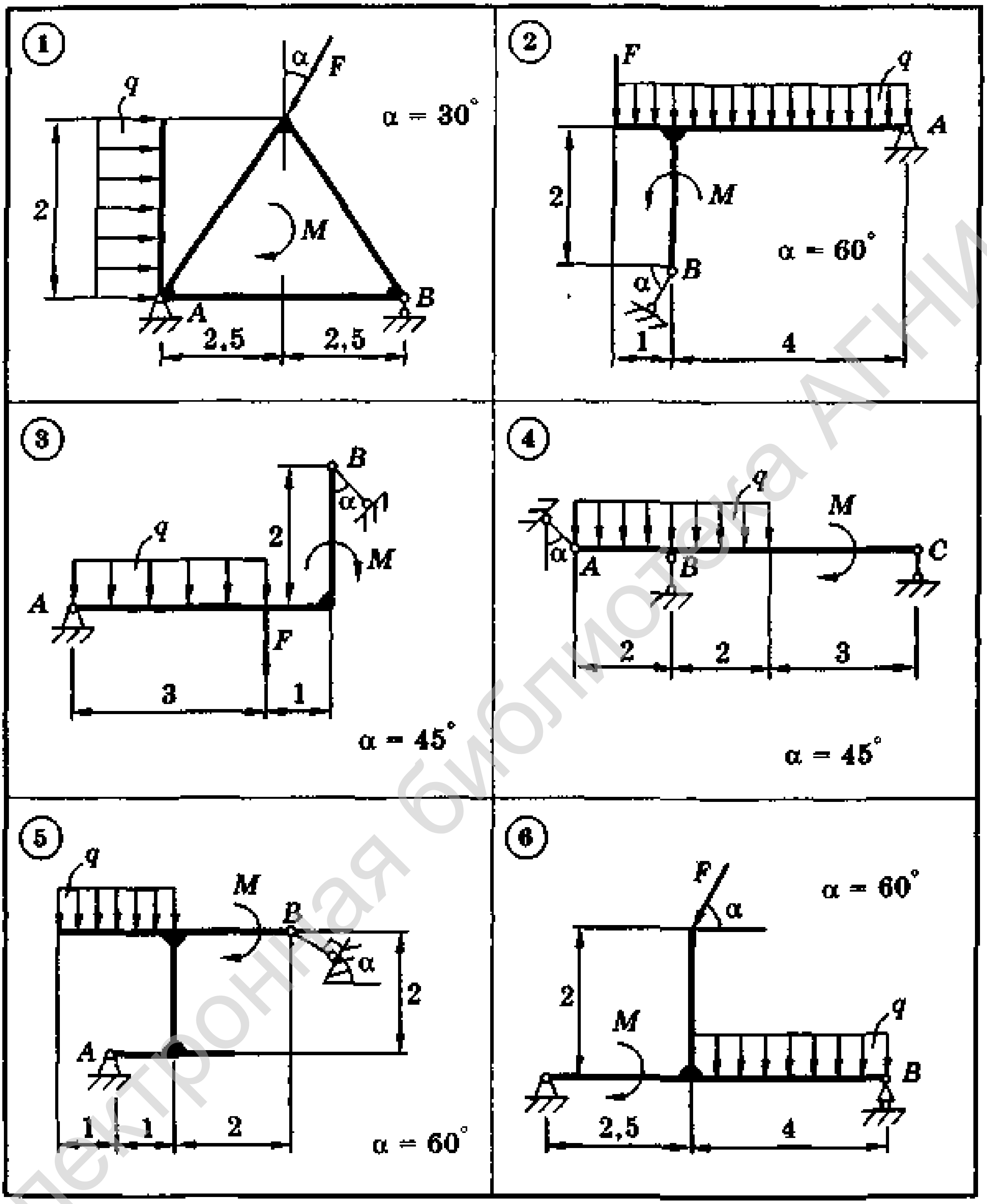
$M_A = Q \cdot 4 + M = 40$кН $\cdot$м.

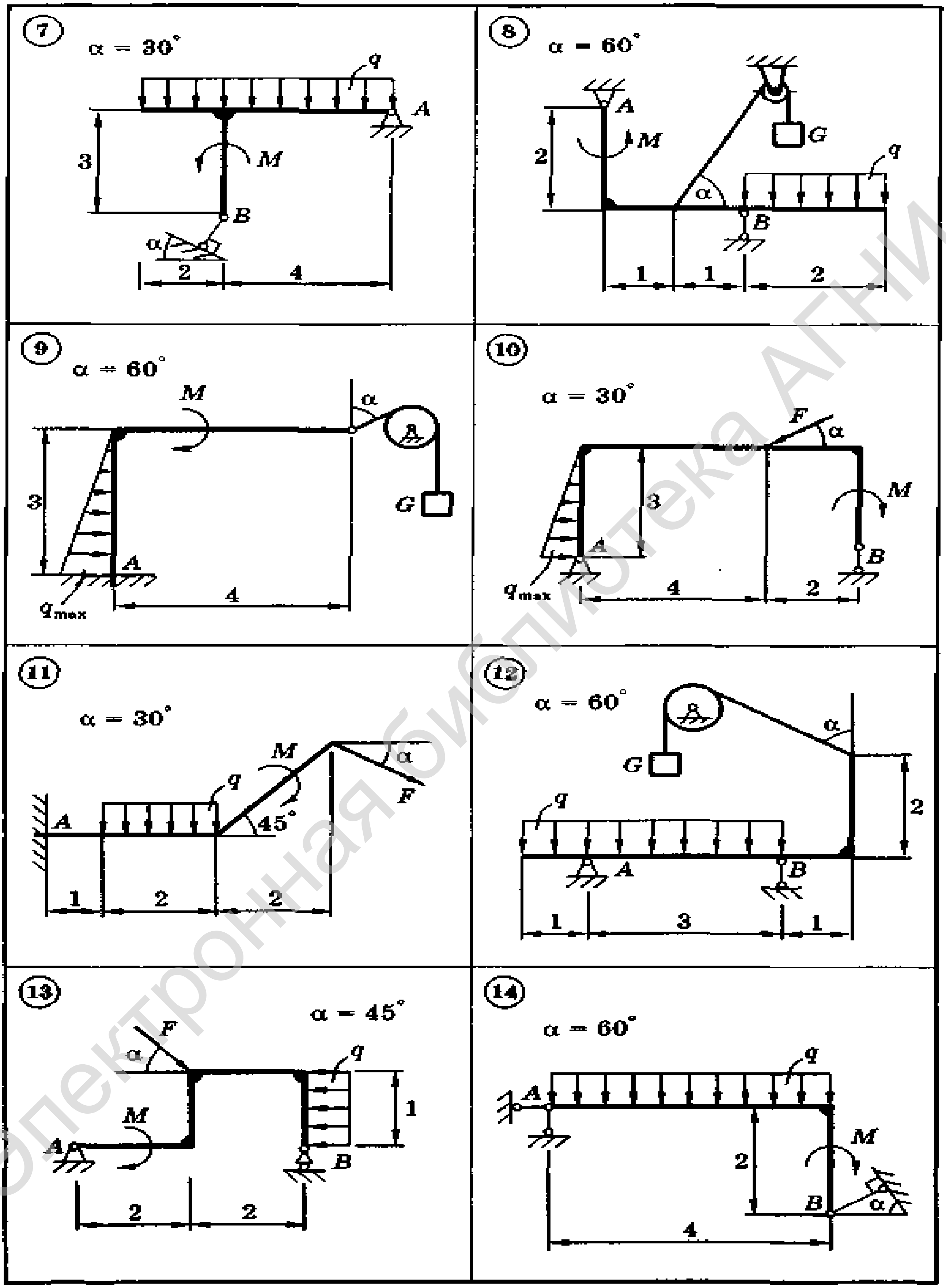
Таким образом, реакция в заделке представлена силой 9 кН, направленной влево, и парой с моментом 40 кНм, действующей против часовой стрелки.

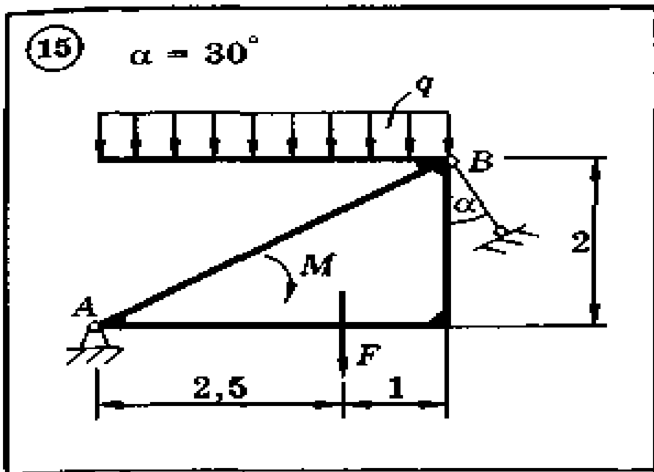
Ответ: $X_A = -9$ кН; $Y_A = 0$; $M_A = 40$ кН·м.

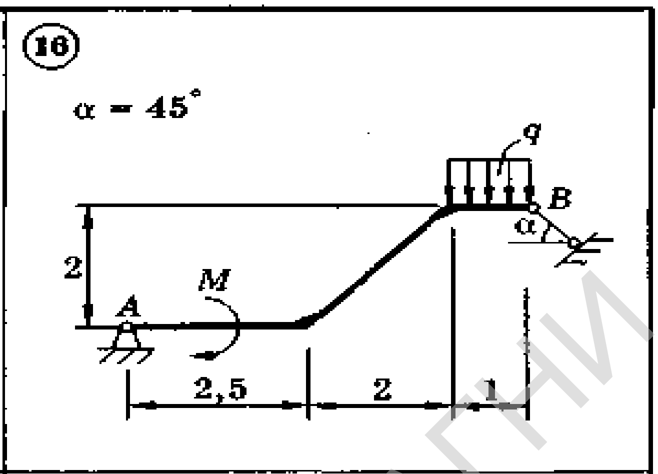
Задание С1.

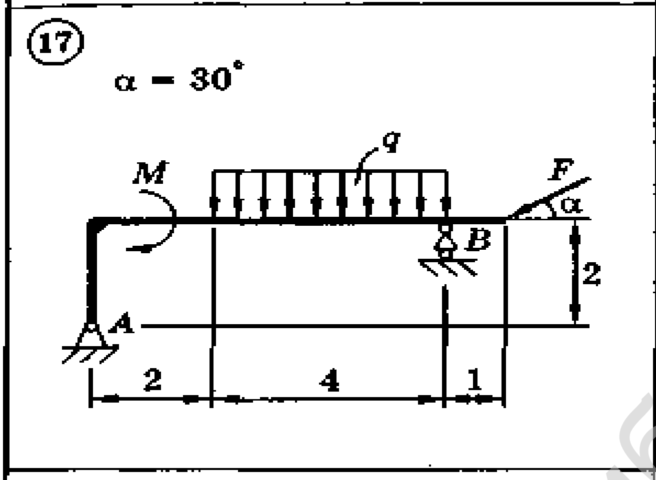
Для представленных на схемах 1-30 тел определить реакции опор. Приведенные на схемах нагрузки имеют следующие величины: вес груза G = 10 кН, сила F = 10 кН, момент пары сил M = 20 кН$\cdot$м, интенсивность распределенной силы q = 5 кН/м, а также q_{max} = 5 кН/м. Размеры указаны в метрах. Весом тела следует пренебречь.

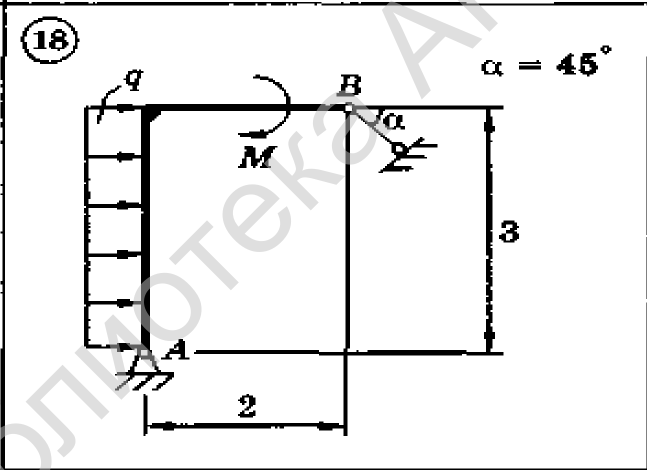

1
α
F
q
α = 30°
2
M
A
B
2,5
2,5
2
F
q
A
2
M
α = 60°
B
α
1
4
3
B
α
2
q
M
A
F
3
1
α = 45°
4
q
M
α
A
B
C
2
2
3
α = 45°
5
q
M
B
α
2
A
1
1
2
α = 60°
6
F
α = 60°
α
2
M
q
B
2,5
4

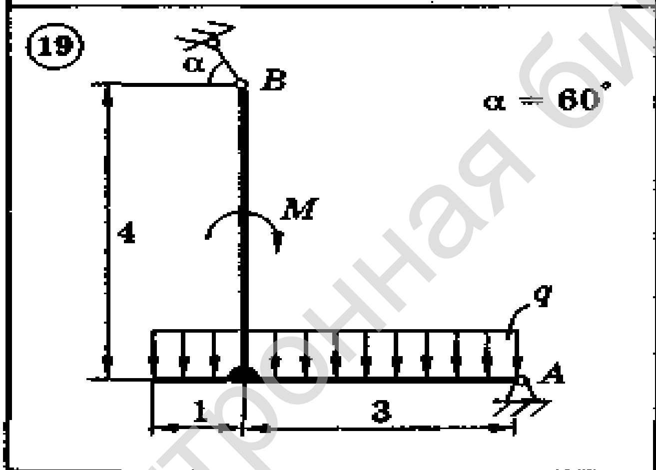

7
α = 30°
q
A
3
M
B
α
2
4
8
α = 60°
A
2
M
G
q
α
B
1
1
2
9
α = 60°
M
α
3
G
A
q_{max}
4
10
α = 30°
F
α
M
3
A
B
q_{max}
4
2
11
α = 30°
M
q
α
A
45°
F
1
2
2
12
α = 60°
α
G
q
2
A
B
1
3
1
13
α = 45°
F
α
q
1
M
A
B
2
2
14
α = 60°
q
A
2
M
B
α
4

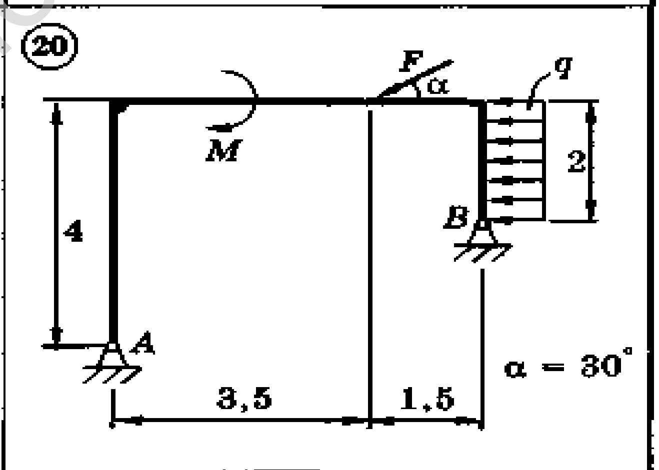

15
α = 30°
q
B
α
2
M
A
F
2,5
1

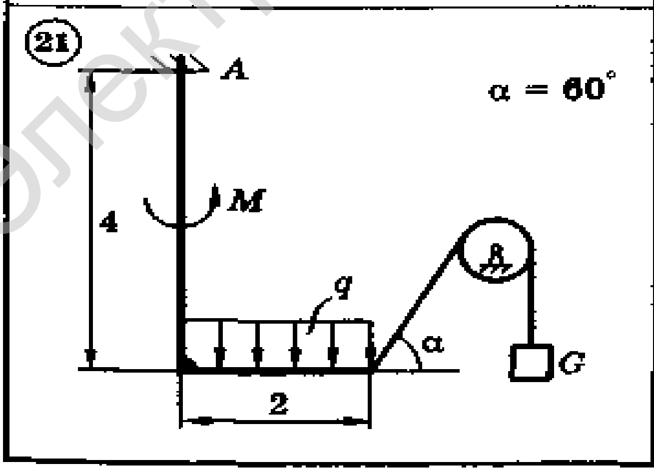

16
α = 45°
q
B
α
2
M
A
2,5
2
1

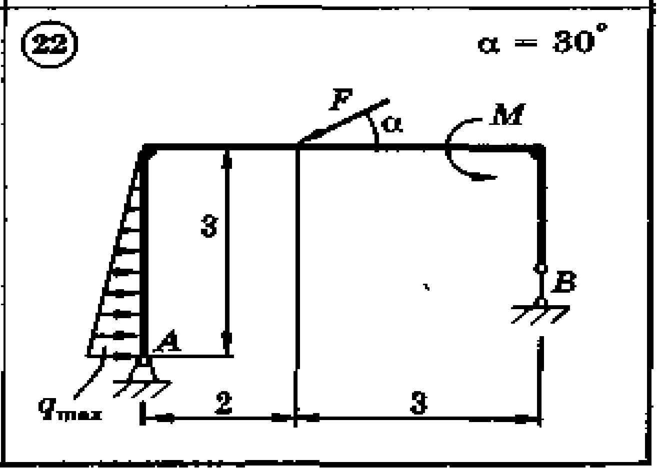

17
α = 30°
q
M
F
α
B
2
A
2
4
1

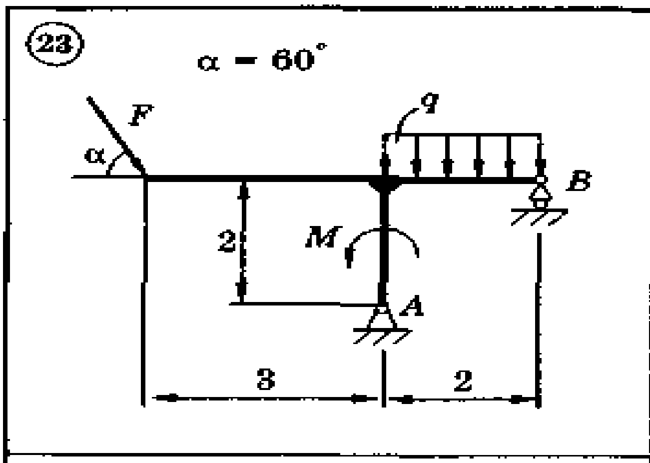

18
α = 45°
q
B
α
M
3
A
2

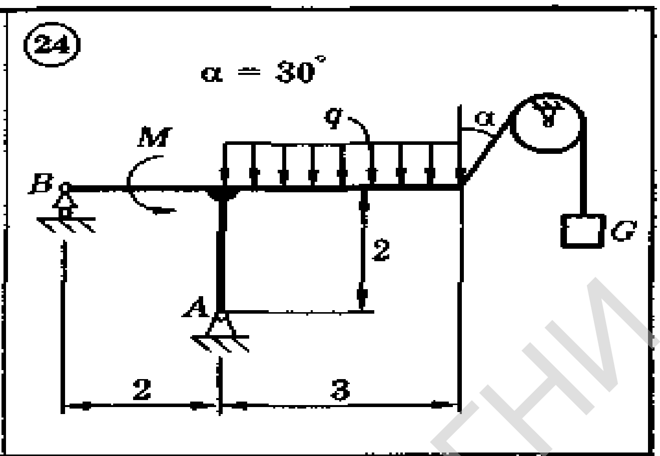

19
α
B
α = 60°
4
M
q
A
1
3

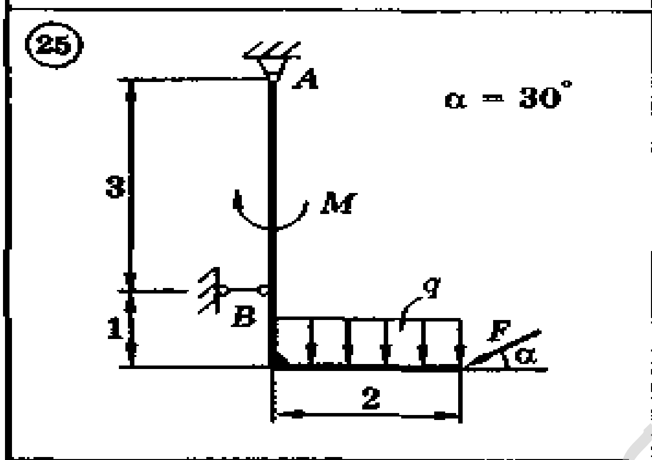

20
F
α
q
M
2
B
4
A
α = 30°
3,5
1,5

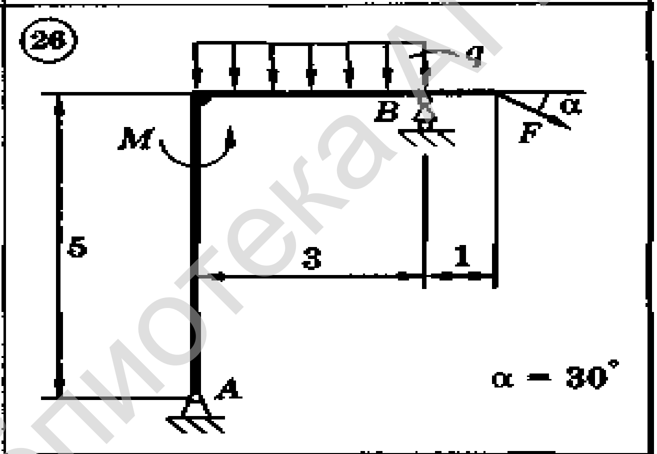

21
A
α = 60°
4
M
R
q
α
G
2

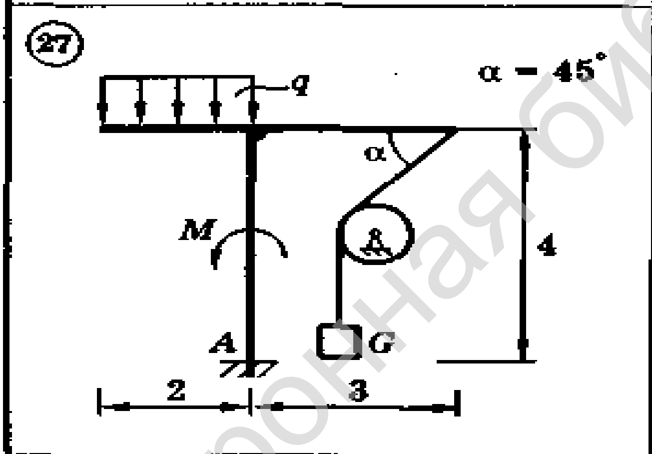

22
α = 30°
F
α
M
3
B
A
q_{max}
2
3

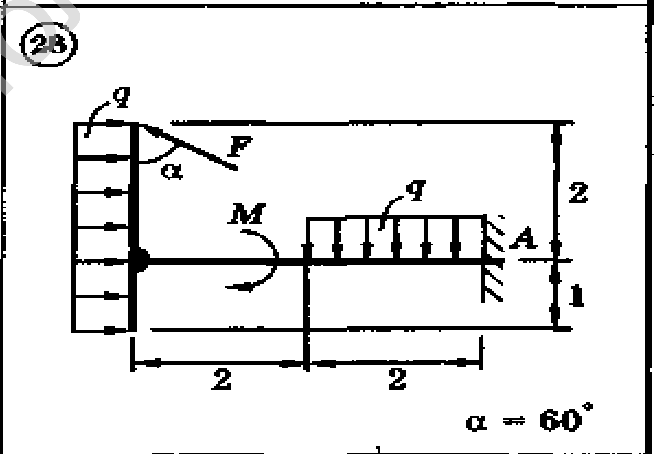

23
α = 60°
F
α
q
B
2
M
A
3
2

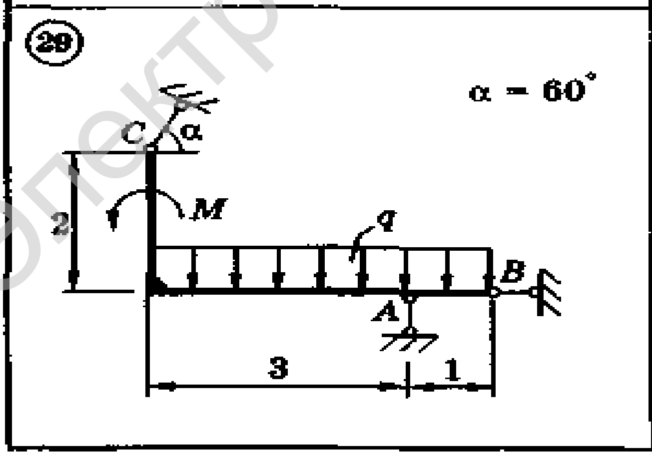

24
α = 30°
M
q
α
B
G
2
A
2
3

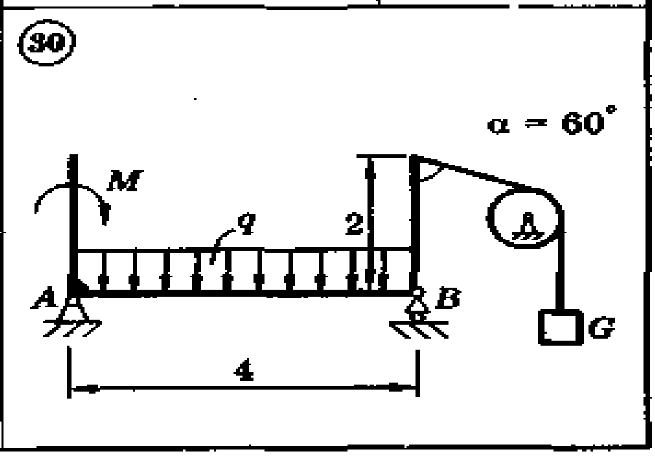

25
A
α = 30°
3
M
q
1
B
F
α
2


26
q
B
α
M
F
5
3
1
A
α = 30°


27
q
α = 45°
α
M
4
A
G
2
3


28
q
F
α
2
M
q
A
1
2
2
α = 60°


29
α = 60°
C
α
2
M
q
B
A
3
1


30
α = 60°
M
q
2
A
B
G
4

Тема: ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ (СИСТЕМА ДВУХ ТЕЛ)

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Конструкция состоит из двух невесомых балок, шарнирно соединенных в точке С (рис. 5). Балка АС опирается в точке В на шарнирно-неподвижную опору и удерживается на левом конце опорным стержнем. Балка CD опирается правым концом на абсолютно гладкую плоскость, составляющую угол α = 60° с горизонтом. На систему действует пара сил с моментом М = 20 кН·м и равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q = 2 кН/м. Определить реакции опор и усилие, передаваемое через шарнир. Геометрические размеры даны в метрах.

Решение. Если рассмотреть равновесие всей конструкции в целом, освободиться от связей и ввести реакции, учитывая, что реакция прямолинейного опорного стержня направлена по стержню, реакция шарнирно-неподвижной опоры имеет неизвестное направление и ее следует разложить на составляющие по осям, а реакция при опирании тела на абсолютно гладкую плоскость перпендикулярна этой плоскости (нормальная реакция), то расчетная схема будет иметь вид, показанный на рис.6.

Здесь распределенная нагрузка заменена сосредоточенной силой

Q = q · 6 = 12 кН.

Система сил на схеме имеет четыре неизвестных, следовательно, они не могут быть определены из трех уравнений для плоской системы сил.

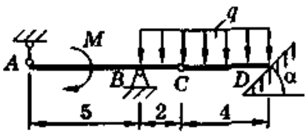


Рисунок 5.

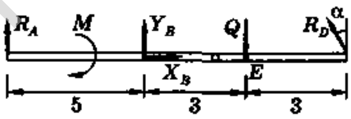


Рисунок 6.

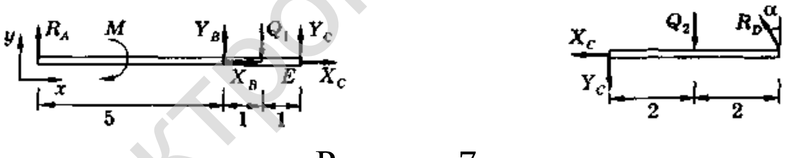


Рисунок 7.

Для решения задачи расчленим конструкцию на отдельные тела, мысленно разделив ее по шарниру, через который передается усилие неизвестного направления (рис. 7).

При направлении составляющих Xc и Yc для левой и правой балок учтен принцип (закон) равенства действия и противодействия. Введенные силы:

Q_1=q ·2=4kH; Q_2=q ·4=8kH.

Уравнения для правой части:

x: - Xc - R_d sin α = 0;

y: -Уc - Q_2 + R $_D$ cos α = 0;

MD: Yc ·4 + Q_2 ·2 = 0.

Отсюда Y_C = -4 кН; R_D = 8 кН; $X_C = -4\sqrt{3}$ кН.

Уравнения для левой части:

x: $X_B + X_C = 0$;

y: $R_A+Y_B-Q_1+Y_C=0$;

M_B:$-R_A\cdot 5-M-Q_1\cdot 1+Y_C\cdot 2=0$.

Отсюда $X_B = 4\sqrt{3}$ кН; R_A = -6,4 кН; $У_B$ = 14,4 кН.

Для проверки правильности полученного решения можно составить уравнения равновесия для всей конструкции например:

$\sum M_E(\overline{F}_k) = -R_A\cdot 8-M-Y_b\cdot 3+R_d\cos\alpha\cdot 3 =$

$= 6{,}4\cdot 8-20-14{,}4\cdot 3+8\cdot 1/2\cdot 3 = 63{,}2-63{,}2 = 0$.

Расчет произведен верно.

О т в е т: $X_B = 4\sqrt{3}$ кН; R_A = -6,4 кН; Y_B = 14,4 кН; $X_C = -4\sqrt{3}$кН; R_D = 8 кН; Y_C = -4 кН.

Задача 2.

Конструкция состоит из двух тел, соединенных шарнирно в точке С. Тело АС закреплено с помощью заделки, тело ВС имеет шарнирно-подвижную (скользящую) опору (рис.8). На тела системы действуют распределенная по линейному закону сила с максимальной интенсивностью q_{max} = 2 кН/м, сила F = 4 кН под углом a = 30° и пара сил с моментом M = 3 кНм. Геометрические размеры указаны в метрах. Определить реакции опор и усилие, передаваемое через шарнир. Вес элементов конструкции не учитывать.

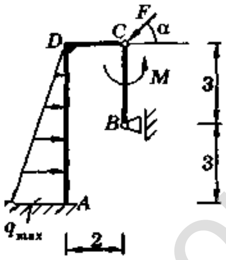


Рисунок 8.

Решение. Если рассмотреть равновесие всей конструкции в целом, учитывая, что реакция заделки состоит из силы неизвестного направления и пары, а реакция скользящей опоры перпендикулярна опорной поверхности, то расчетная схема будет иметь вид, представленный на рис.9.

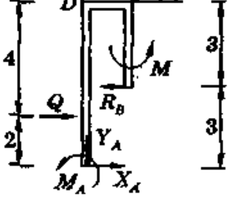


Рисунок 9.

Здесь равнодействующая распределенной нагрузки

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot 6 = 6kH$$

расположена на расстоянии двух метров (1/3 длины AD) от точки A; M_A — неизвестный момент заделки.

В данной системе сил четыре неизвестных реакции (X_A, $Y_д$, M_A, R_B), и их нельзя определить из трех уравнений плоской системы сил.

Поэтому расчленим систему на отдельные тела по шарниру.

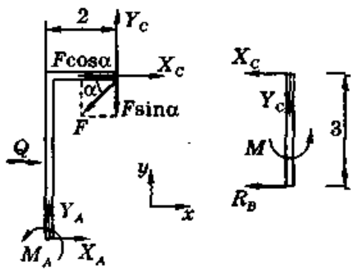


Рисунок 10.

Силу, приложенную в шарнире, следует при этом учитывать лишь на одном теле (любом из них). Уравнения для тела BC:

x: -Xc –Rb=O;   y: - Yc = 0;   Mc: M - R_B ·3 = 0.

Отсюда Xc = -1 кН; Ус = O; R_B = 1 кН.

Уравнения для тела AC:

x: X_A+Q-Fcos α α -Xc =0;

y: Y_A-F sin α + Yc =0;

M_A: M_A-Q · 2 + Fcos α · 6- Fsin α · 2 + Yc · 2-Xc · 6 = 0.

Здесь при вычислении момента силы F относительно точки A использована теорема Вариньона: сила F разложена на составляющие F cos α и F sin α и определена сумма их моментов.

Из последней системы уравнений находим:

X_A = -1,54 кН; Y_A = 2 кН; M_A = -10,8 кНм.

Для проверки полученного решения можно составить суммы проекций и

$$\sum M_D\left(\overline{F}_k\right) = M_A + X_A \cdot 6 + Q \cdot 4 - F \sin a \cdot 2 + M - R_{\mathbf{B}} \cdot 3 = 10{,}8 - 9{,}24 + 24 - 4 + 3 - 3 = -27{,}04 + 27 \approx 0$$

моментов сил для всей конструкции например:

Решение выполнено верно. То обстоятельство, что сумма моментов оказалась равна нулю приблизительно, определено погрешностью вычислений.

В данном случае погрешность оказалась равной

$$\frac{0{,}04}{27} \approx 0{,}15\%$$

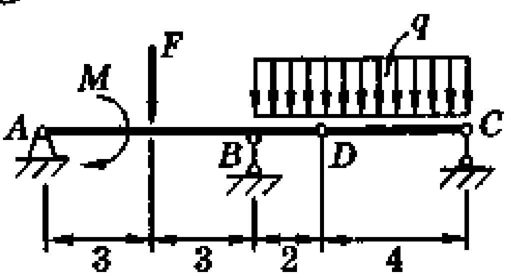
Ответ: X_A = -1,54 кН; Y_A = 2 кН; M_A = -10,8 кНм; Xc = -1 кН; Ус = 0; R_B = 1 кН.

ЗАДАНИЕ С2.

ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ (СИСТЕМА ТЕЛ)

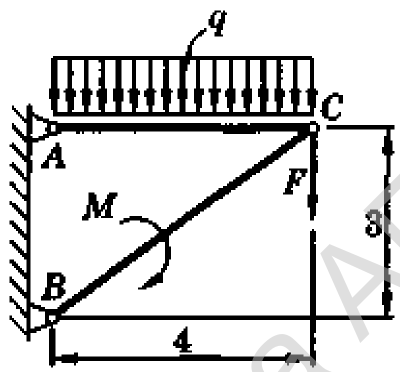
Для представленных на схемах 1-30 составных конструкций найти реакции опор. Размеры указаны в метрах. Весом элементов конструкций пренебречь.

1



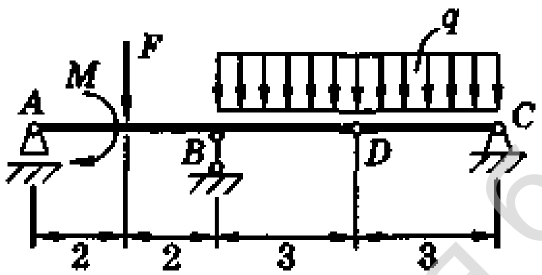
$M = 40$ кН·м; $q = 10$ кН/м;
$F = 20$ кН

2



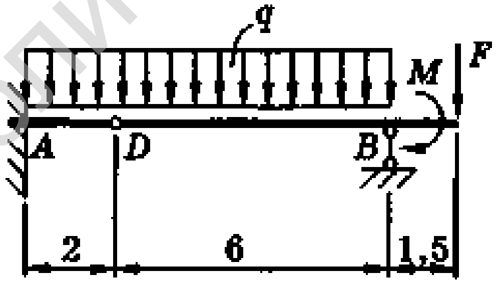
$M = 30$ кН·м; $q = 10$ кН/м;
$F = 20$ кН

3



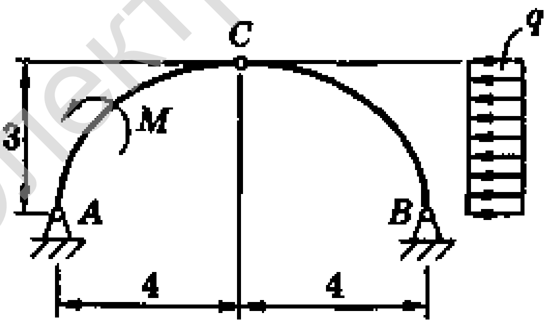
$M = 65$ кН·м; $q = 20$ кН/м;
$F = 30$ кН

4



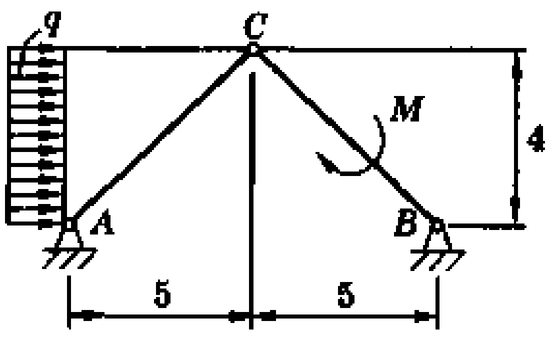
$M = 42$ кН·м; $q = 15$ кН/м;
$F = 20$ кН

5

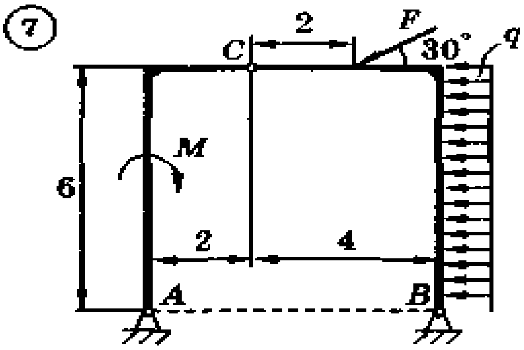


$M = 40$ кН·м; $q = 20$ кН/м

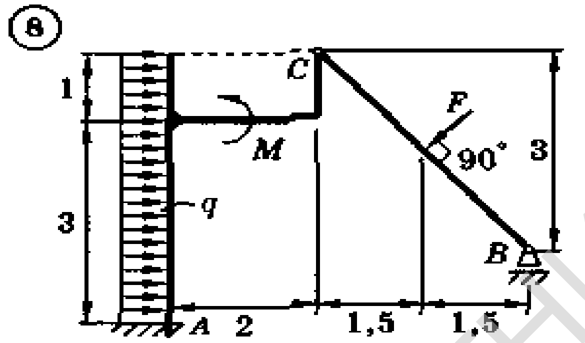
6



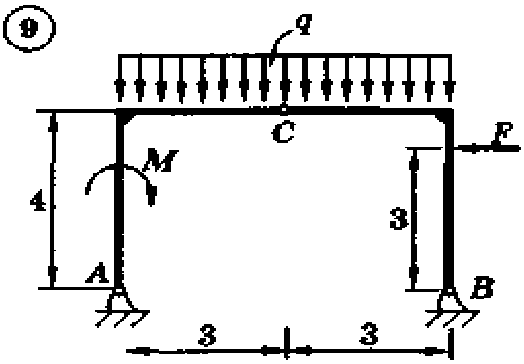
$M = 20$ кН·м; $q = 30$ кН/м



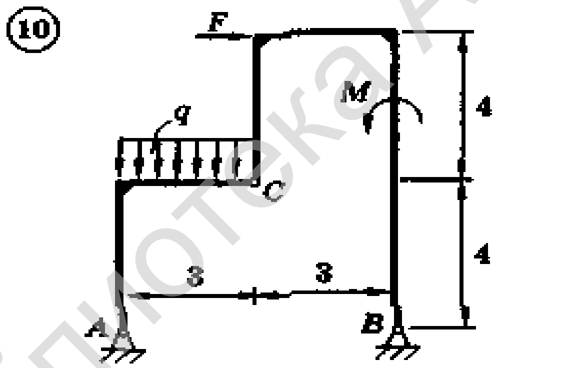
$M = 30$ кН·м; $q = 10$ кН/м;
$F = 15$ кН



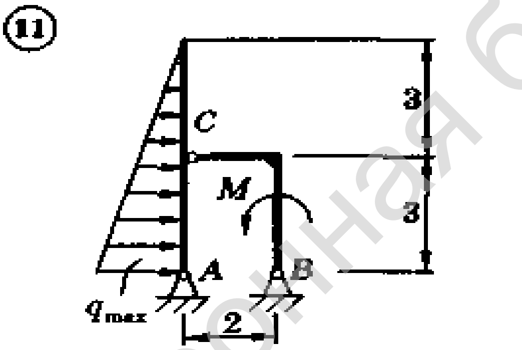
$M = 11$ кН·м; $q = 4$ кН/м;
$F = 13$ кН



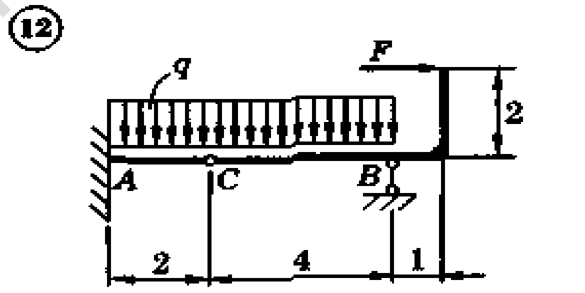
$M = 60$ кН·м; $q = 20$ кН/м;
$F = 30$ кН



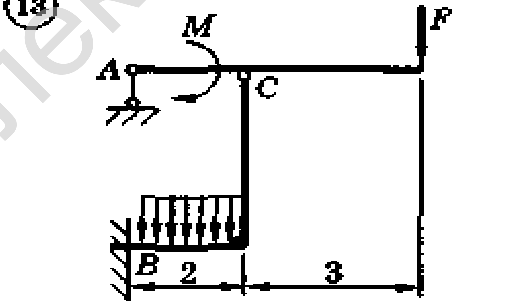
$M = 30$ кН·м; $q = 10$ кН/м;
$F = 20$ кН



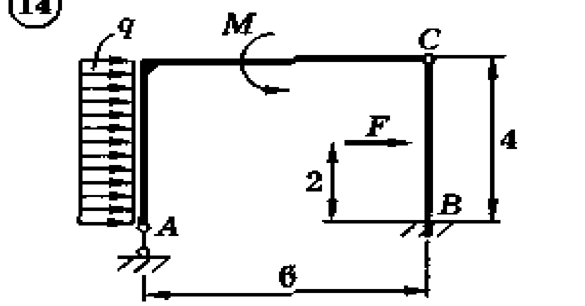
$M = 20$ кН·м; $q_{max} = 40$ кН/м



$q = 20$ кН/м; $F = 50$ кН

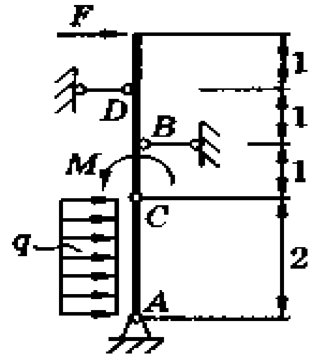


$M = 40$ кН·м; $q = 20$ кН/м;
$F = 20$ кН



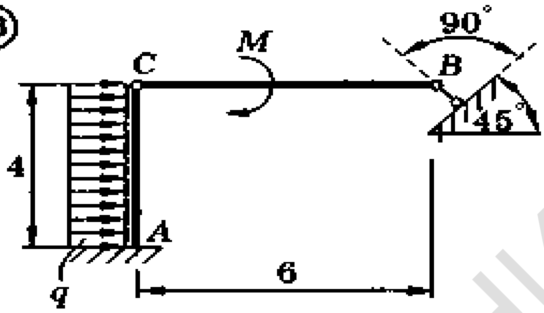
$M = 40$ кН·м; $q = 10$ кН/м;
$F = 30$ кН

15



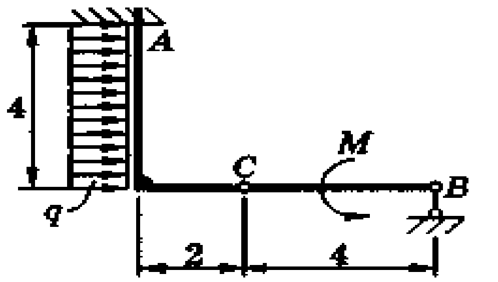
$M = 40$ кН·м; $q = 30$ кН/м;
$F = 20$ кН

16



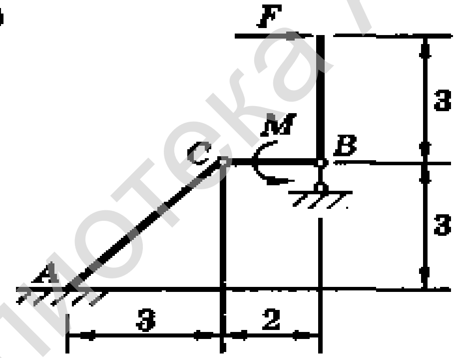
$M = 60$ кН·м; $q = 25$ кН/м

17



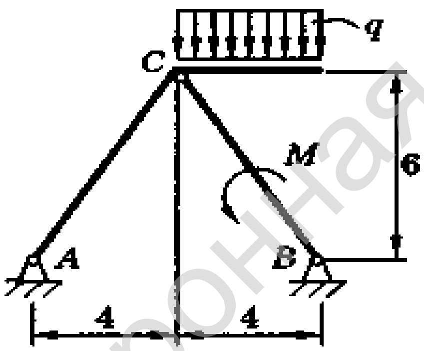
$M = 32$ кН·м; $q = 15$ кН/м

18



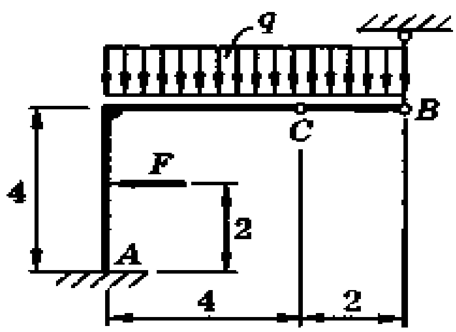
$M = 30$ кН·м; $F = 50$ кН/м

19



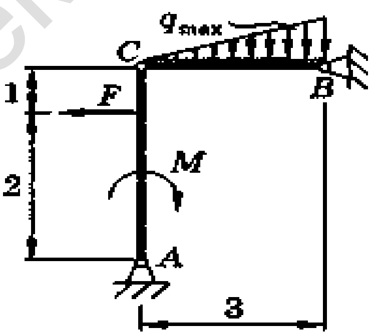
$M = 50$ кН·м; $q = 40$ кН/м

20



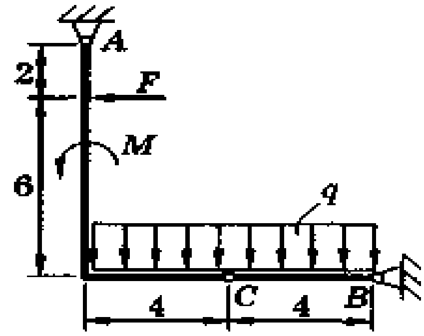
$q = 20$ кН/м; $F = 60$ кН

21



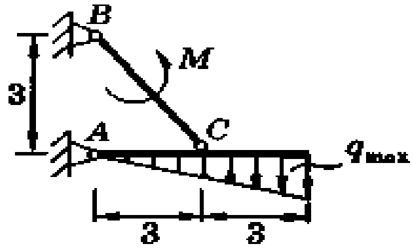
$M = 120$ кН·м; $q_{max} = 30$ кН/м;
$F = 40$ кН

22



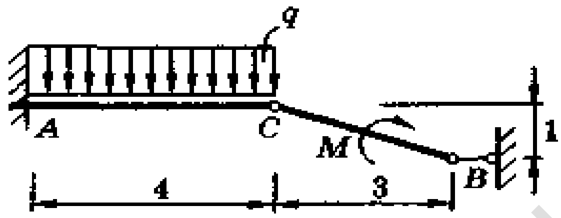
$M = 1600$ кН·м; $q = 25$ кН/м;
$F = 100$ кН

23



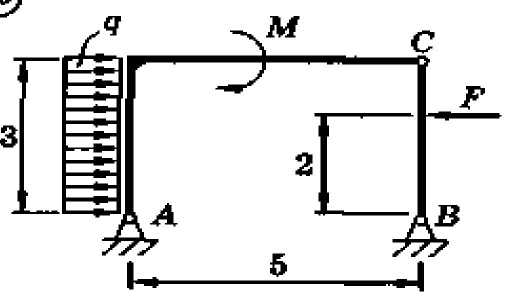
$M = 60$ кН·м; $q_{max} = 12$ кН/м

24



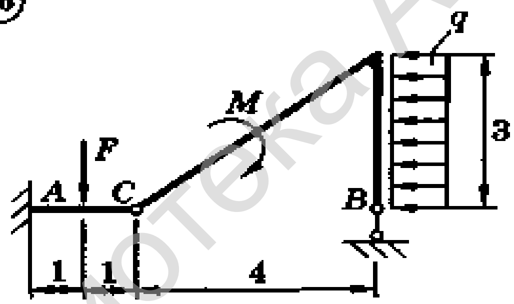
$M = 20$ кН·м; $q = 40$ кН/м

25



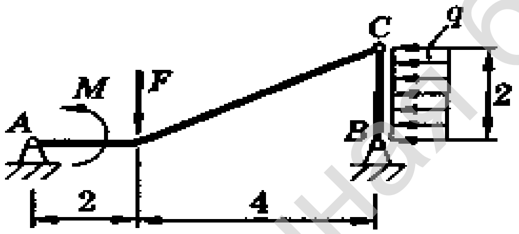
$M = 40$ кН·м; $q = 20$ кН/м;
$F = 60$ кН

26



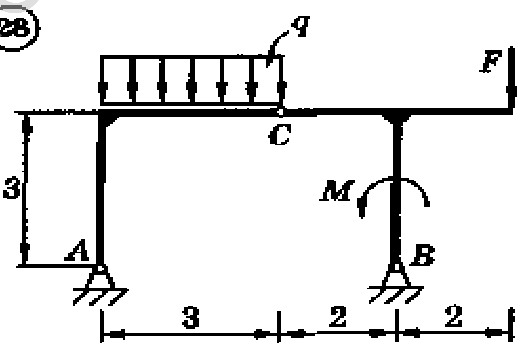
$M = 35$ кН·м; $q = 30$ кН/м;
$F = 50$ кН

27



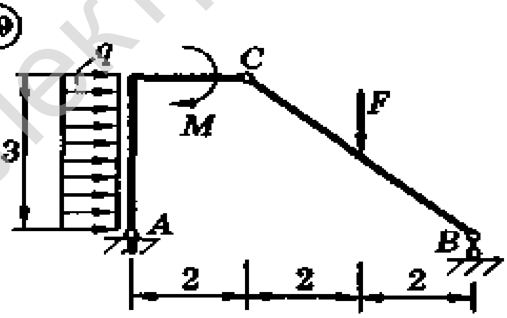
$M = 20$ кН·м; $q = 25$ кН/м;
$F = 40$ кН

28



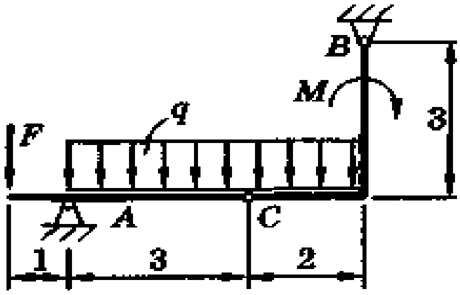
$M = 30$ кН·м; $q = 10$ кН/м;
$F = 50$ кН

29



$M = 40$ кН·м; $q = 10$ кН/м;
$F = 30$ кН

30



$M = 40$ кН·м; $q = 20$ кН/м;
$F = 100$ кН

Тема: СИСТЕМА СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

На верхней грани бруса А (рис.11)весом G_1= 200 Н находится брус В весом G_2 = 100 Н. Брус А опирается нижней гранью на горизонтальную поверхность, причем коэффициент трения между ними f_1 = 0,1. Коэффициент трения между брусами f_2 = 0,5. На брус В действует сила Р = 60 Н под углом α = 30°.

Будет ли брус В двигаться относительно бруса А? Будет ли брус А двигаться относительно горизонтальной поверхности?

Решение. Для того чтобы ответить, на первый вопрос задачи, следует рассмотреть равновесие бруса В (рис.12).

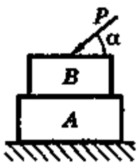


Рисунок 11.

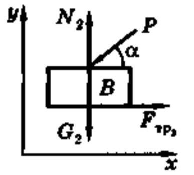


Рисунок 12.

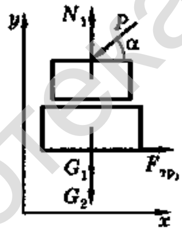


Рисунок 13.

Составим уравнения равновесия в проекциях на оси:

x: $F_{тр2}$-Pcos α =0

y: N_2-G_2-Psin α =0.

Из этих уравнений находим

$F_{тр2}$=Pcos α = 52Н;

N_2=G2+Psin α=130 Н.

Учтем теперь закон Кулона для силы трения:

$$F_{тр2}^{\max} = f_2 N_2 = 65\,H$$

Таким образом, сила трения оказалась, меньше ее максимального значения, и, следовательно, брус В двигаться относительно бруса А не будет.

Для того чтобы ответить на второй вопрос задачи, можно рассмотреть равновесие обоих брусов (рис.13).

Составим уравнения равновесия в проекциях на оси:

$$x:\ F_{тр1} - P\cos\alpha = 0;$$

$$y:\ N_1 - G_1 - G_2 - P\sin\alpha = 0.$$

Из этих уравнений находим

$$F_{тр1} = P\cos\alpha \approx 52\ \text{Н};$$

$$N_1 = G_1 + G_2 + P\sin\alpha = 330\ \text{Н}.$$

Учтем теперь закон Кулона для силы трения

$$F_{тр1}^{\max} = f_1 N_1 = 33\ \text{Н}.$$

Таким образом, в этом случае необходимая для равновесия сила трения оказалась больше ее максимального значения, и, следовательно, брус А станет двигаться относительно горизонтальной поверхности.

Ответ. Брусы будут двигаться вместе относительно горизонтальной поверхности.

Задача 2.

Лестница весом G = 100 Н опирается на горизонтальный пол и вертикальную стену (рис.14). Стена гладкая, а трение лестницы о пол характеризуется коэффициентом трения между ними f = 0,4. Под каким углом a следует поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться наверх человек G1=800Н?

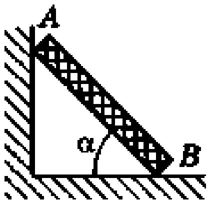


Рисунок 14.

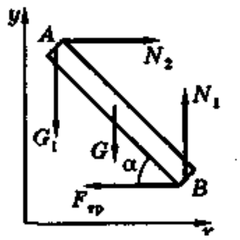


Рисунок 15.

Решение. Покажем на схеме силы, действующие на лестницу с поднявшимся наверх человеком (рис.15): силы тяжести, нормальные реакции и силу трения, направив ее противоположно возможному движению. Составим уравнения равновесия в виде двух уравнений проекций сил на оси и уравнения моментов сил относительно точки В, обозначив длину лестницы буквой *l*.

$$x: N_2 - F_{тр} = 0; \quad y: N_1 - G - G_1 = 0;$$

$$M_B: G_1 l \cos\alpha + G\frac{l}{2}\cos\alpha - N_2 l \sin\alpha = 0.$$

Последнее уравнение после его деления на *l* cos α принимает вид

$$G_1 + 0{,}5G - N_2 \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Учтем также, рассматривая предельное состояние равновесия, соответствующее минимальному значению угла α, закон Кулона для силы трения:

$$F_{тр} = F_{тр}^{max} = fN_1.$$

Из этих уравнений найдем $N_2 = F_{тр} = f(G + G_1)$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2G_1 + G}{2f(G_1 + G)} \approx 2{,}36; \quad \alpha = \operatorname{arctg} 2{,}36 \approx 67^\circ.$$

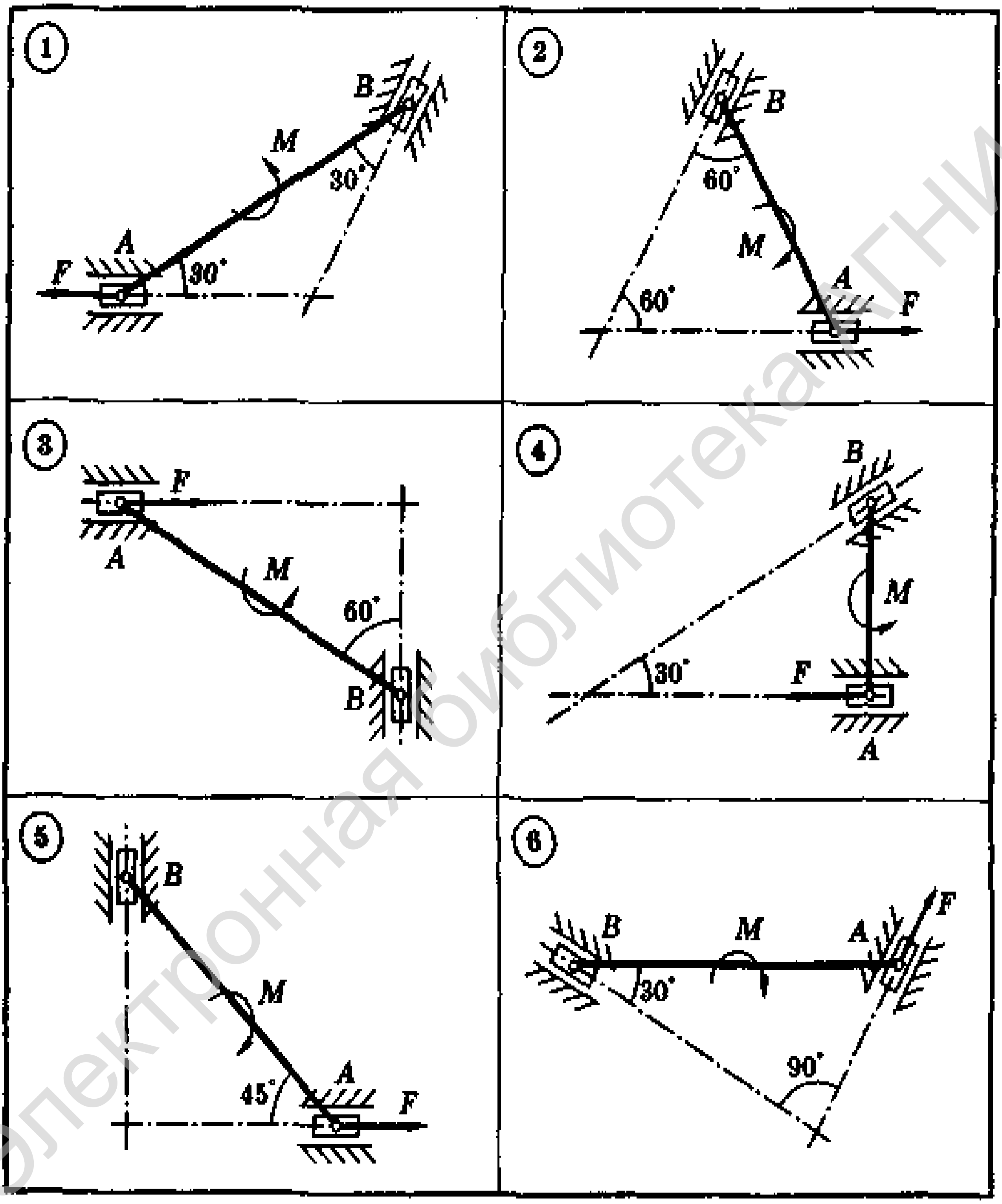
Ответ: $\alpha \geqslant 67^\circ$.

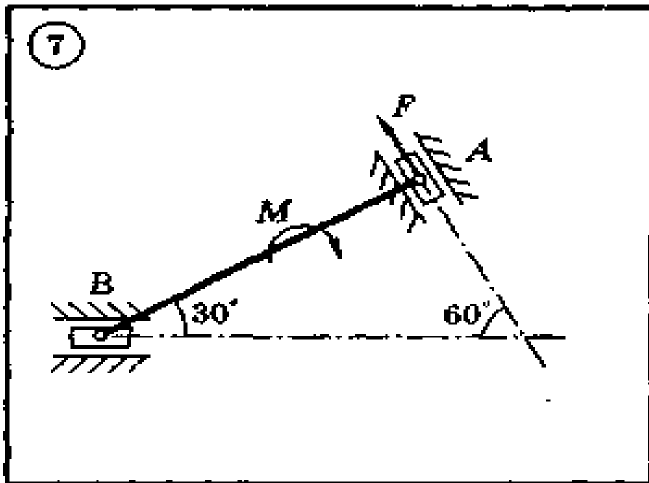
ЗАДАНИЕ С3.

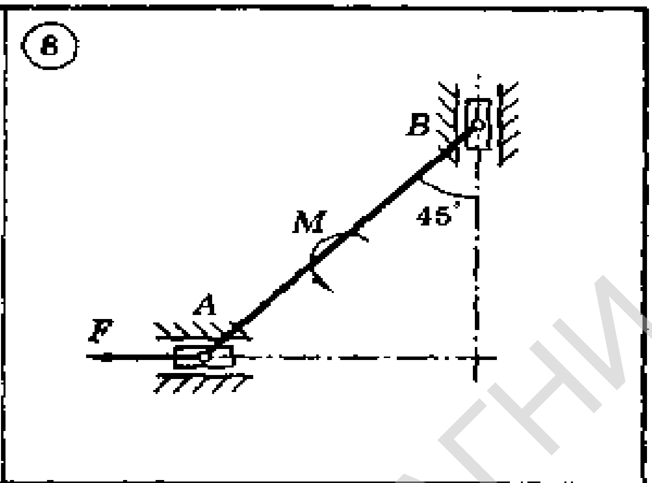
СИСТЕМА СИЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

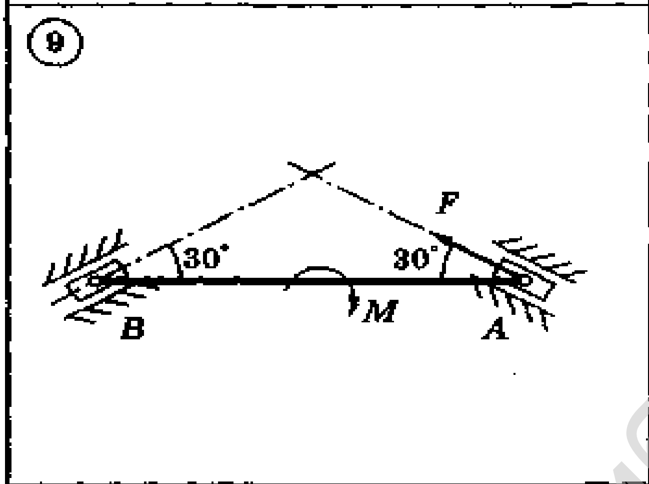
Для представленных на схемах 1-30 механизмов, расположенных в вертикальной плоскости, определить значения силы F из условия равновесия механизмов. Механизм состоит из однородного тонкого стержня АВ длиной / = 4м и весом G= 15 кН и двух невесомых ползунов А и В, которые могут перемещаться по направляющим. На стержень действует пара сил с моментом

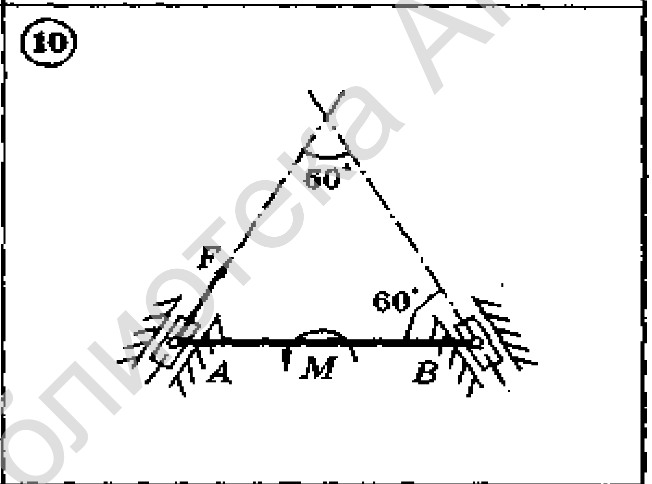
M = 20 кН·м. Трение у ползуна B отсутствует, коэффициент трения ползуна A по направляющей f = 0,4. Размерами ползунов пренебречь.

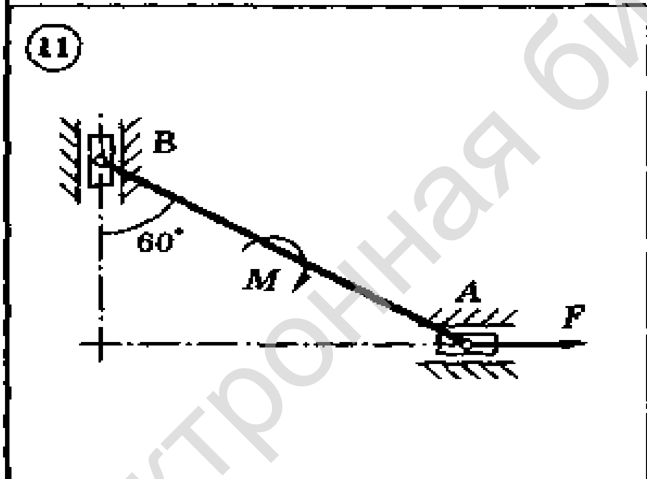


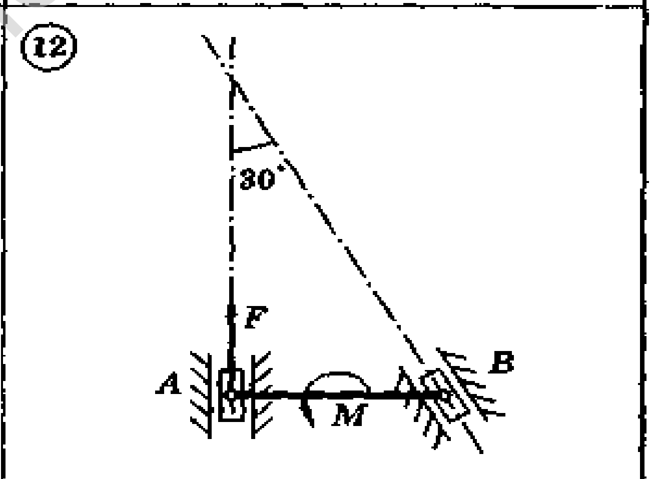

7
F
A
M
B
30°
60°

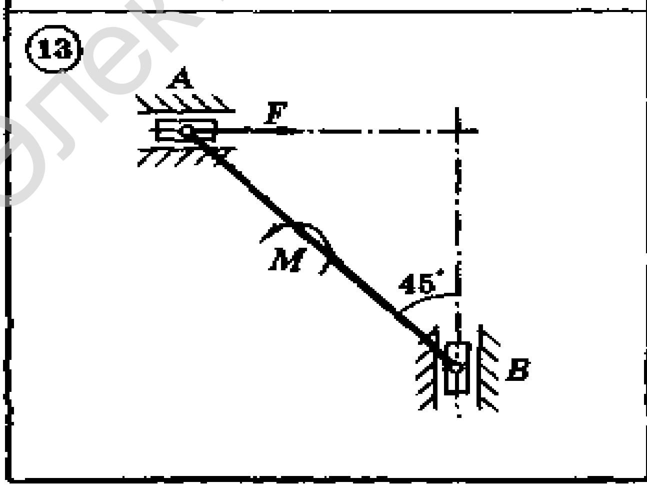

8
B
M
45°
A
F

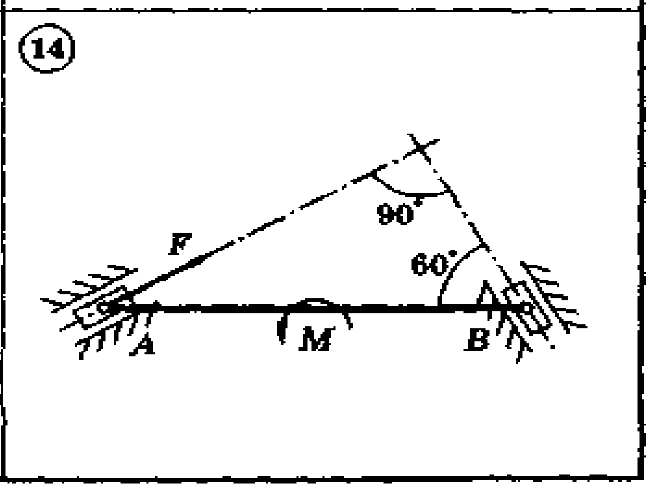

9
F
30°
30°
B
M
A

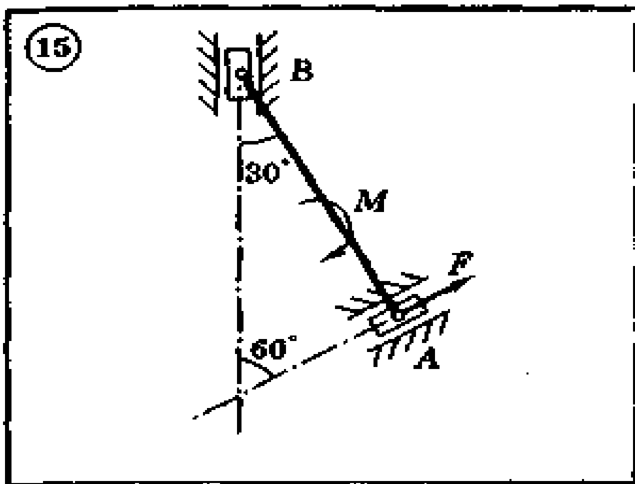

10
60°
F
60°
A
M
B

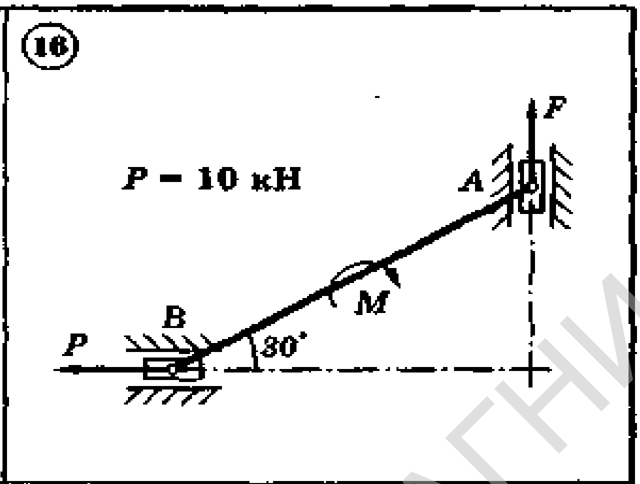

11
B
60°
M
A
F

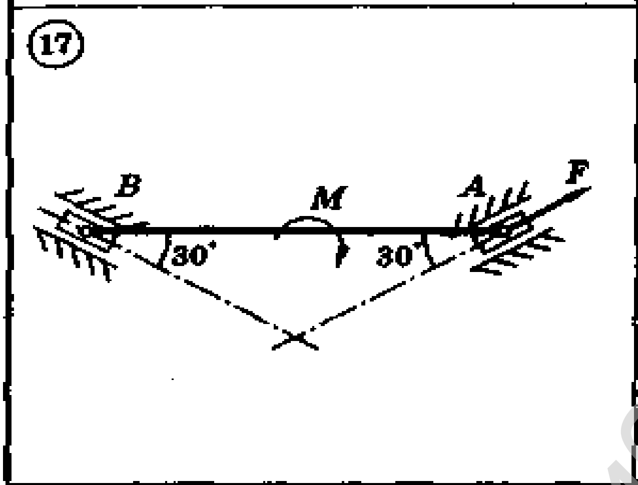

12
30°
F
A
M
B

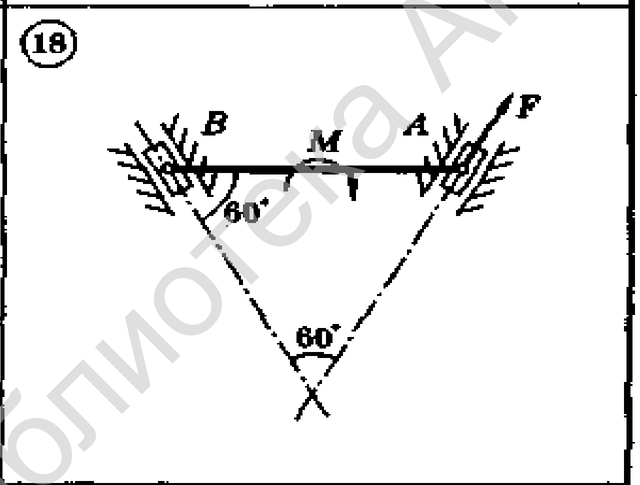

13
A
F
M
45°
B

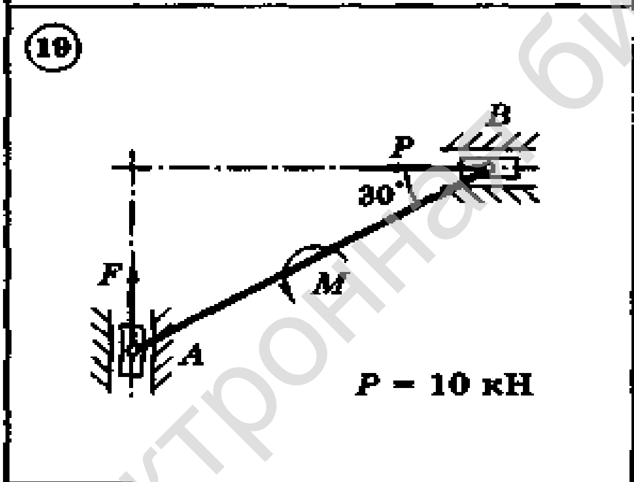

14
90°
F
60°
A
M
B

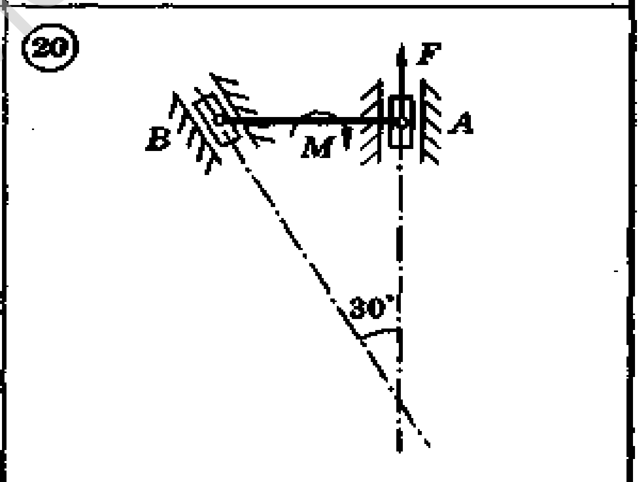

15
B
30°
M
F
60°
A

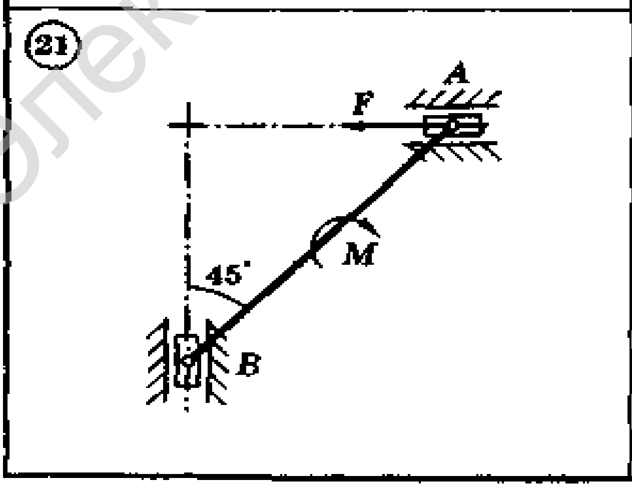

16
F
P = 10 кН
A
M
B
P
30°

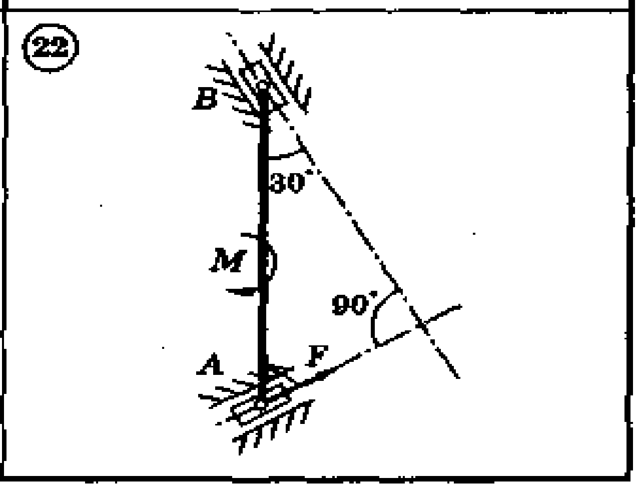

17
B
M
A
F
30°
30°


18
B
M
A
F
60°
60°

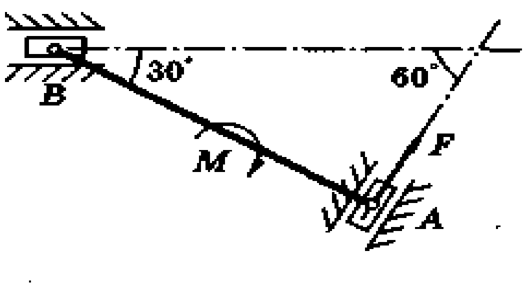

19
B
P
30°
F
M
A
P = 10 кН


20
F
B
M
A
30°

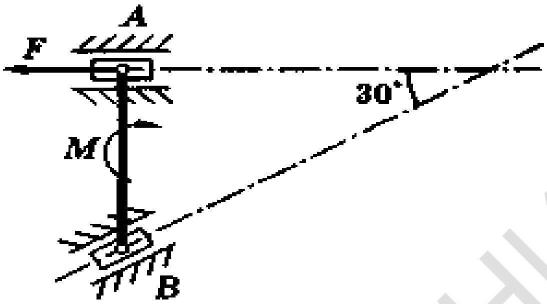

21
A
F
M
45°
B


22
B
30°
M
90°
A
F

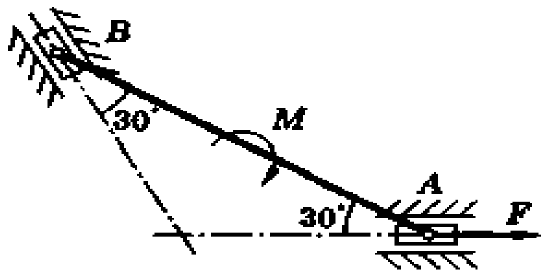
23



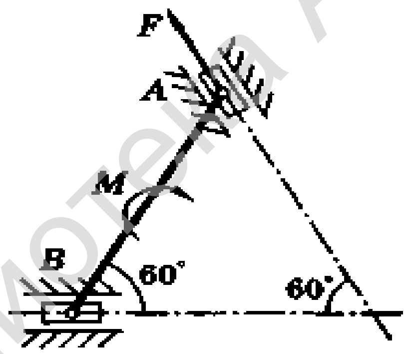
24



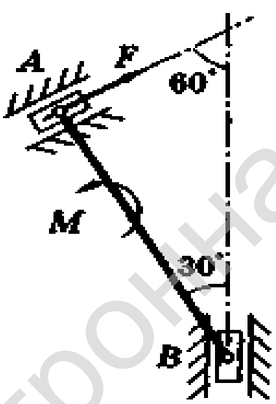
25



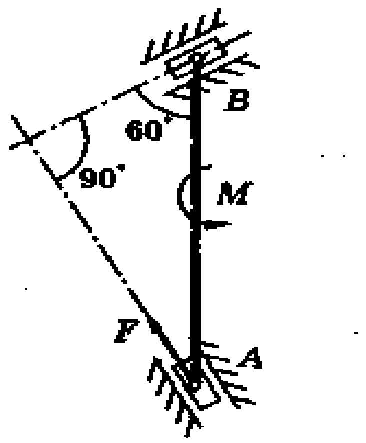
26



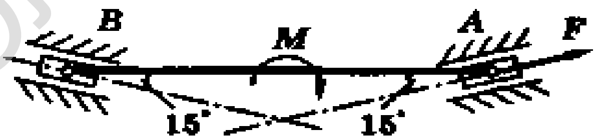
27



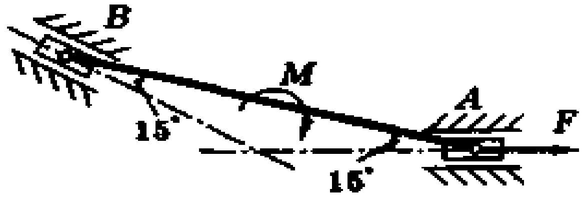
28



29



30



КИНЕМАТИКА.
Тема: КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Точка М движется в плоскости xOy согласно уравнениям:

$x = \pi t;\quad y = \sin \pi t,$

где x, y — в сантиметрах; t — в секундах.

Определить траекторию, скорость и ускорение точки, а также радиус кривизны траектории для момента времени $t = \frac{1}{4} c$

Решение: Для определения траектории точки исключим из уравнений движения время: $t = \frac{x}{p}$

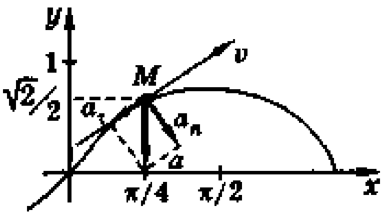


Рисунок 16.

Тогда y=sin x. Траектория точки- синусоида (рис.16).

Определим положение точки на траектории. Имеем при $t = \frac{1}{4} c : x = \frac{\pi}{4} = 0{,}785 с{,}7\ y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$ см - точка М на траектории.

Получим проекции скорости точки на оси координат, дифференцируя координаты по времени:

$$u_x = \dot{x} = p = 3{,}14 \text{см/с};\ u_y = \dot{y} = p \cos pt \Big|_{t=\frac{1}{4}} = p\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}22 \text{см/с}$$

По найденным проекциям определим модуль скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \pi \sqrt{\frac{3}{2}} = 3{,}85 \text{см/с.}$$

Определим проекции ускорения точки на оси координат, дифференцируя проекции скорости:

$$a_x = \dot{u}_x = 0;\ a_y = \dot{u}_y = -p^2 \sin pt \Big|_{t=\frac{1}{4}} = -p^2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -6{,}98 \text{см/с.}$$

Модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 6{,}98 \text{см/с}^2$$

В соответствии с величинами проекций скорости и ускорения изобразим их на рис.16.

Поскольку точка описывает криволинейную траекторию, то ее ускорение можно представить в виде векторной суммы двух составляющих: $\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$, где $\bar{a}_t$ — касательное ускорение, $\bar{a}_n$ — нормальное ускорение точки.

Вектор $\bar{a}_t$ направлен по касательной, то есть по одной линии со скоростью; вектор $\bar{a}_n$ направлен по главной нормали (перпендикулярно касательной) и всегда внутрь траектории.

Модуль касательного ускорения равен

$$a_\tau = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right| = \pi^2 \frac{1}{\sqrt{6}} = 4{,}03 \text{ см/с}^2 .$$

В данном случае направления векторов v и a_x противоположны, поэтому движение точки замедленное.

Так как векторы $\bar{a}_t$ и $\bar{a}_n$ всегда взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения точки равен $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$.

Отсюда находим модуль нормального ускорения

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \pi^2 \frac{1}{\sqrt{3}} = 5{,}69 \text{см/с}^2$$

Радиус кривизны траектории определяем из формулы для нормального ускорения $a_n = \frac{u^2}{r}$, а именно: $r = \frac{u^2}{a_n} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}60\text{см}$

Ответ: $u = 3{,}85 см/с; a = 6{,}98 см/с^2; r = 2{,}60 см.$

ЗАДАЧА 2

Точка М движется на плоскости по окружности радиуса R=10 см согласно уравнению

$s(t) = 5p \sin\frac{p}{6}t$ см.

Найти положение точки на траектории, а также скорость и ускорение точки в момент времени t= 7с.

Решение. При задании движения точки естественным способом должны быть известны ее траектория, начало отсчета, положительное направление дуговой координаты, а также уравнение движения точки по траектории s(t).

Выберем в качестве начала отсчета верхнюю точку окружности и положительное направление — по часовой стрелке.

При t = 7 с положение точки М на траектории определяется величиной дуговой координаты

$s(7) = 5p \sin\frac{7}{6}p = -2{,}5p$, что соответствует углу $a = \frac{|s|}{R} = \frac{p}{4}\text{рад} = 45^\circ$.

При естественном способе задания движения точки ее скорость определяется выражением $\bar{u} = u_t \bar{t}$ где u_t — проекция скорости на касательную, которая равна производной по времени от дуговой координаты $u_t = \dot{s} = \frac{5}{6}p^2 \cos\frac{p}{6}t$.

При t=7 с получаем $u_t = -7{,}12$см/с, и модуль скорости равен $u = 7{,}12 см/с$.

Знак «минус» у величины u_t означает, что точка движется в сторону убывания дуговой координаты s{t), то есть в сторону ее отрицательных значений.

Ускорение точки является векторной суммой двух его составляющих: $\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$ где $\bar{a}_t$ — касательное ускорение, $\bar{a}_n$ — нормальное ускорение.

Направление вектора $\bar{a}_t$ определяется знаком величины $\dot{u}_t$ вектор $\bar{a}_n$ всегда направлен перпендикулярно касательной внутрь траектории. Проекция ускорения точки на касательную равна

$$a_t = \dot{u}_t = \ddot{s} = -\frac{5}{36}p^3 \sin\frac{p}{6}t$$

При t=7с получаем a_t =2,15см/с^2.

Знаки u_t и $\bar{a}_t$ различны, поэтому движение точки по траектории в данный момент времени является замедленным.

Модуль нормального ускорения равен

$$a_n = \frac{u^2}{r} = \frac{u^2}{R} = 5{,}07 см/с$$

Модуль полного ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 5{,}51 см/с^2$$

Векторы $\bar{u}, \bar{a}_t, \bar{a}_n, \bar{a}$ показаны на рисунке.

Ответ: $u = 7{,}12$см/с; а = 5,51с,51 ^{2}.

ЗАДАНИЕ К 1.

В соответствии с заданными уравнениями движения (варианты 1-30) определить траекторию движения точки. Для заданного момента времени t найти положение точки на траектории, ее скорость и ускорение (показать их на рисунке), а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке. Данные, необходимые для вычисления, представлены ниже. Координаты x и y даны в метрах, время в секундах.

№ вар.	x	y	t	№ вар.	x	y	t
1	$3t^2+6t+12$	t^2+2t+6	2	16	$6t^3$ t3+12	$2t^3+3$	1
2	2t	$2t^2+3t+1$	1	17	$4t^2+5$	$5t^2+1$	1
3	$2\cos(pt)$	$2\sin(pt)$	1/4	18	$4\cos(pt)$	$4\sin(pt)$	1/3
4	3t+3	-3/(t+1)	0	19	-t-1	-2/(t+1)	0
5	$2\cos(pt/3)$	$5\sin(pt/3)$	1	20	$\mathrm{Cos}(pt^2/6)+8$	$5\sin(pt^2/6)$	2
6	$8t^2+7$	$12t^2+11$	1/2	21	t^4+2t+1	$2t^4+4t+5$	1
7	t^2-4t+1	t+1	1	22	t2	1,5t-1	1
8	$3\cos(pt^2/6)$	$3\sin(pt^2/6)$	1	23	$J\cos(pt^2/4)$	$J\sin(pt^2/4)$	1
9	-2t-2	-4/(t+1)	0	24	-5t-5	-5/(t+1)	0
10	$4\cos(pt/3)+3$	$J\sin(pt/3)$	1	25	$32\cos(pt/8)$	$4\sin(pt/8)$	2
11	$2t^3+8t+12$	t^3+4t+3	1	26	t^8+1	t^8-6	1
12	3t+1	$2t^2+4$	2	27	t^2+3	t+2	1
13	$\mathrm{Cos}(pt^2/3)$	$\mathrm{Sin}(pt^2/3)$	1	28	4cos(t)	4sin(t)	$p/3$
14	7t+1	-8/(7t+1)	4/7	29	2,5t	-10/(5t+1)	1
15	$16\cos(pt/16)$	$4\sin(pt/16)$	4	30	$-\cos(pt^2/6)$	$3\sin(pt^2/6)+4$	1

Тема: ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Лебедка (рис.17), поднимающая груз по наклонной плоскости, состоит из двух валов 1 и 2 с шестернями (зубчатыми колесами), числа зубьев которых равны соответственно z_1 = 12 и z_2 = 48. К валу 2 прикреплен барабан радиусом r = 0,3 м, на который наматывается грузовой трос. Вал 1 вращается равноускоренно с угловым ускорением e_1= 8 с-2. Определить скорость, ускорение и перемещение груза, а также ускорение точки В барабана в момент времени t = 1 с. В начальный момент времени система находилась в покое.

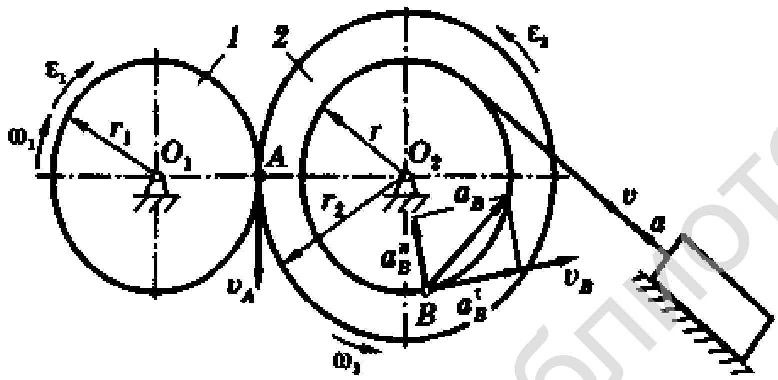


Рисунок 17.

Решение. Найдем угловую скорость w_1 ведущего вала 1 из условия, что оно вращается с угловым ускорением e_1 = const, учитывая, что

$\frac{dw_1}{dt} = e_1$ интегрируя последнее уравнение по времени, получаем

$$w_1 = \int e_1 dt = e_1 t + C_1$$

Постоянную интегрирования получаем из начального условия: при t = 0 w_1=0 (система находилась в покое), следовательно C1 = 0.

Итак, угловая скорость вала 1 определяется уравнением $w_1 = e_1 t = 8t$

При t = 1 с получаем w_1= 8 с-1.

Шестерни 1 и 2 взаимодействуют без проскальзывания. Поэтому скорости точек их касания (точка А) будут одинаковы: $w_1 r_1 = w_2 r_2$

Отсюда находим угловую скорость w_2 вала 2, учитывая

что $\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$;

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \frac{z_1}{z_2} = 2t\Big|_{t=1\,c} = 2\ \text{c}^{-1}.$$

Угловое ускорение вала 2 равно $e_2 = \dot{w}_2 = 2c^{-2}$

Поскольку трос нерастяжим и относительно барабана не проскальзывает, то скорость груза u будет равна скорости любой из точек на ободе барабана, в частности, скорости точки B:

$$u = u_B = w_2 r = 0{,}6t\big|_{t-1c} = 0{,}6\text{м/с}$$

Ускорение точки B равно векторной сумме касательного (вращательного) и нормального (центростремительного) ускорений:

$$\bar{a}_\text{В} = \bar{a}_\text{В}^t + \bar{a}_B^n$$

Направление вращательного ускорения определяется направлением углового ускорения e_2, а его модуль равен

$$a_\text{В}^\tau = \varepsilon_2\, r = 0{,}6\ \text{м/с}^2$$

Центростремительное ускорение направлено к оси вращения вала 2 и равно по модулю $a_\text{В}^\text{n} = w_2^2 r = 1{,}2\text{м/с}^2$

Модуль ускорения точки B

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 1{,}34\ \text{м/с}^2\,.$$

Ускорение груза можно найти, взяв производную по времени от его скорости, так как это касательное ускорение: а = $\dot{u}$ = 0,6 м/с2.

Перемещение груза определяется интегрированием модуля скорости по времени:

$$s = \int_0^t v\,dt = 0{,}3t^2\big|_{t=1\,c} = 0{,}3\ \text{м}.$$

Ответ: $v = 0{,}6$ м/с; $a = 0{,}6$ м/с^2; $s = 0{,}3$ м; $a_B = 1{,}34$ м/с^2.

Задача 2.

Маховик радиусом R = 0,5 м вращается так, что его угловая скорость меняется в соответствии с уравнением

$$w = 0{,}25e^{2t}c^{-1}$$

Для момента времени t = 0,5 с после начала движения определить скорость и ускорение точки на ободе маховика. Установить, за какое время маховик сделает 100 полных оборотов.

Решение. Для момента времени t = 0,5 с получаем w = 0,680 с-1, и скорость точки на ободе маховика равна u = w R = 0,340 м/с.

Угловое ускорение маховика

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 0,5e^{2t}\big|_{t=0,5\,c} = 1,36\ c^{-2}.$$

Ускорение точки на ободе маховика равно сумме двух составляющих ускорений: $\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_n$ где $\bar{a}_t$ и $\bar{a}_n$ - касательное (вращательное) и нормальное (центростремительное) ускорения точки.

Учитывая, что вращательное ускорение равно по модулю $a_t = eR$, найдем a_t = 0,680 м/с^2; центростремительное ускорение ап $= w^2$ R = 0,231 м/с^2.

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 0,718\ \text{м/с}.$$

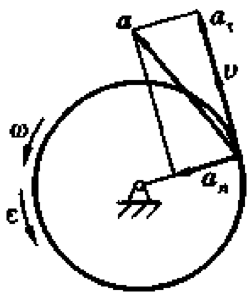


Рисунок 18.

Направления скорости и ускорений показаны на рис.18.

Поскольку значения величин угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые знаки, вращение тела ускоренное. Соответственно, совпадают по направлению угловая скорость и угловое ускорение тела, а также скорость точки и вращательное ускорение.

Поворот маховика на 100 полных оборотов соответствует углу его поворота j = 200p рад. Выражение для угла поворота найдем из уравнения $w = \dot{j}$ Имеем

$$\varphi = \int_0^t \omega\,dt = 0,125e^{2t}\big|_0^t = 0,125(e^{2t} - 1).$$

Итак, $0,125(e^{2t} - 1) = 200\pi$, откуда находим $t = 2,19$ с.

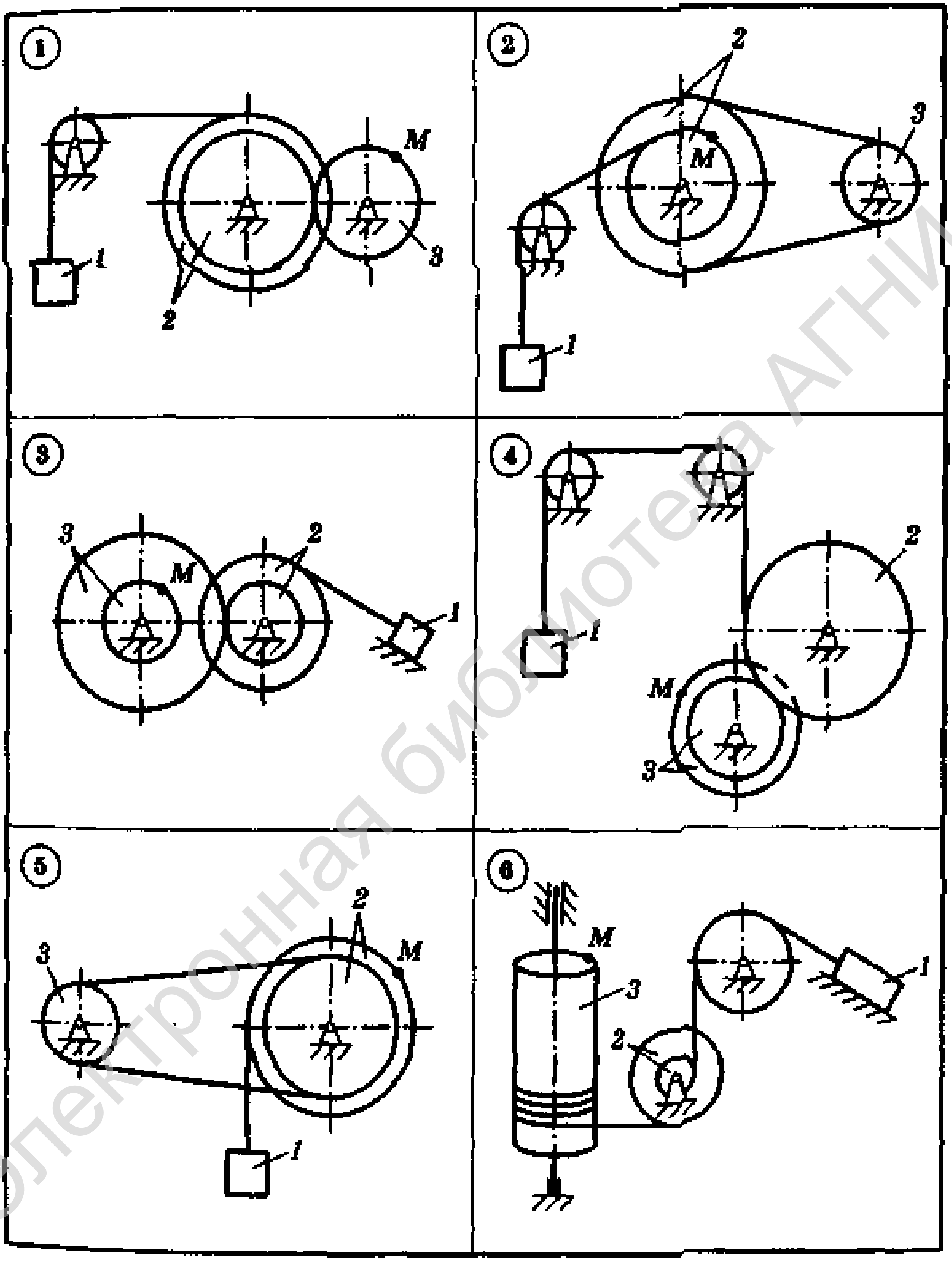
Ответ: $\upsilon = 0,340$ м/с; $a = 0,718$ м/с^2; $t = 2,19$ с.

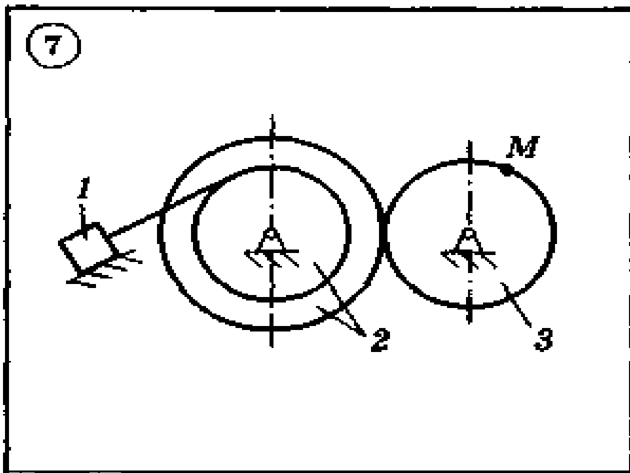
ЗАДАНИЕ К 2.

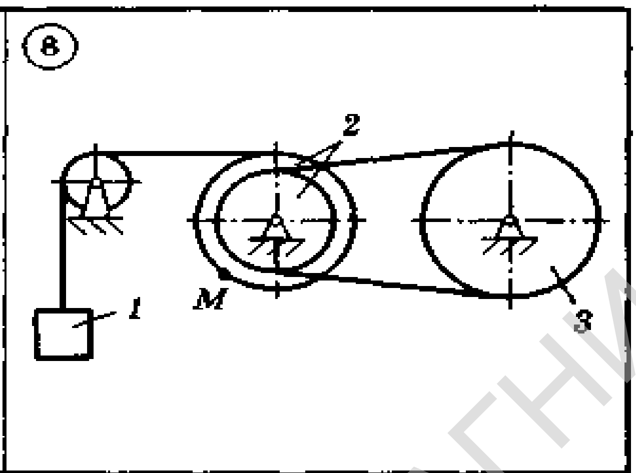
ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

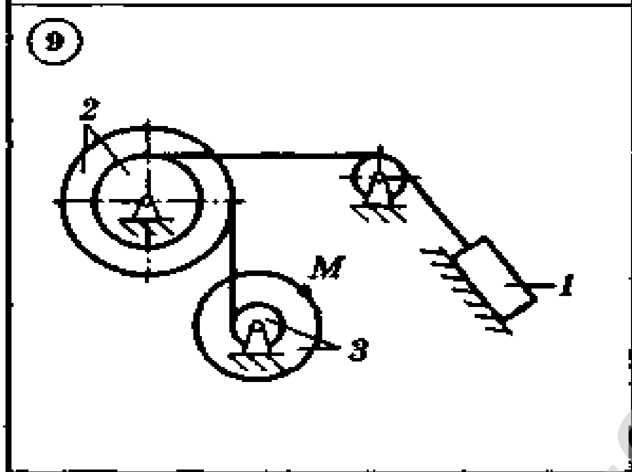
Для приведенных ниже схем механизмов 1-30 по известным характеристикам движения груза 1 — скорости u_{1x} и ускорению a1x, или по заданному уравнению движения тела 1 — x(t), или по заданному уравнению движения вала 3 — $j_3(t)$ определить и показать на рисунке скорость и ускорение точки М, а также скорость и ускорение груза 1 в данный момент времени. Исходные данные, включая радиусы шестерен, шкивов и барабанов, приведены в таблице.

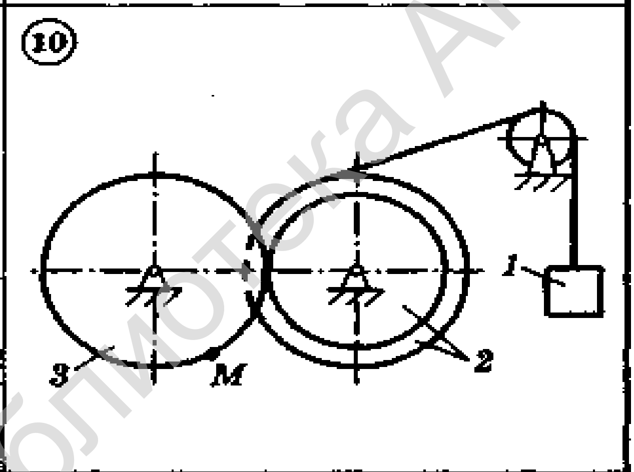
№ вар	Характеристики или уравнения движения	Радиусы, см				Время, с
		R2	r2	R2	r2	
1	$u_{1x} =$ 0,5м/с; a 1x=-0,7м/с2	60	45	36	-	-
2	$j_3 = 3t^2 + 5$рад	40	25	20	-	1
3	x=5t^2 м	20	10	30	10	0,5
4	$u_{1x} =$ 0,25 м/с; a 1x=0,6м/с2	80	-	60	45	-
5	$j_3 = 0{,}5t^3 + 2t^2$рад	20	15	10	-	2
6	x=12,8t^3 м	40	20	100	-	0,25
7	$u_{1x} =$ -0,5м/с; a 1x=1,0м/с2	100	60	75	-	-
8	$j_3 = t + 2e^{0,5t}$рад	30	20	40	-	1
9	x=42t-0,6t^3 м	40	30	30	15	5
10	$u_{1x} =$ 1,0м/с; a 1x=2,0м/с2	60	45	60	-	-
11	$j_3 = t^3 - 7t$рад	15	10	15	-	2
12	x=42t-5t^2 м	30	15	40	20	4
13	$u_{1x} =$ 0,6м/с; a 1x=-0,9м/с2	80	-	45	30	-
14	$j_3 = 4t - 0{,}5t^2$рад	15	10	15	-	3
15	x=4(1+e-0,8t)м	50	20	60	-	1
16	$u_{1x} =$ 1,5м/с; a 1x=4,5м/с2	100	60	30	-	-
17	$j_3 = 5[1 - \cos(pt/6)]$рад	20	15	15	-	1
18	x=5t-0,5t3м	32	16	32	16	2
19	$u_{1x} =$ 0,4м/с; a 1x=0,4м/с2	45	35	105	-	-
20	$j_3 = 8\sin(pt/3)$рад	15	10	20	-	1
21	x=5t-15sin($pt/6$)м	40	18	40	18	2
22	$u_{1x} =$ 0,8м/с; a 1x=12,8м/с2	35	10	10	-	-
23	$j_3 = 10t - 2t^2$рад	20	15	10	-	2
24	X=0,5[1-cos(p t)] м	40	20	40	15	1/6
25	$u_{1x} =$ 0,8 м/с; a 1x =4,8м/с2	40	30	15	-	-
26	$j_3 = t^2 - e^t$рад	15	10	20	-	0,5
27	x=22t-5t^2 м	25	20	50	25	2
28	$u_{1x} =$ 0,7м/с; a 1x =-4,9 м/с2	15	-	40	35	-
29	$j_3 = t^3 - t^2$ - 5t рад	25	15	10	-	1
30	x=4t-0,6e5tм	30	15	20	-	0,1

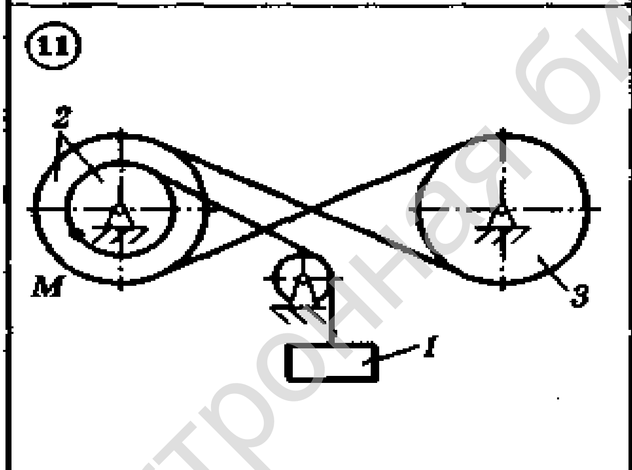

1
1
2
3
M
2
1
2
3
M
3
1
2
3
M
4
1
2
3
M
5
1
2
3
M
6
1
2
3
M

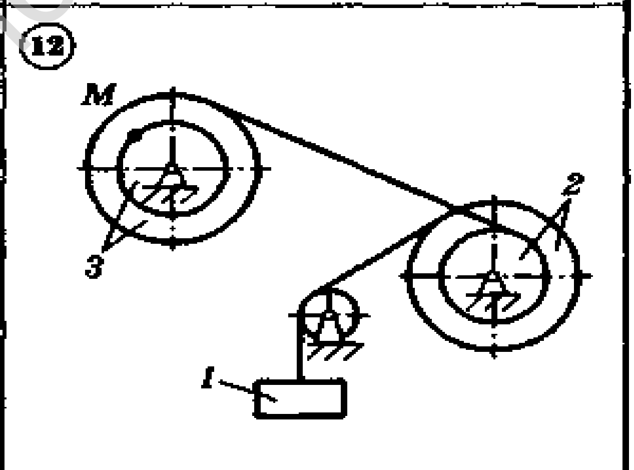

7
1
M
2
3

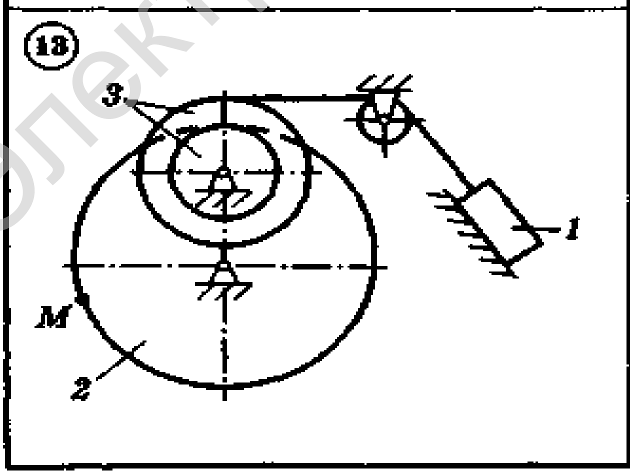

8
2
1
M
3

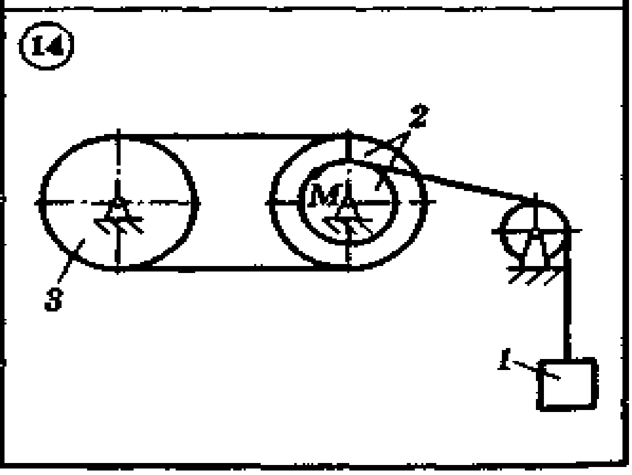

9
2
M
1
3

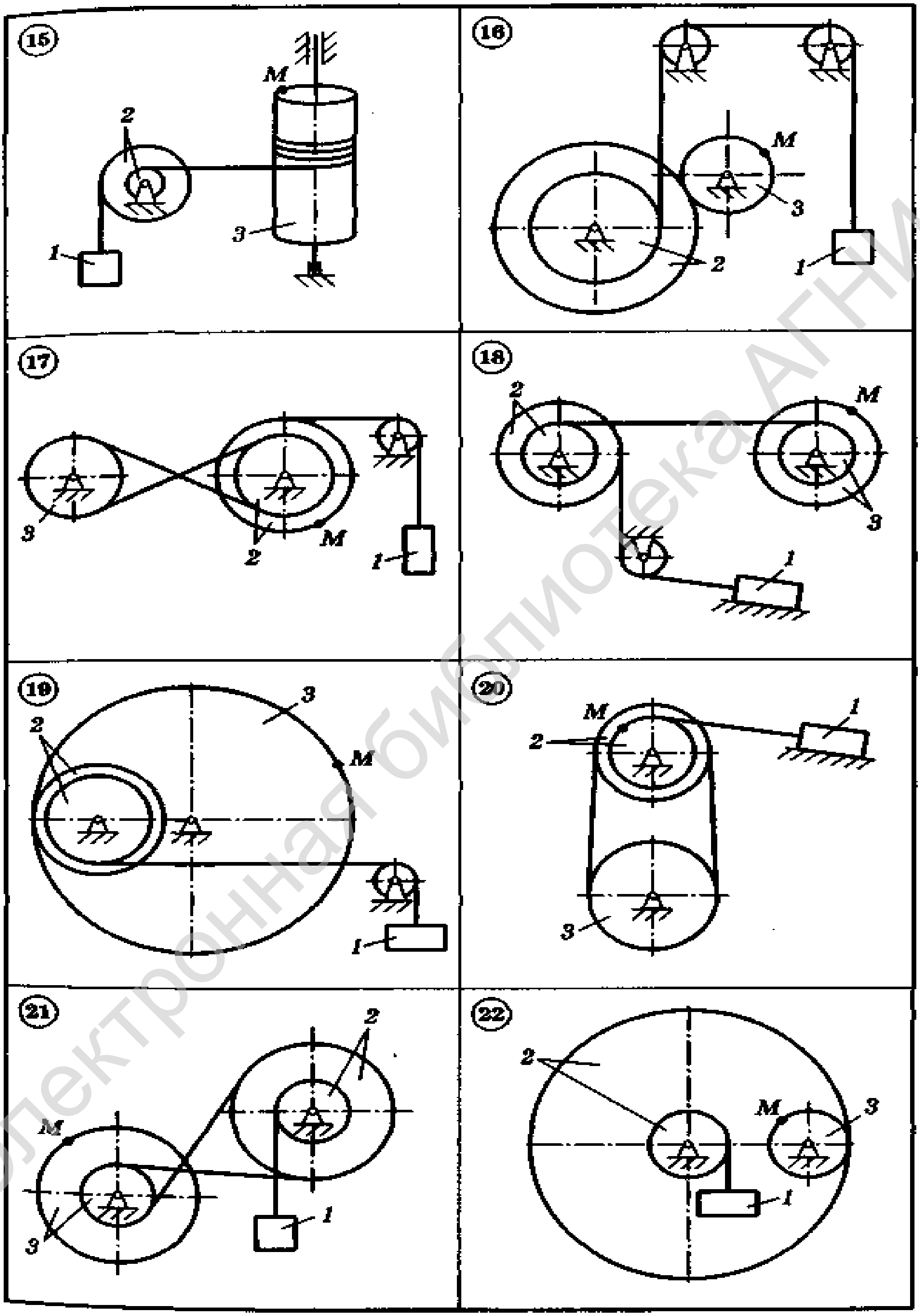

10
1
3
M
2

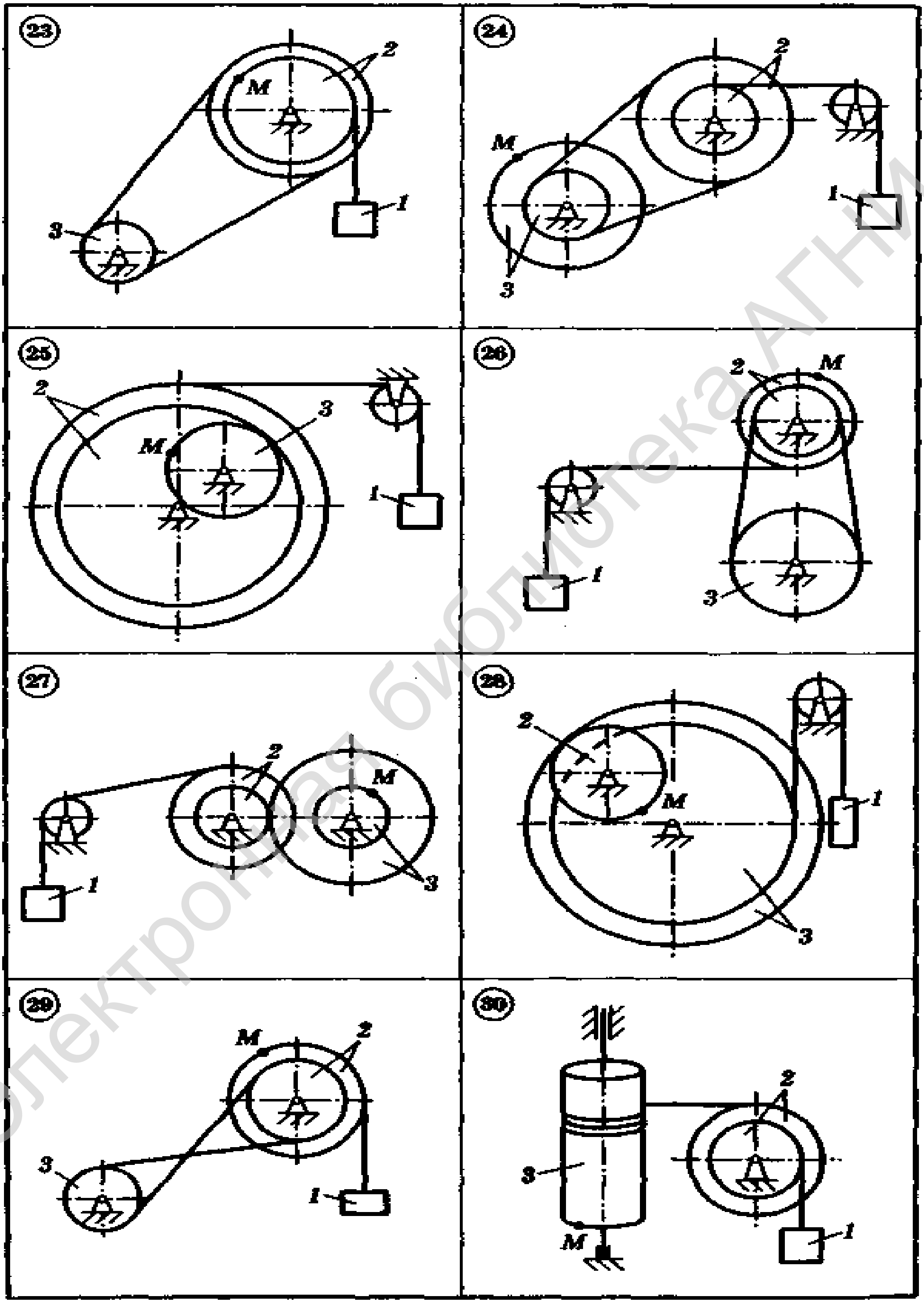

11
2
M
3
1


12
M
2
3
1


13
3
1
M
2


14
2
M
3
1


15
16
17
18
19
20
21
22


23
M
2
1
3
24
2
M
1
3
25
2
3
M
1
26
2
M
1
3
27
2
M
1
3
28
2
M
1
3
29
M
2
3
1
30
2
3
M
1

Тема: СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИХ

Задача 1.

Тело D движется поступательно вдоль оси x так, что координата некоторой его точки меняется как Xd = $t^3 + t^2$,м, рис.19.

По желобу OA, который представляет собой дугу окружности радиуса R = 20 м тела движется точка M так, что длина дуги $|OM|$ = s = 5p t м. Для момента времени t = 1 с определить абсолютную скорость $\overline{u}_a$ и абсолютное ускорение $\overline{a}_a$ точки M.

Решение.

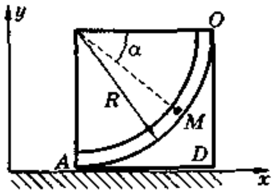


Рисунок 19.

I. Определение $\overline{u}_a$. Согласно теореме о сложении скоростей, абсолютная скорость равна векторной сумме относительной и переносной скоростей:

$$\overline{u}_a = \overline{u}_r + \overline{u}_e$$

Относительную скорость точки (скорость по отношению к телу D) находим, вычисляя ее алгебраическое значение как производную от дуговой координаты по времени: $u_{rt} = \tilde{u}_r = \dot{s} = 10pt$, и при t=1с получаем

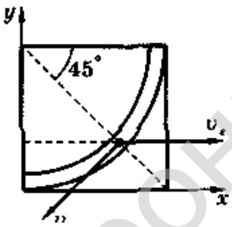


Рисунок 20.

$u_r = |\tilde{u}_r| = 10p \approx 31{,}4$ м/с

Чтобы определить направление этой скорости, следует установить, где находится точка M в данный момент времени.

Вычисляя длину дуги $|OM|$t=1с=5p м, определяем значение угла: $a = \frac{|OM|}{R} = \frac{p}{4} = 45^{\circ}$ - точка M находится в середине дуги (рис.20).

Скорость v_r точки направляем по касательной к ее траектории (окружности) в сторону увеличения длины дуги, так как алгебраическое значение скорости положительно.

Переносной скоростью по определению будет скорость той точки тела D, с которой в данный момент времени совпадает точка M.

В имеющемся случае поступательного движения тела скорости всех его точек одинаковы (это скорость тела D), и тогда, поскольку движение прямолинейное, переносную скорость можно найти как производную от координаты:

$$v_e = |\tilde{v}_e| = |v_{ex}| = |\dot{x}_D| = 3t^2 + 2t,$$

при t = 1 с получаем v_e = 5 м/с. Направлена она по оси x, так как $v_{ex} > 0$.

Складывать векторы $\overline{u}_r и \overline{u}_e$ удобнее всего с помощью проекций. Проектируя равенство $\overline{u}_a = \overline{u}_r + \overline{u}_e$ на оси получаем

$$v_{ax} = -v_r \cos 45° + v_e = -17{,}2; \quad v_{ay} = -v_r \sin 45° = -22{,}2$$

и окончательно $v_a = \sqrt{v_{ax}^2 + v_{ay}^2} \approx 28{,}1$ м/с.

2. Определение a_a. Согласно теореме Кориолиса, абсолютное ускорение равно векторной сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_{cor}.$$

В данном случае кориолисова ускорения $\overline{a}_{cor} = 2\overline{w}_e \times \overline{u}_r$ не будет, так как переносное движение поступательное и его угловая скорость w е = 0.

Относительное ускорение a_r в общем случае будет складываться из касательного и нормального:

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r^t + \overline{a}_r^n$$

Касательное относительное ускорение $\overline{a}_r^t$ вычисляем через производную от алгебраического значения скорости:

$$\tilde{a}_r^t = \dot{\tilde{u}}_r = 10\pi \approx 31{,}4 \text{м/с и } a_r^t = |\tilde{a}_r^t|$$

Ускорение $\overline{a}_r^t$ направлено туда же, куда и скорость $\overline{u}_r$ так как знаки их алгебраических значений совпадают (ускоренное движение).

Нормальное относительное ускорение $\overline{a}_r^n$ находим через скорость и радиус кривизны траектории:

$$a_r^n = \frac{v_r^2}{\rho} = \frac{v_r^2}{R} = 49{,}3 \text{ м/с}^2.$$

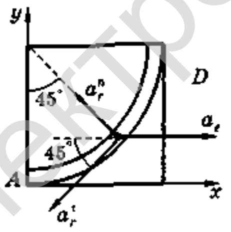


Рисунок 21.

Оно направлено к центру окружности желоба (рис.21).

Переносное ускорение (поскольку движение тела D поступательное и прямолинейное) ищем, дифференцируя найденную ранее переносную скорость

$$a_e = |\tilde{a}_e^t| = |\dot{\tilde{v}}_e| = 6t + 2,$$

и при t = 1 с имеем a_e = 8 м/с^2. Это ускорение совпадает по направлению с $\overline{u}_e$. Проектируя на оси уравнение $\overline{a}_a = \overline{a}_r^t + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e$ получим проекции вектора абсолютного ускорения:

$$a_{ax} = -a_r^{\tau}\cos 45^\circ - a_r^{n}\sin 45^\circ + a_e \approx -49{,}1,$$

$$a_{ay} = -a_r^{\tau}\sin 45^\circ + a_r^{n}\cos 45^\circ \approx 12{,}7.$$

И окончательно: $a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} \approx 50{,}2$ **м/с²**.

Ответ: $v_a \approx 28{,}1$ **м/с;** $a_a \approx 50{,}2$ **м/с²**.

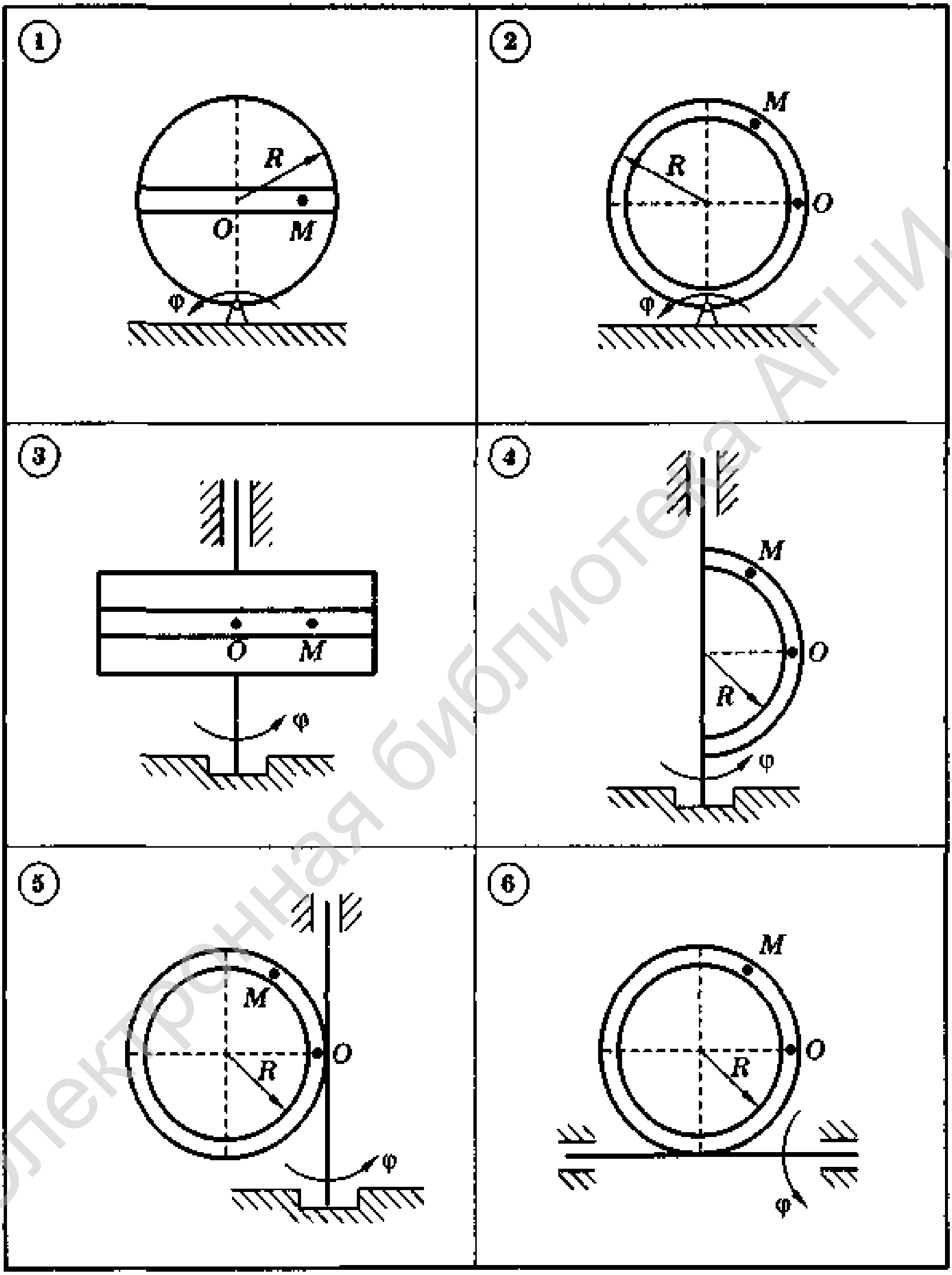
ЗАДАНИЕ К 3.

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

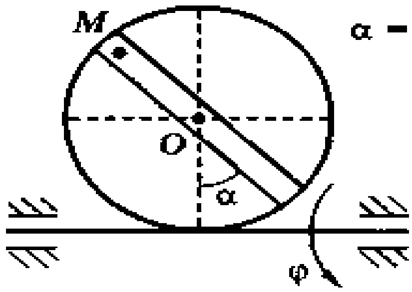
В приведенных ниже схемах 1-30 рассматривается движение точки М в желобе вращающегося тела. По заданным в таблице уравнениям относительного движения OM(t), переносного движения j (t) и геометрическим размерам определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в указанный момент времени.

№ вар.	OM(t),м	j (t), рад	R или l, м	t,e
1	$t^2 - t$	$0{,}5t^2 + t$	20	1
2	$5p(2t^2 + t)$	$2t^2$	15	1
3	$5(t^2 - t)$	$0{,}5t^2 + t$		2
4	$5p(t^2 - 3)$	$3t^2 - 8t$	20	2
5	$10p\,t^2$	$2t^2 - t$	20	1
6	$15p(t^2 - 2t)$	$6t - 4t^2$	30	2
7	$t^2 + 3t - 1$	$2t^2 - 3t$		1
8	$t^3 - 4t$	$0{,}5t^2$	6	2
9	$2t^3 - t$	$4t - t^2$		1
10	$t^3 - t$	$4t - t^2$	4	1
11	$2t^2 + 2t$	$0{,}5t^2$	4	1
12	$4t^2 + 6t$	$2t^2 - 6t$	40	2
13	$5p(2t^2 - t)$	$t^2 + t$	10	1
14	$t^2 - 2t + 1$	$0{,}5t^2 + 2t$		2
15	$5p(t^2 - 2)$	$2(t^2 - t)$	20	1
16	$15p\,t^2$	$t^2 + t$	10	1
17	$5p(2t^2 - t)$	$t^2 + t$	20	1
18	$t^3 - 2t^2 + 8$	$3t^2 - 8t$		2
19	$8t^2 - 2t$	$4t^2$	2	0,5
20	$10p\,t^2$	$4t^2 - 2t$	20	1

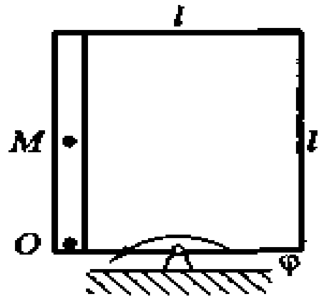
21	t4-4t	$3t^2$ -8t		2
22	$3t^2$ -t	t^2 +3t	2	1
23	10sin(p t/6)	t^2		1
24	10p (t^2 -t)	$4t^2$ -2t	10	1
25	10p t^2	$2t^2$ -t	30	1
26	5p t^2	t^2 +t	20	1
27	$20pt^2$	t^2 +t	20	1
28	-3t^2	4(t^2 -3t)		2
29	$3\sqrt{2}$ (t^2 +t-1)	t^2 -t	6	1
30	$4t^2$	2t-0,5t^2	4	1


1
R
O
M
φ
2
M
R
O
φ
3
O
M
φ
4
M
O
R
φ
5
M
O
R
φ
6
M
O
R
φ

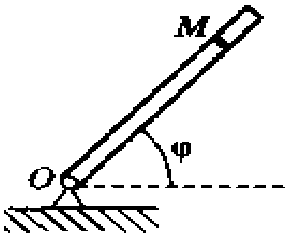
7



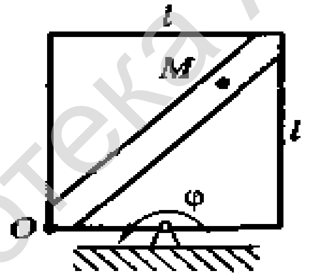
8



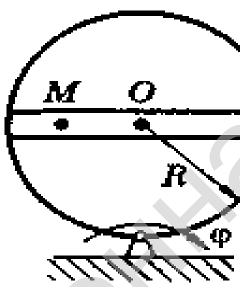
9



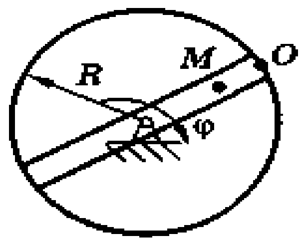
10



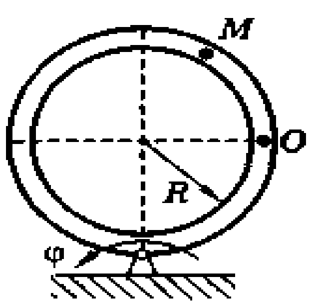
11



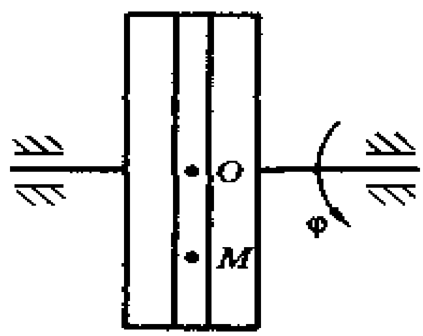
12



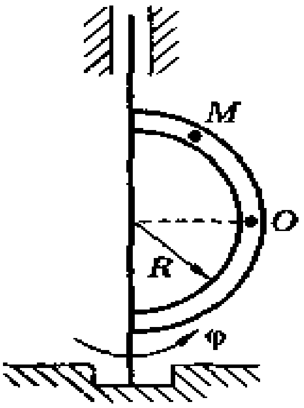
13



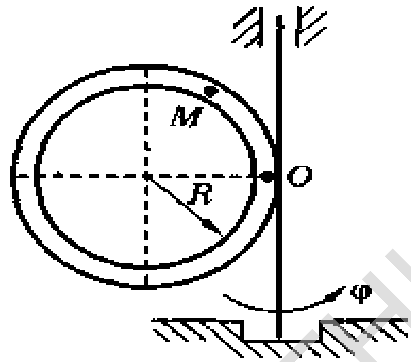
14



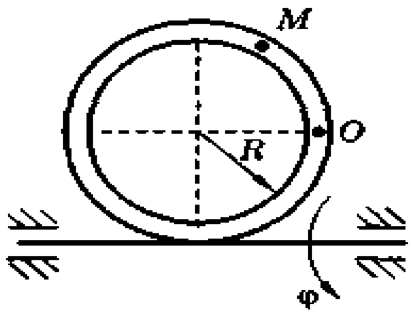
15



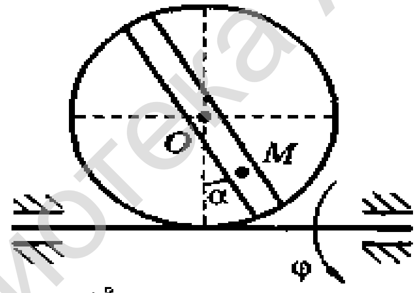
16



17

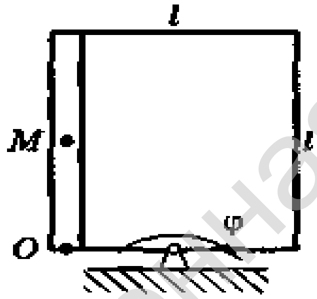


18

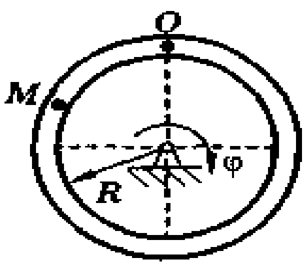


$\alpha = 30^{\circ}$

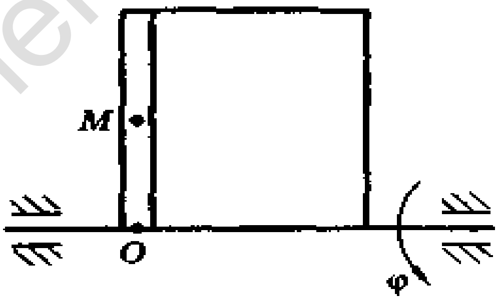
19



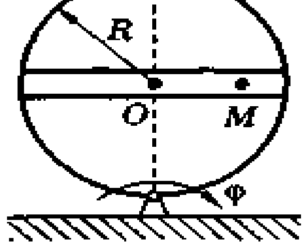
20

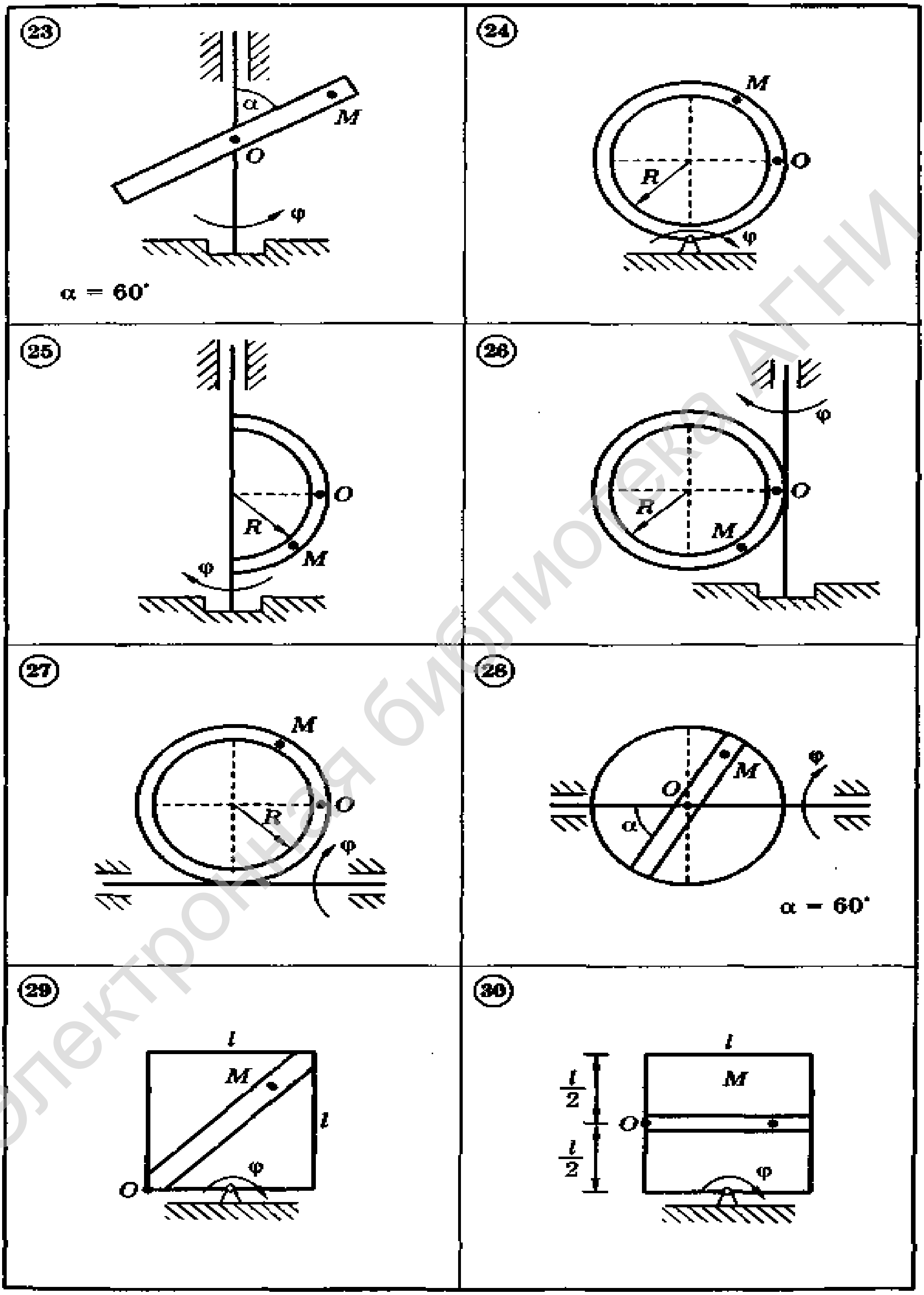


21



22




23
α
M
O
φ
α = 60°
24
M
O
R
φ
25
O
R
M
φ
26
φ
O
R
M
27
M
O
R
φ
28
φ
M
O
α
α = 60°
29
l
M
l
φ
O
30
l
l/2
M
O
l/2
φ

ДИНАМИКА

Тема: ДИНАМИКА ТОЧКИ. ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

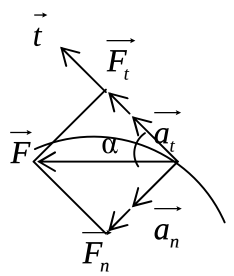
Задача 1.

Материальная точка движется по прямой или по окружности под действием постоянных или переменных сил. Определить закон движения.

Движение точки под действием постоянной силы.

Напишем уравнение движения тела в соответствии со вторым законом Ньютона в векторной форме: $m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$. Используя операцию проектирования на оси, мы можем вместо одного векторного уравнения получить три скалярных:

$m\ddot{x} = F_x$; $m\ddot{y} = F_y$; $m\ddot{z} = F_z$.



При движении по окружности используем уравнения движения в естественных осях: $\dfrac{mu^2}{R} = F_n$; $m\dot{u} = F_t$; $0 = F_z$.

Нормаль n направлена к центру окружности, τ – орт касательной к окружности.

Затем интегрируем дифференциальное уравнение. Константы интегрирования определим из начальных условий. Из полученного закона движения определяем необходимые величины.

Пример 1. Автомобиль, двигаясь по горизонтальной дороге со скоростью υ0 = 30 м/с начинает тормозить (двигатель выключен). Найти время торможения (t1) и тормозной путь (S1). Сколько времени длилось торможение (t2) и чему равен тормозной путь (S2) этого же автомобиля при той же начальной скорости при подъеме под углом α = 300. Коэффициент трения считать постоянным μ = 0,3.

Решение.

ось y: $N_1 = mg$; $F_{\text{тр}1} = mN_1 = mmg$;

ось x: $F_{\text{тр}1} = -ma_1 \Rightarrow mmg = -m\dfrac{du}{dt} \Rightarrow \int_0^{t_1} mgdt = -\int_{u_0}^{u} du \Rightarrow mgt_1 = u_0 - u$

$u = u_0 - mgt_1$ (*), так как υ = 0 то следует $t_1 = \dfrac{u_0}{mg} = \dfrac{30}{0{,}3 \cdot 10} = 10c$.

Из уравнения (*) следует

$$\frac{dS}{dt} = u_0 - mgt \Rightarrow S_1 = \int_0^{t_1} (u_0 - mgt)dt \Rightarrow S_1 = u_0 \cdot t_1 - \frac{mgt^2}{2} = 30 \cdot 10 - \frac{0{,}3 \cdot 10 \cdot 10^2}{2} = 150\text{м}$$

ось y: $N_2 = mg\cos a$; $F_{\text{тр}2} = mN_2 = mmg\cos a$;

ось x:

$$F_{тр2} + mg\sin a = -ma_2 \Rightarrow mmg\cos a + mg\sin a = -m\frac{du}{dt} \Rightarrow \int_0^{t_2}(mg\cos a + g\sin a)dt =$$

$$= -\int_{u_0}^{u} du \Rightarrow t_2\left(mg\cos a + g\sin a\right) = u_0 - u \Rightarrow u = u_0 - t_2\left(mg\cos a + g\sin a\right)\ (**)$$

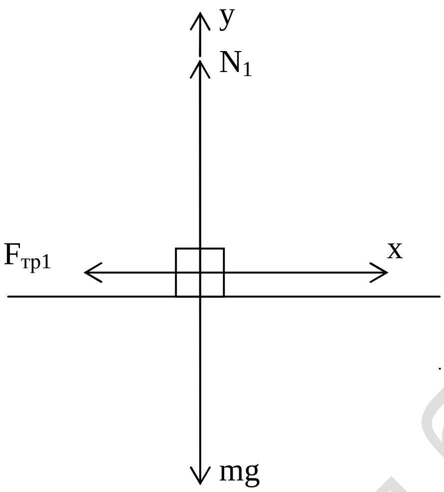
так как υ = 0 то следует $t_2 = \dfrac{u_0}{mg\cos a + g\sin a} = \dfrac{30}{0,3\cdot 10\cdot 0,866 + 10\cdot 0,5} \approx 3,95c$.

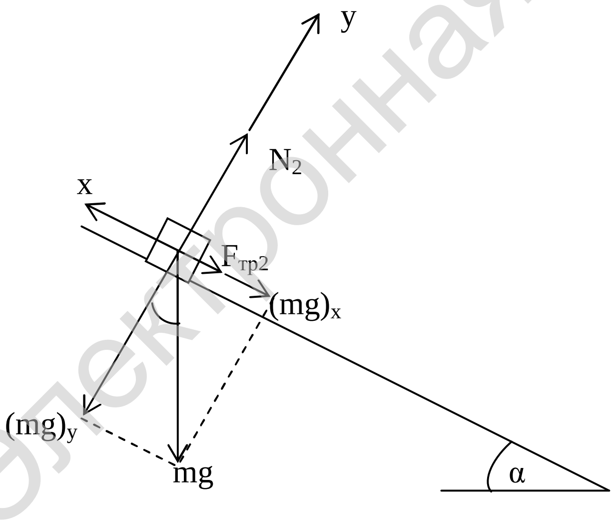
Из уравнения (**) следует

$$\frac{dS}{dt} = u_0 - t\left(mg\cos a + g\sin a\right) \Rightarrow S_2 = \int_0^{t_2}\left(u_0 - \left(mg\cos a + g\sin a\right)t\right)dt \Rightarrow$$

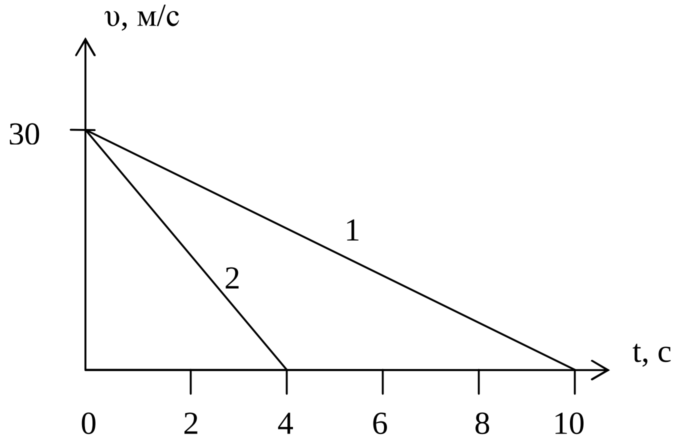
$$\Rightarrow S_2 = u_0\cdot t_2 - \frac{\left(mg\cos a + g\sin a\right)t_2^2}{2} = 30\cdot 3,95 - \frac{\left(0,3\cdot 10\cdot 0,866 + 10\cdot 0,5\right)\cdot 3,95^2}{2} \approx 59,25м.$$

1) 2)





Для обоих случаев построим график υ (t)



Пример.

Материальная точка массой m = 14кг движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиуса R, расположенной в горизонтальной плоскости. Определить путь, пройденный точкой за время t = 5с после начала движения, если на нее действует сила F = 24Н, которая образует постоянный угол 300с касательной к траектории точки. Также определить радиус кривизны траектории в этот момент времени.

Решение.

$$F_t = F\cos a = ma_t = \frac{mdu}{dt} \Rightarrow u = \int_0^t \frac{F\cos a\,dt}{m} = \frac{Ft\cos a}{m} = \frac{24\cdot 5\cdot 0{,}866}{14} = 7{,}42\,м/с.$$

$$\frac{dS}{dt} = \int_0^t \frac{Ft\cos a\,dt}{m} \Rightarrow S = \frac{F\cos a\cdot t^2}{2m} = \frac{24\cdot 0{,}866\cdot 5^2}{2\cdot 14} = 18{,}56\,м.$$

$$F_n = F\sin a = ma_n = \frac{mu^2}{R} = \frac{m(Ft\cos a/m)^2}{R} = \frac{mF^2t^2\cos^2 a}{Rm^2} \Rightarrow R = \frac{Ft^2\cos^2 a}{m\sin a} =$$

$$= \frac{24\cdot 5^2\cdot 0{,}75}{14\cdot 0{,}5} \approx 64{,}29\,м$$

Движение точки под действием переменной силы.

В общем случае аргументы у силы $\vec{F}(\vec{r},\vec{u},t)$ показывают, что сила может зависеть от положения точки, т.е. ее радиус-вектора $\vec{r}$ (например, для гравитационной силы или силы упругости), от скорости точки $\vec{u}$ (например, для силы сопротивления при движении в некоторой среде) и непосредственно от времени t (например, в системах, управляемых человеком или автоматикой).

В зависимости от вида сил, действующих на точку, различают следующие случаи.

Движение точки под действием силы зависящей от времени.

$m\dfrac{du}{dt} = F(t)$. Решение задачи сводится к интегрированию функции F(t):

$$m\int_{u_0}^{u} du = \int_0^t F(t)dt \quad \text{или} \quad mu - mu_0 = \int_0^t F(t)dt.$$

Пример. Материальная точка массой m = 25кг начала движение из состояния покоя по горизонтальной прямой по действием силы F = 20 t, которая направлена по той же прямой. Определить скорость в момент времени t = 4с, а также определить путь, пройденный за 4с.

Решение.

$$ma = F \Rightarrow \frac{mdu}{dt} = 20t \Rightarrow u = \int_0^4 \frac{20tdt}{m} = \left.\frac{10t^2}{m}\right|_0^4 = \frac{10\cdot 4^2}{25} = 6{,}4\,м/с.$$

$$u = \frac{10t^2}{m} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{10t^2}{m} \Rightarrow S = \int_0^4 \frac{10t^2dt}{m} = \left.\frac{10t^3}{3m}\right|_0^4 = \frac{10\cdot 4^3}{3\cdot 25} \approx 8{,}53\,м.$$

Движение точки под действием силы зависящей от скорости.

$m\frac{du}{dt} = F(u)$. Если в начальных условиях или в вопросе присутствуют время и скорость, то следует использовать замену $a = \frac{du}{dt}$. При разделении переменных имеем: $m\int_{u_0}^{u} \frac{du}{F(u)} = \int_0^t dt$ или $m\int_{u_0}^{u} \frac{du}{F(u)} = t$. Если в начальных условиях или в вопросе присутствуют координата и скорость, то вводим замену переменной $a = \frac{udu}{dx}$ и получим уравнение $\frac{mudu}{dx} = F(u)$. После разделения переменных имеем

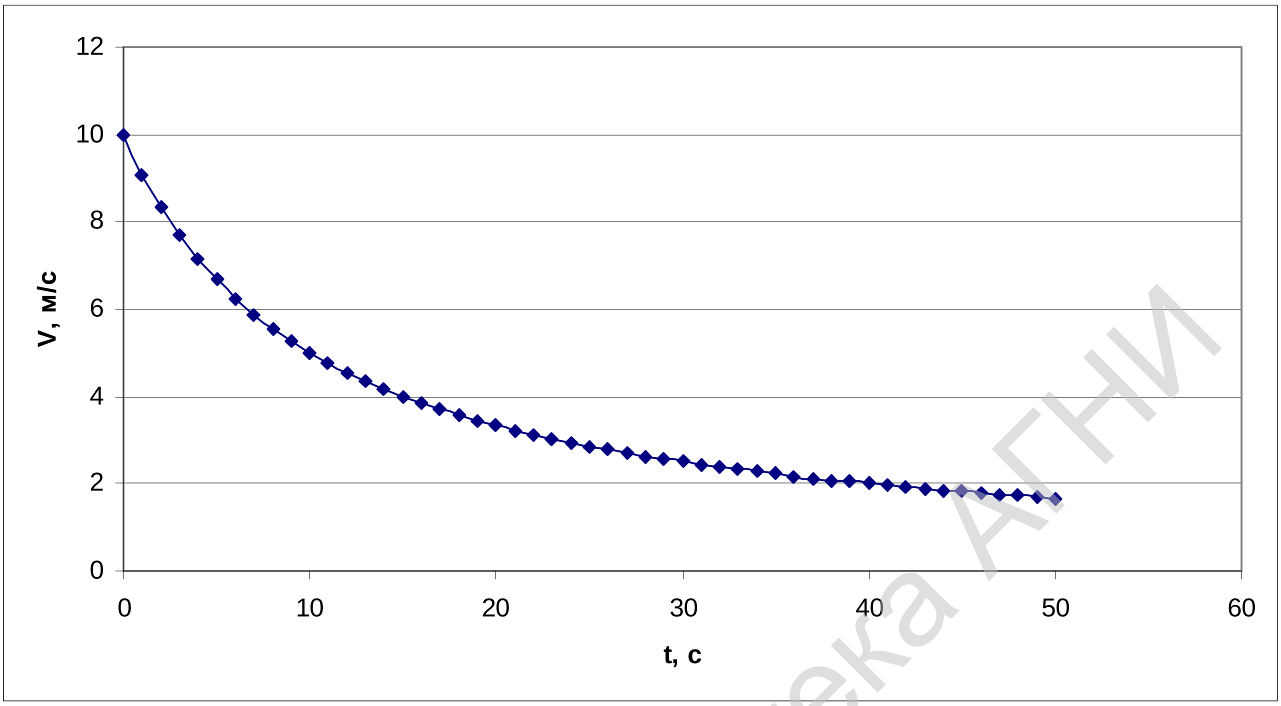
$$\frac{mudu}{F(u)} = dx \Rightarrow m\int_{u_0}^{u} \frac{udu}{F(u)} = \int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow x - x_0 = m\int_{u_0}^{u} \frac{udu}{F(u)}.$$

Пример. На материальную точку массой m = 20 кг, которая движется по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления R = 0,2υ2. За сколько секунд скорость точки уменьшится с 10 до 5 м/с ?

Решение.

$$ma = -F_{сопр} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{0{,}2u^2}{m} \Rightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u^2} = -\int_0^t \frac{0{,}2dt}{m} \Rightarrow \left.-\frac{1}{u}\right|_{u_0}^{u} = \left.-\frac{0{,}2t}{m}\right|_0^t \Rightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} = \frac{0{,}2t}{m}$$

(так как $u = \frac{u_0}{2}$) $\Rightarrow \frac{1}{u_0/2} - \frac{1}{u_0} = \frac{0{,}2t}{20} \Rightarrow \frac{2}{u_0} - \frac{1}{u_0} = 10^{-2}t \Rightarrow \frac{1}{u_0} = 10^{-2}t \Rightarrow t = \frac{10^2}{u_0} = \frac{10^2}{10} = 10c$.



Зависимость $u = u(t)$ при $u(0) = 10\,м/с$

Пример.

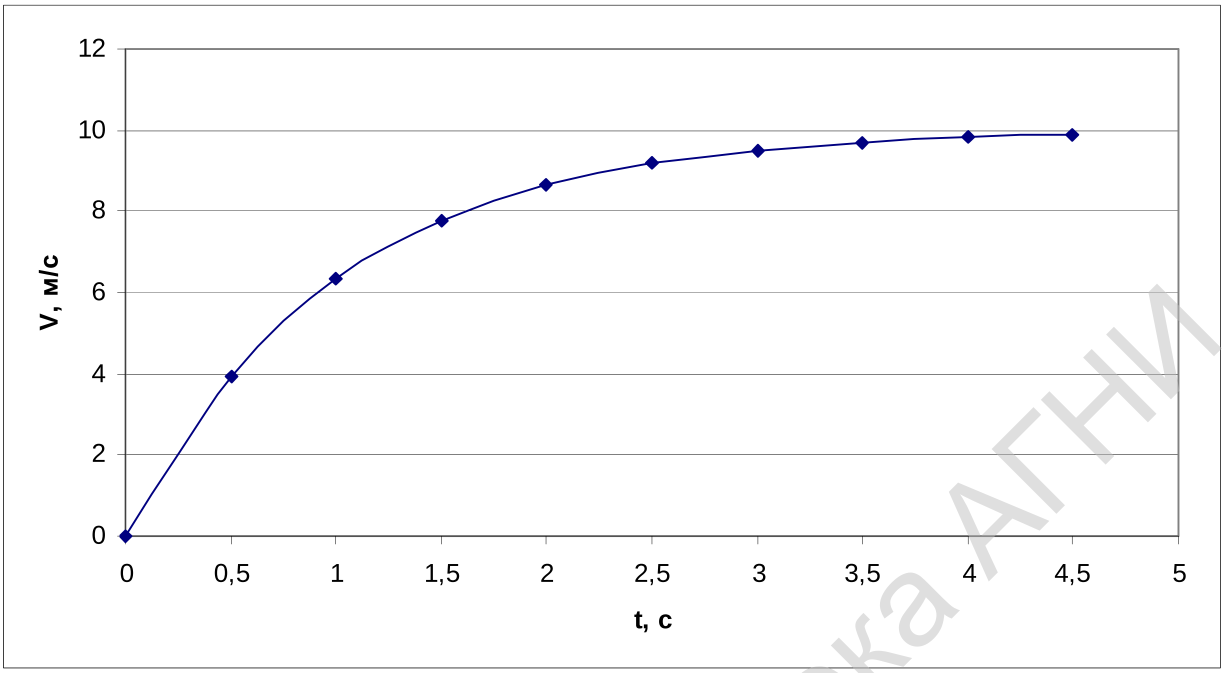
Материальная точка массой m = 2 г погружается в жидкость, сила сопротивления которой пропорциональна скорости погружения с коэффициентом пропорциональности k = 0,002 кг/с. Найти скорость точки через 1 с после начала погружения, если в начальный момент она была равна нулю.

$$ma = mg - ku \Rightarrow \frac{du}{dt} = g - \frac{ku}{m} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k} - u\right) \Rightarrow \frac{du}{\frac{mg}{k} - u} = \frac{kdt}{m} \Rightarrow$$

Решение.

$$\Rightarrow \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\frac{mg}{k}-u} = \int_0^t \frac{kdt}{m} \Rightarrow -\ln\left|\frac{mg}{k}-u\right|\Bigg|_{u_0}^{u} = \frac{kt}{m} \Rightarrow \ln\left|\frac{mg}{k}-u\right| - \ln\left|\frac{mg}{k}-u_0\right| = -\frac{kt}{m} \Rightarrow \frac{\frac{mg}{k}-u}{\frac{mg}{k}-u_0} = e^{-\frac{kt}{m}}$$

(так как υ0 = 0) $\Rightarrow u = \frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right) \Rightarrow u(1) = 6{,}3\,м/с$. $u_{мак} = \lim_{t\to\infty} u = \frac{mg}{k} = 10\,м/с$.



Зависимость $u = u(t)$ при $u(0) = 0$

Пример.

Материальная точка массой m = 1г движется прямолинейно. На нее действует сила в направлении движения, пропорциональная времени с коэффициентом пропорциональности k = 6·10-5 кг м/с^3, и сила сопротивления среды, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности k1=3·10-3 кг/с. Найти зависимость скорости движения точки от времени, если начальная скорость точки была равна нулю.

Решение первой задачи основано на втором законе Ньютона:

$$ma = F(t) - F_{ñîîð} \Rightarrow m\frac{du}{dt} = kt - k_1u \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{k_1u}{m} = \frac{kt}{m}$$

Линейные неоднородные уравнения решаются методом вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа) или методом Бернулли.

Данное уравнение решим методом Лагранжа. Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{du}{dt} + \frac{k_1u}{m} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{k_1u}{m} \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{k_1dt}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -\frac{k_1t}{m} + \ln|C| \Rightarrow \ln|u| - \ln|C| = -\frac{k_1t}{m} \Rightarrow \ln\left|\frac{u}{C}\right| = -\frac{k_1t}{m} \Rightarrow \frac{u}{C} = e^{-\frac{k_1t}{m}} \Rightarrow u = Ce^{-\frac{k_1t}{m}}.$$

Общее решение неоднородного заданного уравнения ищем в виде $u = C(t)e^{-\frac{k_1t}{m}}$.

Находим $u' = C'(t)e^{-\frac{k_1t}{m}} - C(t)\frac{k_1}{m}e^{-\frac{k_1t}{m}}$.

Подставим u и u' в исходное уравнение, получим

$$C'(t)e^{-\frac{k_1t}{m}} - C(t)\frac{k_1}{m}e^{-\frac{k_1t}{m}} + \frac{k_1}{m}C(t)e^{-\frac{k_1t}{m}} = \frac{kt}{m} \Rightarrow C'(t) = \frac{kt}{m}e^{\frac{k_1t}{m}} \Rightarrow C(t) = \frac{k}{m}\int te^{\frac{k_1t}{m}}dt = \begin{vmatrix} t=u^* \Rightarrow dt=du^* \\ dv^* = e^{\frac{k_1t}{m}}dt \Rightarrow v^* = \frac{m}{k_1}e^{\frac{k_1t}{m}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{k}{m}\left(\frac{mt}{k_1}e^{\frac{k_1t}{m}} - \int\frac{m}{k_1}e^{\frac{k_1t}{m}}dt\right) = \frac{kt}{k_1}e^{\frac{k_1t}{m}} - \frac{mk}{k_1^2}e^{\frac{k_1t}{m}} + C_1.$$

Находим $u = \left(\frac{kt}{k_1}e^{\frac{k_1t}{m}} - \frac{mk}{k_1^2}e^{\frac{k_1t}{m}} + C_1\right)e^{-\frac{k_1t}{m}} = \frac{kt}{k_1} - \frac{mk}{k_1^2} + C_1e^{-\frac{k_1t}{m}}$.

Используя начальное условие, находим С1: $u(0) = 0 = -\frac{mk}{k_1^2} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{mk}{k_1^2}$.

$$u = \frac{kt}{k_1} - \frac{mk}{k_1^2} + \frac{mk}{k^2}e^{-\frac{k_1t}{m}} = \frac{kt}{k_1} + \frac{mk}{k_1^2}\left(e^{-\frac{k_1t}{m}} - 1\right).$$

Приведем количественную оценку: при $t \to 10c$ выражение $e^{-\frac{k_1t}{m}} \to 0 \Rightarrow u = \frac{kt}{k_1} - \frac{km}{k_1^2} \approx \frac{kt}{k_1}$. Таким образом, $u = u(t)$ практически определяется первым слагаемым, т.е. наблюдается линейная зависимость $(\bullet)$. Для сравнения на графике приведена парабола (■), полученная без учета сопротивления среды, т.е. $\frac{mdu}{dt} = kt \Rightarrow du = \frac{ktdt}{m} \Rightarrow u = \frac{kt^2}{2m}$

Приведем график $u = u(t)$.

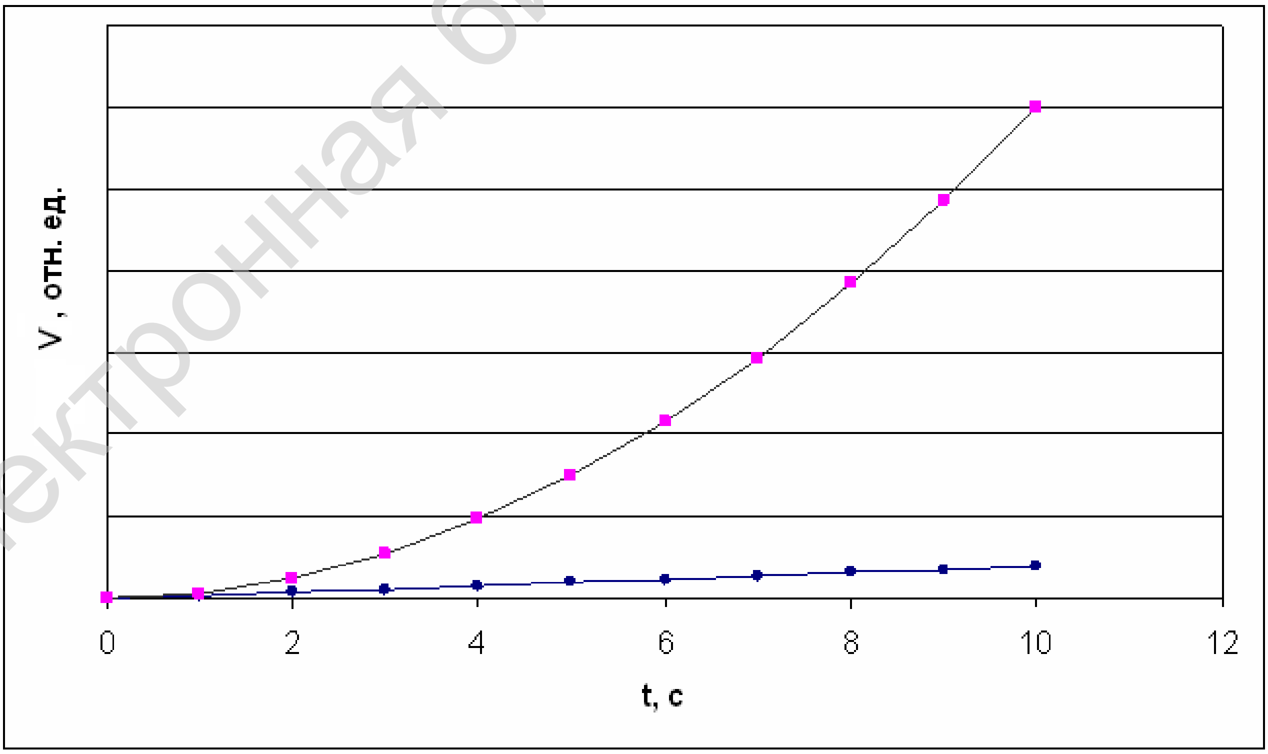


Рис. 22. Зависимость $u = u(t)$ при $u(0) = 0$

$(\bullet)$ - с учетом сопротивления среды, (■) – без учета сопротивления среды

Изменим начальное условие задачи, пусть $u(0)=1$. Определим заново постоянную интегрирования С:

$$u(0)=1=-\frac{km}{k_1^2}+C\Rightarrow C=1+\frac{km}{k_1^2}$$

. Поэтому общее решение имеет вид:

$$u=\frac{kt}{k_1}-\frac{km}{k_1^2}+e^{-\frac{k_1 t}{m}}+\frac{km}{k_1^2}e^{-\frac{k_1 t}{m}}$$

.Определим экстремум скорости:

$$u_t'=0\Rightarrow u'=\frac{k}{k_1}-\frac{k_1}{m}e^{-\frac{k_1 t}{m}}-\frac{kk_1 m}{k_1^2 m}e^{-\frac{k_1 t}{m}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{k}{k_1}e^{\frac{k_1 t}{m}}=\frac{k_1}{m}+\frac{k}{k_1}\Rightarrow e^{\frac{k_1 t}{m}}=\frac{k_1}{k}\left(\frac{k_1}{m}+\frac{k}{k_1}\right)\Rightarrow e^{\frac{k_1 t}{m}}=\frac{k_1^2}{km}+1\Rightarrow \ln e^{\frac{k_1 t}{m}}=\ln\left|\frac{k_1^2}{km}+1\right|\Rightarrow\frac{k_1 t}{m}=\ln\left|\frac{k_1^2}{km}+1\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{m}{k_1}\ln\left|\frac{k_1^2}{km}+1\right|\Rightarrow t=\frac{10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}}\ln\left(\frac{9\cdot 10^{-6}}{6\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-3}}+1\right)=\frac{1}{3}\ln 151\approx 1{,}672427$$

. При t = 1,67 с скорость имеет минимум. Слагаемое $e^{-\frac{k_1 t}{m}}$, отражающее сопротивление среды, играет заметную роль только в начальной стадии процесса, поэтому при $t\to 1{,}67c$ скорость резко падает. С течением времени роль экспоненциального слагаемого все больше уменьшается и при $t \gg 2c$ $u=u(t)$ практически определяется первым слагаемым, т.е. наблюдается линейная зависимость

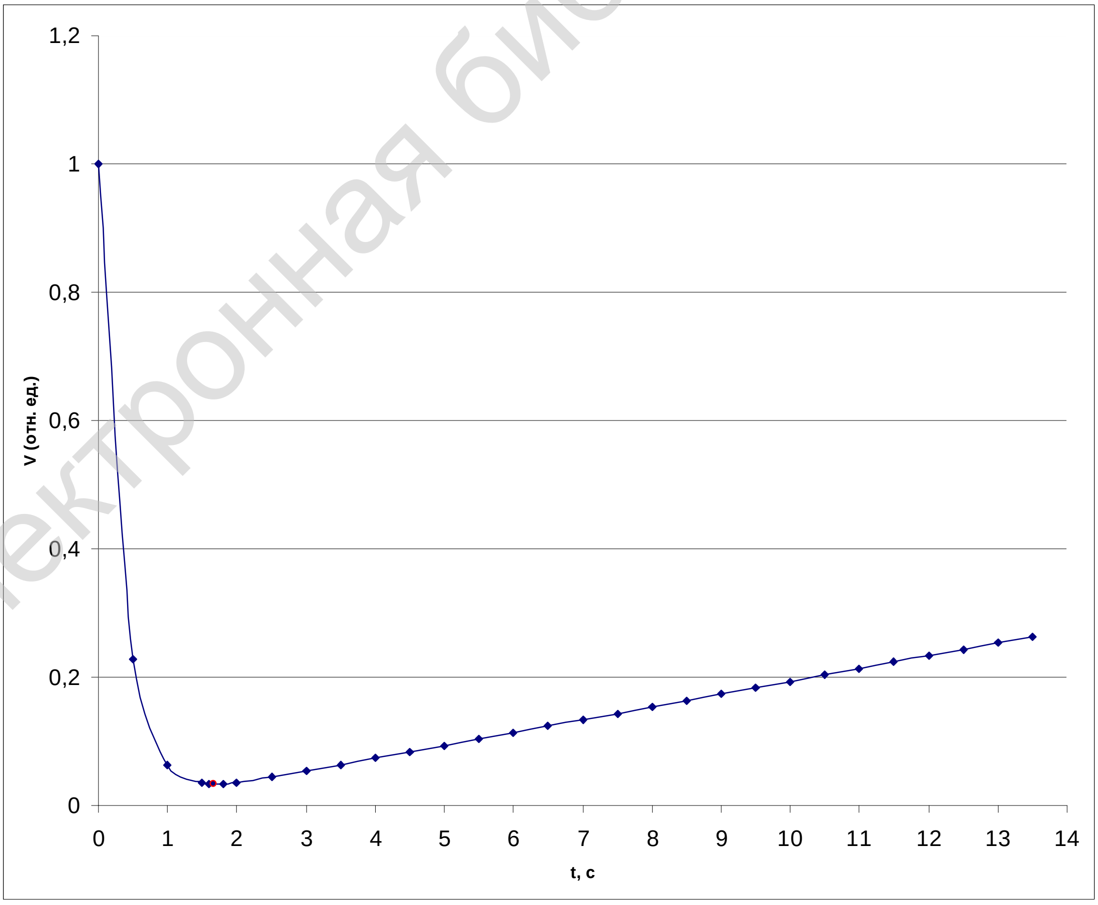


Рис. 23. Зависимость $u=u(t)$ при $u(0)=1$

Движение точки под действием силы, зависящей от координаты.

$m\frac{du}{dt} = F(x)$. Здесь в уравнении фигурирует три переменных: t, υ, x, поэтому непосредственно их разделить невозможно. Необходимо сделать следующую замену: $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot u$ (*), после чего уравнение примет вид $mu\frac{du}{dx} = F(x)$.

Если разделить переменные и воспользоваться определенными интегралами, то $m\int\limits_{u_0}^{u} u\,du = \int\limits_{x_0}^{x} F(x)dx$ или $m\frac{u^2}{2} - m\frac{u_0^2}{2} = \int\limits_{x_0}^{x} F(x)dx$.

Пример. Груз массой m прикреплен к правому концу пружины, левый конец которой закреплен в стене. В начальный момент времени груз оттянули вдоль гладкой поверхности на величину x0 = A и отпустили. Найти уравнение движение груза, если сила упругости пружины равна Fупр = -kx, где k – коэффициент упругости пружины.

Решение. Запишем начальные условия задачи: при t = 0, x = x_0 = A, $u_0 = \dot{x} = 0$.

Составим дифференциальный закон движения $ma = F_{упр} \Rightarrow m\frac{du}{dt} = -kx$.

Подстановка (*) позволит исключить из дифференциального уравнения время: $mu\cdot\frac{du}{dx} = -kx$.

Разделим переменные: умножим обе части этого уравнения на dx: $mu\cdot du = -kxdx$.

Вычисляя интегралы от обеих частей уравнения с учетом начальных условий, получим $m\int\limits_{0}^{u} u\,du = -k\int\limits_{x_0}^{x} x\,dx$.

Вычислим интегралы $\frac{mu^2}{2} = -\frac{k}{2}\left(x^2 - x_0^2\right) = \frac{k}{2}\left(x_0^2 - x^2\right)$.

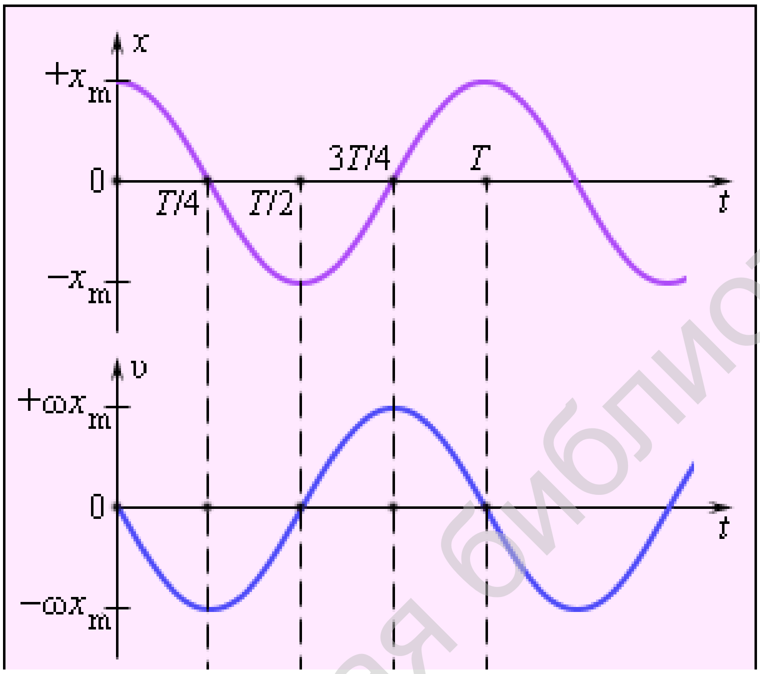
Находим $u = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 - x^2\right)}$.

Для определения уравнения движения тела используем подстановку $u(x) = \frac{dx}{dt}$, получим $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 - x^2\right)} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sqrt{x_0^2 - x^2}$.

Разделим переменные: умножим на dt и поделим на $\sqrt{x_0^2 - x^2}$ правую часть и левую части и затем проинтегрируем полученное уравнение с учетом начальных условий: $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \int\limits_{0}^{t}\sqrt{\frac{k}{m}}dt \Rightarrow \arcsin\frac{x}{x_0}\Big|_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t$ или

$$\arcsin\frac{x}{x_0}-\arcsin 1=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\Rightarrow \arcsin\frac{x}{x_0}-\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\Rightarrow \arcsin\frac{x}{x_0}=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+\frac{p}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{x}{x_0}=\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t+\frac{p}{2}\right)\Rightarrow x=x_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)$. Так как x_0 =xm = A, где A – амплитуда колебаний, а $\sqrt{\frac{k}{m}}=w_0$, где ω_0 – собственная циклическая частота гармонических колебаний $x=A\cos wt$. Скорость также изменяется по гармоническому закону $u=x'=-Aw\sin wt$, причем амплитуда скорости равна Aω. Скорость опережает смещение по фазе на π/2.



Графики координаты x (t), скорости υ (t) тела, совершающего гармонические колебания

Тема: ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела имеет вид:

$$J_z \frac{dw}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e), \textit{где } J_z - \textit{момент инерции тела относительно оси вращения } z.$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e) - \textit{суммарный момент внешних сил относительно оси } z.$$

Полезно учесть, что угловая скорость равна $w = \frac{dw}{dt} = e = j'', \textit{где } e - \textit{угловое ускорение}, j - \textit{угол поворота тела}$

Задача 1.

Тело, вращающееся с угловой скоростью ω0=3 рад/с, тормозится силами сопротивления, момент которых $M = kw$, где $k = 25H * c.$ Момент инерции тела относительно оси вращения равен J=50кг·м2. Определить закон убывания скорости и ее значение в момент времени t=2с.

Решение:

$$Je = -M \Rightarrow Je = -kw \Rightarrow \frac{Jdw}{dt} = -kw \Rightarrow \int_{w_0}^{w} \frac{Jdw}{w} = -\int_0^t kdt \Rightarrow J \ln w \Big|_{w_0}^{w} = -kt \Rightarrow J(\ln w - \ln w_0) =$$

$$= -kt \Rightarrow J \ln \frac{w}{w_0} = -kt \Rightarrow w = w_0 e^{-\frac{kt}{J}};$$

$$w(2) = 3e^{\frac{-25*2}{50}} = \frac{3}{e} = \frac{3}{2{,}71} \approx 1{,}1 рад/с$$

Задача 2.

Тело вращается вокруг вертикальной оси O_z под действием пары сил с моментом M=16t. Момент инерции тела относительно оси O_z равен 36 кг·м^2.Определить закон возрастания угловой скорости, если начальная угловая скорость равна ω_0=0. Определить угловую скорость тела в момент времени t=3с.

Решение:

$$Je = M \Rightarrow J\frac{dw}{dt} = 16t \Rightarrow Jdw = 16tdt \Rightarrow J\int_{w_0}^{w} dw = 16\int_0^t tdt = J\left(w - w_0\right) = \frac{16t^2}{2} \Rightarrow Jw = 8t^2 \Rightarrow w = \frac{8t^2}{J};$$

$$w(3) = \frac{8 * 3^2}{36} = 2\,рад/с.$$

Задача 3.

Вал, вращавшийся с угловой скоростью ω_0=2,5 рад/с, начинает испытывать воздействие сил, момент которых $M = 50Sinpt$. Момент инерции вала относительно оси вращения равен $J = 10кг * м^2$. Определить закон изменения угловой скорости и ее значение в момент времени $t = 10{,}5с.$

Решение:

$$Je = M \Rightarrow J\frac{dw}{dt} = 50Sinpt \Rightarrow J\int_{w_0}^{w} dw = \frac{50}{p}\int_0^t Sinptd(pt) \Rightarrow J\left(w - w_0\right) = -\frac{50}{p}Cospt\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w - w_0 = -\frac{50}{pJ}\left(Cospt - Cos0^0\right) = \frac{50}{pJ}(1 - Cospt) \Rightarrow w = w_0 + \frac{50}{pJ}(1 - Cospt)$$

$$w(10{,}5) = 2{,}5 + \frac{50}{3{,}14 * 10}(1 - 0) = 4{,}1\left(\frac{1}{c}\right)$$

Задача 4

К вертикальному валу прикреплен однородный стержень длиной $l = 1м$ и массой m=3кг. Стержень вращается вокруг вертикальной оси O_z с угловой скоростью ω_0=24 рад/с. К валу прикладывается постоянный момент сил торможения. Определить модуль этого момента, если стержень останавливается через 4 с после начала торможения.

Решение:

$$Je = -M_{тр}, т.к. J = \frac{1}{3}ml^2, e = w' = \frac{dw}{dt} \Rightarrow J\frac{dw}{dt} = -M_{тр} \Rightarrow dw = -\frac{M_{тр}dt}{J} \Rightarrow$$

$$\int_{w_0}^{0} dw = -\frac{M_{тр}}{J}\int_0^t dt \Rightarrow w_0 = \frac{M_{тр}t}{J} \Rightarrow M_{тр} = \frac{Jw_0}{t} = \frac{ml^2 w_0}{3t} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 24}{3 \cdot 4} = 6(Н * м).$$

Задача 5

Вращавшийся с угловой скоростью ω_0= 2,5 рад/с ротор электродвигателя начинает тормозиться силами аэродинамического сопротивления, момент которых M1=15ω, и силами трения в подшипниках, момент которых M2=30Нм. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен J=100кг·м^2. Определить закон изменения угловой скорости и время, в течение которого ротор остановится.

Решение:

$$Je = -(M_1 + M_2) \Rightarrow J\frac{dw}{dt} = -(15w+30) \Rightarrow Jdw = -(15w+30)dt \Rightarrow \frac{Jdw}{15w+30} = -dt \Rightarrow$$

$$J\int_{w_0}^{0}\frac{dw}{15w+30} = -\int_0^t dt \Rightarrow \frac{J}{15}\ln|15w+30|\Big|_{w_0}^{0} = -t \Rightarrow \frac{J}{15}\left[\ln 30 - \ln(15w_0+30)\right] = -t \Rightarrow$$

$$\frac{J}{15}\ln\frac{30}{15w_0+30} = -t \Rightarrow t = \frac{J}{15}\ln\frac{15w_0+30}{30} \Rightarrow t = \frac{J}{15}\ln\left(\frac{w_0}{2}+1\right) = \frac{100}{15}\ln\left(\frac{2,5}{2}+1\right) = \frac{100}{15}*0,811 \approx 5,4$$

Определим закон изменения угловой скорости:

$$\frac{J}{15}\ln\left|\frac{15w+30}{15w_0+30}\right| = -t \Rightarrow \frac{15w+30}{15w_0+30} = e^{-\frac{15t}{J}} \Rightarrow 15w+30 = (15w_0+30)e^{-\frac{15t}{J}} \Rightarrow$$

$$w = \frac{(15w_0+30)e^{-15t/J} - 30}{15} = \frac{67,5e^{-\frac{15t}{100}} - 30}{15} = 4,5e^{-0,15} - 2 \Rightarrow w(t) = 4,5e^{-0,15t} - 2$$

Задача 6

Платформа, находившаяся в покое, приводится во вращение постоянным моментом M1=1800Нм. При этом возникает момент сил сопротивления M2= kω, где k=120Н·с. Радиус инерции платформы относительно оси вращения равен R=2м, ее масса m=150кг. Определить закон возрастания угловой скорости и ее значение в момент времени t=5с.

Решение:

$$Je = M_1 - M_2 = M_1 - kw \Rightarrow \frac{Jdw}{dt} = M_1 - kw = k\left(\frac{M_1}{k} - w\right)$$

$$\frac{Jdw}{\frac{M_1}{k} - w} = kdt \Rightarrow -J\ln\left|\frac{M_1}{k} - w\right|\Big|_0^w = kt \Rightarrow \ln\left|\frac{\frac{M_1}{k} - w}{M_1/k}\right| = -\frac{kt}{J}$$

$$\frac{\frac{M_1}{k} - w}{M_1/k} = e^{-\frac{kt}{J}} \Rightarrow \frac{M_1}{k} - w = \frac{M_1}{k}e^{-\frac{kt}{J}} \Rightarrow w = \frac{M_1}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{J}}\right)$$

$$J = \frac{mR^2}{2} = \frac{150*2^2}{2} = 300кг*м^2$$

$$w(5) = \frac{1800}{120}\left(1 - e^{\frac{-120*5}{300}}\right) = 15\left(1 - e^{-2}\right) \approx 13(1/c)$$

Задача 7

К однородному цилиндру массой 20 кг и радиусом 10см, вращавшемуся с угловой скоростью ω_0=10 рад/с прикладывается вращающий момент, который зависит от угловой скорости цилиндра и времени: $M = \frac{1{,}1t}{w}$. Определить угловую скорость цилиндра через 2с после приложения момента.

Решение:

$$Je = M \Rightarrow \frac{Jdw}{dt} = \frac{1{,}1t}{w} \Rightarrow Jwdw = 1{,}1tdt \Rightarrow J\int_{w_0}^{w} wdw = 1{,}1\int_0^t tdt \Rightarrow \left.\frac{Jw^2}{2}\right|_{w_0}^{w} = \left.1{,}1\frac{t^2}{2}\right|_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J\left(w^2 - w_0^2\right) = 1{,}1t^2 \Rightarrow w^2 = w_0^2 + \frac{1{,}1t^2}{J} \Rightarrow w = \sqrt{w_0^2 + \frac{1{,}1t^2}{mR^2/2}} = \sqrt{100 + \frac{4{,}4\cdot 2}{20\cdot 10^{-2}}} = \sqrt{144} = 12\left(\frac{1}{c}\right)$$

Задача 8

На тело, вращавшееся с угловой скоростью $w_0 = \sqrt{p^3}\,рад/с$, начинают действовать силы сопротивления, момент которых зависит от угла поворота тела: $M = 3j^2$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $J = 2\cdot 10^3\,кг*м^2$.Определить, на какой угол повернется тело и число оборотов до его полной остановки.

Решение:

$$Je = -M \Rightarrow J\frac{dw}{dt} = -M \Rightarrow J\frac{dw}{dj}*\frac{dj}{dt} = -M \Rightarrow Jw\frac{dw}{dj} = -M$$

$$Jwdw = -Mdj \Rightarrow J\int_{w_0}^{0} wdw = -\int_0^j Mdj \Rightarrow$$

$$J\left.\frac{w^2}{2}\right|_{w_0}^{0} = -\int_0^j 3j^2dj \Rightarrow -\frac{Jw_0^2}{2} = -\frac{3j^3}{3} \Rightarrow j = \sqrt[3]{\frac{Jw_0^2}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 10^3\cdot p^3}{2}} = 10p\,(рад)$$

$$j = 2pN \Rightarrow N = \frac{j}{2p} = \frac{10p}{2p} = 5об.$$

Задача 9

Тело может вращаться вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр тяжести, имея относительно этой оси момент инерции $J = 2*10^{-2}\,кг*м^2$. Тело приводится в движение спиральной пружиной. Момент сил упругости пружины равен $M = 2j$. Определить амплитуду возникших колебаний и закон движения тела, если в начальный момент в условиях отсутствия сил упругости телу сообщили начальную угловую скорость $w_0 = 5\,рад/с$.

Решение:

$$Je = -M = -2j \Rightarrow J\frac{dw}{dt} = -2j \Rightarrow J\frac{dw}{dj}*\frac{dj}{dt} = -2j \Rightarrow Jw\frac{dw}{dj} = -2j \Rightarrow Jwdw = -2jdj \Rightarrow$$

$$J\int_{w_0}^{w} wdw = -2\int_{0}^{j} jdj \Rightarrow \left.\frac{Jw^2}{2}\right|_{w_0}^{w} = \frac{-2j^2}{2} \Rightarrow \frac{J}{2}\left(w^2 - w_0^2\right) = -j^2, если$$

$$w = 0 \Rightarrow j_{max} = w_0\sqrt{\frac{J}{2}} = 5\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-2}}{2}} = 0,5(рад),\ если\ w \neq 0 \Rightarrow$$

$$w^2 - w_0^2 = \frac{-2j^2}{J} \Rightarrow w = \sqrt{w_0^2 - \frac{2j^2}{J}} = \sqrt{\frac{2}{J}\left(\frac{Jw_0^2}{2} - j^2\right)} = \sqrt{\frac{2}{J}}*\sqrt{\frac{Jw_0^2}{2} - j^2}$$

$$\frac{dj}{dt} = \sqrt{\frac{2}{J}}\sqrt{\frac{Jw_0^2}{2} - j^2} \Rightarrow \frac{dj}{\sqrt{\frac{2}{J}}\sqrt{\frac{Jw_0^2}{2} - j^2}} = dt \Rightarrow \sqrt{\frac{J}{2}}\int_0^j \frac{dj}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{J}{2}}w_0\right)^2 - j^2}} = t \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{J}{2}}arcSin\left.\frac{j}{\sqrt{\frac{J}{2}}w_0}\right|_0^j = t \Rightarrow \frac{j}{\sqrt{\frac{J}{2}}w_0} = Sin\sqrt{\frac{2}{J}}t \Rightarrow j = \sqrt{\frac{J}{2}}w_0 Sin\sqrt{\frac{2}{J}}t$$

$$j = 0,5Sin10t,\ где\ w = \sqrt{\frac{2}{J}} = 10(1/c)\ частота\ колебаний$$

Тема: ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Грузоподъемная установка (рис.24) состоит из барабана с осевым моментом инерции J = 4кг·м^2 и радиусом r = 20см, невесомого и нерастяжимого троса и груза массой m = 103кг, перемещающегося по наклонной плоскости, составляющей угол a = 30° с горизонтом, с коэффициентом трения f = 0,2. Определить величину вращающего момента М, который необходимо приложить к барабану, чтобы его угловое ускорение было равно $e = 5c^{-2}$

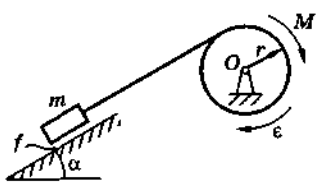


Рисунок 24.

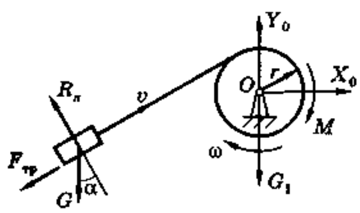


Рисунок 25.

Решение. Поскольку рассматривается мгновенное состояние системы, то следует применить теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k$$

При условии, что трос нерастяжим и отсутствует проскальзывание троса относительно барабана, система является неизменяемой (внутренние силы не работают), и тогда производная от кинетической энергии будет определяться только мощностями внешних сил:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e$$

Кинетическая энергия системы (поступательно движущийся груз и вращающийся барабан (рис.2405)):

$$T = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} J w^2$$

Кинематическая связь, наложенная на скорость груза и угловую скорость барабана, определяется условиями нерастяжимости троса и отсутствием проскальзывания троса относительно барабана: $u = wr$. Тогда

$$T = \frac{1}{2}(mr^2 + J)w^2$$

Выражение в скобках называется приведенным (к барабану) моментом инерции: Jпр = mr^2 + J = 44 кг·м^2. Итак, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{пр}} w^2,$$

а производная от нее по времени

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} J_{\text{пр}} 2w \frac{dw}{dt} = J_{\text{пр}} we$$

дает левую часть записи теоремы.

Рассмотрим действующие в системе внешние силы и их мощности. Сила тяжести барабана $\overline{G}_1$ и составляющие реакции на его оси X_0 и Y_0 будут иметь нулевую мощность (так как равна нулю скорость точки их приложения — точки О). Также равна нулю мощность нормальной реакции груза $\overline{R}_n$, поскольку она перпендикулярна скорости груза.

Ненулевую мощность будут иметь только сила тяжести груза $\overline{G}$, сила трения $\overline{F}_{\text{тр}}$ и вращающий момент М:

$N_G = \overline{G}\,\overline{u} = G u \cos(\alpha + 90°) = -G u \sin \alpha$;

$N_{F\text{тр}} = \overline{F}_{\text{тр}} \overline{u} = F_{\text{тр}} u \cos 180° = -F_{\text{тр}} u; \quad N_M = M w$

Тогда (с учетом кинематической связи) сумма мощностей запишется в виде

$$\sum N_k^e = \left[M - (G \sin a + F_{\text{тр}}) r\right] w.$$

Выражение в квадратных скобках называется приведенным (к барабану) вращающим моментом: $M_{\text{пр}} = M - (G \sin a + F_{\text{тр}})r$, и тогда правая часть записи теоремы имеет вид

$$\sum N_k^e = M_{\text{пр}} w$$

Приравнивая правую и левую части теоремы, получаем $J_{пр}w e = M_{пр}w$ отсюда после сокращения находим требуемый приведенный вращающий момент

$M_{пр} = J_{пр}e = 44 \cdot 5 = 220$ Н · м.

Теперь можно найти необходимый вращающий момент:

M=M$_{пр}$+(Gsin α+ F$_{тр}$)r. Учитывая, что $F_{тр} = fR_n = fG\cos a$, находим M=M$_{пр}$+G(fcos α+ sin α)r=1539 Н·м≈15,4 кН·м.

Ответ:M=15,4 кН·м.

Задача 2.

Рассматривается грузоподъемная установка из предыдущей задачи. К барабану приложен постоянный вращающий момент М = 3 кН·м. Определить угловую скорость барабана после того, как он повернется на угол j = 10 рад, если движение началось из состояния покоя.

Решение. В постановке данной задачи идет речь о конечном перемещении системы, поэтому следует применить теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i.$$

Кинетическая энергия системы получена в предыдущей задаче

$$T = \frac{1}{2} J_{ПР} w^2,$$

Где приведенный момент инерции J$_{пр}$=44кг · м^2. Начальная кинетическая энергия системы T_0=0, так как движение началось из состояния покоя.

Перейдем к вычислению величин работ.

Внутренние силы в данной системе не работают:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^i = 0$$

(неизменяемая система), поэтому изменение кинетической энергии будет определяться только работами внешних сил. Внешние силы и соответствующие перемещения показаны на рис. (перемещение груза $\bar{s}$ и перемещение барабана j).

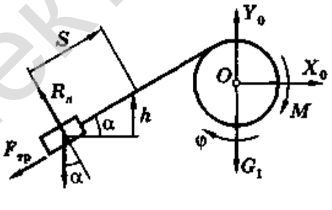


Рисунок 26.

Сила тяжести барабана $\overline{G}_1$ и составляющие реакции на его оси X_0 и Y_0 работы не совершают (так как нет перемещения у точки их приложения — точки О). Также равна нулю работа нормальной реакции груза $\overline{R}_n$, поскольку она перпендикулярна перемещению груза.

Ненулевая работа будет только у силы тяжести груза $\overline{G}$, силы трения $\overline{F}$тр и вращающего момента М. Величину этих работ вычисляем по формулам, соответствующим постоянным силам и моментам:

$$A_G = \overline{G}\overline{s} = Gs\cos(\alpha + 90^\circ) = -Gs\sin\alpha = -Gh;$$
$$A_{F_{\text{тр}}} = \overline{F}_{\text{тр}}\overline{s} = F_{\text{тр}}s\cos 180^\circ = -F_{\text{тр}}s;$$
$$A_M = M\varphi.$$

Интегрируя уравнение кинематической связи $u = wr$, получаем соотношение для перемещений s = $j\ r$ Тогда суммарная работа запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = [M - (G\sin\alpha + F_{\text{тр}})r]\varphi.$$

Выражение в квадратных скобках — приведенный вращающий момент

$$M_{\text{пр}} = M - (G\sin\alpha + F_{\text{тр}})r = 1680\ \text{Н·м},$$

и тогда правая часть записи теоремы имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^e = M_{\text{пр}}\varphi.$$

Приравнивая правую и левую части теоремы, получаем

$$\frac{1}{2}J_{\text{пр}}\omega^2 = M_{\text{пр}}\varphi,$$

откуда искомая угловая скорость

$$\omega = \sqrt{2\frac{M_{\text{пр}}}{J_{\text{пр}}}\varphi} = 27{,}6\ c^{-1}.$$

Ответ: $w = 27{,}6c^{-1}$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАНИЕ Д 1.

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Силы, заданные формулами, измеряют в Н.

1. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $a = 30^0$ с горизонтом, опускается без начальной скорости тело. Определить, в течение какого времени тело опустится на высоту $h = 10 м$ по вертикали, если коэффициент трения скольжения $f = 0,1$.

2. На тело массой m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x, действует сила, проекция которой равна $F_x = 0,25mx$. В начальный момент тело находилось в покое в точке $x_0 = 1м$. Определить скорость тела в момент, когда координата станет равной $x = 5м$.

3. Сила тяги винтов вертолета массой m при его вертикальном подъеме из состояния покоя в 1,5 раза превышает его вес. Сопротивление воздуха пропорционально скорости $\overline{R} = -0,7m\overline{u}$. Определить скорость подъема в момент $t = 5c$, а также максимальную скорость вертолета.

4. Лодке массой $m = 100$ кг сообщается начальная скорость $u_0 = 4 м/с$. При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости $R = 5u^2$. Определить, в течении какого времени скорость лодки уменьшится в два раза.

5. Телу сообщается начальная скорость $u_0 = 6,6 м/с$, и оно начинает скользить вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $a = 30^0$ с горизонтом. Коэффициент трения скольжения $f = 0,2$. Определить время движения наивысшего положения тела и пройденный телом за это время путь.

6. На тело массой m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x, действует сила, проекция которой равна $F_x = -0,36mx$. В начальный момент $x_0 = 0$ и проекция скорости $u_{x0} = 3 м/с$. Определить максимальное значение координаты x тела.

7. Груз массой $m = 10$ кг опускается вертикально на парашюте без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально скорости $\overline{R} = -20\overline{u}$. Определить скорость груза в момент времени $t = 1c$.

8. В момент выключения мотора катер массой $m = 200$ кг имел скорость u_0. Определить путь, который пройдет катер до того момента времени, когда скорость катера уменьшится в десять раз. Сила сопротивления движению пропорциональна квадрату скорости $R = 8u^2$.

9. Тело начинает скользить вниз по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $a = 30^{0}$ с горизонтом, с начальной скорости $u_0 = 2 м/с.$ Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}4.$ Определить путь, пройденный телом за время $t = 2с.$

10. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 3(1 - 0{,}5t).$ Определить скорость и координату точки в тот момент времени, когда сила станет равной нулю. Начальную координату точки считать нулевой.

11. Лодке массой $m = 50$ кг сообщается начальная скорость $u_0 = 2{,}7 м/с.$ При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорционально скорости $\overline{R} = -5\overline{u}$. Определить скорость лодки в момент времени $t = 10с.$

12. Лыжник массой $m = 70$ кг опускается без начальной скорости по склону, составляющему угол $a = 30^{0}$ с горизонтом, не отталкиваясь палками. Длина спуска $l = 100м,$ коэффициент трения скольжения лыж о снег $f = 0{,}1.$ Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости $R = 0{,}4u^2$. Определить скорость лыжника в конце спуска.

13. После полученного толчка тело начинает скользить вверх по шероховатой наклонной плоскости, составляющей угол $a = 20^{0}$ с горизонтом. Коэффициент трения скольжения тела о плоскость $f = 0{,}1.$ Определить значение начальной скорости, при котором путь, пройденный телом до остановки, будет равен $s = 8{,}5м.$

14. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 3(1 - 0{,}5t).$ Определить максимальное значение координаты x тела и путь, пройденный точкой за время $t = 6с.$ Начальную координату точки считать нулевой.

15. Тело массой $m = 4$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой зависит от времени и скорости тела, и равна $F_x = 9t/u$. Определить путь, пройденный точкой за время $t = 4с.$

16. Самолет массой $m = 10^3$ кг летит горизонтально под действием силы тяги, развиваемой двигателем, горизонтальная составляющая которой равна $F = 3{,}82$ кН. Сила лобового сопротивления зависит от скорости самолета, и равна $R = 0{,}05u^2$. Определить расстояние, пройденное самолетом, за то время, когда его скорость измениться от 100м/с до 200 м/с.

17. Поезд общей массой 400 т движется по прямолинейному горизонтальному участку пути, и имеет в начальный момент торможения скорость $u_0 = 54 км/ч.$ Определить силу торможения (считая ее постоянной), если длина тормозного пути равна $s = 100 м.$

18. Тело массой $m = 3$ кг движется по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой зависит от времени, и равна $F_x = 6p\ \cos 2t.$ В начальный момент $x_0 = 0$ и проекция скорости $u_{x0} = 2 м/с.$ Определить значение координаты x тела в момент $t = 0{,}5p\ с.$

19. В момент прекращения работы двигателей судно массой 300 т имело скорость $u_{x0} = 10 м/с.$ Определить время, прошедшее до остановки судна, если сила сопротивления воды зависит от скорости и равна $R = 2 \cdot 10^4 (2 + u).$

20. Вертикальный спуск парашютиста массой m происходит без начальной скорости с высоты $h = 200$ м при наличии силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости, $R = 3mu^2.$ Определить скорость парашютиста в момент приземления.

21. Тормозной путь автомобиля, движущегося по прямолинейному горизонтальному участку пути, составил $s = 17 м.$ Величина силы сопротивления движению составляет 0,3 от веса автомобиля. Определить начальную скорость торможения и время, прошедшее до остановки.

22. Тело массой $m = 4$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой зависит от времени, и равна $F_x = 5 \sin 0{,}5t.$ В начальный момент $x_0 = 0.$ Определить значение координаты x тела в момент времени $t = p\ с.$

23. Тело массой $m = 2$ кг, брошенное вертикально вверх со скоростью $u_0 = 40 м/с$, испытывает сопротивление воздуха пропорционально скорости $\bar{R} = -0{,}1\bar{u}.$ Определить, через какое время тело достигнет наивысшего положения.

24. Поезд движется по прямолинейному горизонтальному участку пути, и имеет в начальный момент торможения скорость $u_0 = 72 км/ч$. Величина силы сопротивления движению составляет 0,2 от веса поезда. Определить время, прошедшее до остановки, и пройденный путь.

25. Материальная точка массой $m = 5$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 10 - 3t$. Начальная координата точки $x_0 = 2 м.$ Определить момент времени, когда точка вернется в начальное положение.

26. Для измерения глубины котлована на его дно бросают без начальной скорости груз массой m, который через $t = 4 с$ достигает дна. Сопротивление

воздуха пропорционально скорости $\overline{R} = -0{,}98m\overline{u}$. Определить глубину котлована.

27. Тело, которому сообщили начальную скорость $u_0 = 5 м/с$, начинает скользить по шероховатой горизонтальной плоскости и останавливается за время $t = 2с$. Определить коэффициент трения скольжения и путь, пройденный телом.

28. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 2 - 3t^2$. Определить скорость и координату точки в момент времени $t = 2с$. Начальную координату точки считать нулевой.

29. Тело массой $m = 15$ кг поднимается по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол $a = 30^0$ с горизонтом, получив начальную скорость $u_0 = 10 м/с$. Сопротивление среды пропорционально скорости $\overline{R} = -1{,}5\overline{u}$. Определить время, прошедшее до остановки тела.

30. Тело массой $m = 10$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 20 - e^{0,5t}$. Определить скорость и координату тела в момент времени $t = 2с$. Начальную координату точки считать нулевой.

ЗАДАНИЕ Д 2.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Моменты, заданные формулами, измеряются в $Н \cdot м$.

1. Вентилятор, вращавшийся с угловой скоростью $w_0 = 3 рад/с$, тормозится силами сопротивления, момент которых $M = 25w^2$. Момент инерции вентилятора относительно оси вращения равен $J = 40 кг \cdot м^2$. Определить, в течение какого времени угловая скорость вентилятора уменьшится в два раза.

2. Вращавшийся с угловой скорости $w_0 = 2{,}5$ рад/с ротор электродвигателя начинает тормозиться силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_1 = 15w$, и силами трения в подшипниках, момент которых $M_2 = 30 Н \cdot м$. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен $J = 100 кг \cdot м^2$. Определить, в течение какого времени ротор остановится.

3. Вентилятор, вращавшийся с угловой скоростью $w_0 = 6$ рад/с, тормозится силами сопротивления, момент которых $M_1 = 30w^2$, и силами

трения с моментом $M_2 = 300 H \cdot м.$ Момент инерции его относительно оси вращения равен $J = 50 кг \cdot м^2$. Определить, за какое время вентилятор остановится.

4. К валу, находившемуся в покое, прикладывается вращающий момент $M_1 = 0{,}8 H \cdot м.$ При этом возникают силы, момент которых $M_2 = 5cos(pt).$ Момент инерции вала относительно оси вращения равен $J = 0{,}1 кг \cdot м^2$. Определить угловую скорость вала через 2,5 с после начала движения.

5. Твердое тело, вращавшееся с угловой скоростью $w_0 = 8$ рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, моменты которых M_1 и M_2. Момент M_1 от трения в подшипниках постоянен $M_1 = 150 H \cdot м$. Тормозящий момент M_2 пропорционален угловой скорости $M_2 = 25w$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $J = 140 кг \cdot м^2$. Определить, через какой промежуток времени тело остановится.

6. Маховик массой 500кг и радиус 60см приводится во вращение из состояния покоя моментом $M_1 = 470 H \cdot м$. При этом маховик испытывает силы сопротивления с моментом $M_2 = 8{,}5w^2$. Маховик считать однородным диском. Определить, по истечении какого времени угловая скорость маховика станет равной 6 рад/с.

7. Вращавшийся с некоторой угловой скоростью ротор электродвигателя начинает тормозиться силами аэродинамического сопротивления, момент которых равен $M = 12w^2$. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен $J = 150 кг \cdot м^2$. Определить угол, на который повернется ротор до того момента времени, когда его угловая скорость уменьшится в два раза.

8. Платформа, находившаяся в покое, проводится во вращение постоянным моментом $M_1 = 1800 H \cdot м.$ При этом возникает момент сил сопротивления $M_2 = 120w$. Радиус инерции платформы относительно оси вращения равен $r = 1{,}5 м$, ее масса $m = 500 кг$. Определить угловую скорость платформы через 5 с после начала движения.

9. Платформа, вращавшаяся с угловой скоростью $w_0 = 3$ рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, момент которых равен $M = 10w(w+3).$ Момент инерции платформы относительно оси вращения равен $J = 435 кг \cdot м^2$, Определить число оборотов платформы с момента начала торможения и до ее остановки.

10. Маховик начинает вращаться из состояния покоя, причем вращающий момент зависит от угла его поворота: $M = 2470j - 3j^3$. Момент инерции маховика относительно оси вращения $J = 1000 кг \cdot м^2$. Установить зависимость

угловой скорости маховика от угла поворота. Определить значение угловой скорости в тот момент времени, когда маховик сделает 5 оборотов.

11. На тормозящийся вал действует постоянный момент сил трения в подшипниках $M_1 = 80H \cdot м$ и момент сил сопротивления, вызываемый электромагнитной муфтой $M_2 = 60(1 - e^{-1,2t})$. Начальная угловая скорость вала равна $w_0 = 15$ рад/с. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $J = 50кг \cdot м^2$. Определить угловую скорость вала в момент времени $t = 3c$.

12. Вал, вращавшийся с угловой скоростью $w_0 = 9$ рад/с, начинает тормозиться силами сопротивления, моменты которых M_1 и M_2. Тормозящий момент M_1 пропорционален угловой скорости $M_1 = 15w$. Момент M_2 от трения в подшипниках постоянен и равен $M_2 = 100H \cdot м$. Вал считать однородным цилиндром массой 200кг и радиусом 60 см. Определить угловую скорость вала через 1,5 с после начала торможения.

13. Движущий момент электродвигателя обратно пропорционален квадрату угловой скорости $M = \frac{1,5}{w^2}$. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен $J = 50кг \cdot м^2$. Определить, через какое время угловая скорость ротора утроится, если начальная угловая скорость равна $w_0 = 0,5$ рад/с.

14. Маховик, находившийся в покое, приводится во вращение постоянным моментом $M_1 = 2000H \cdot м.$. При этом возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости: $M_2 = 100w.$ Момент инерции маховика относительно оси вращения равен $J = 250кг \cdot м^2$. Определить число оборотов маховика за 10 с после начала движения.

15. Барабан массой 200 кг и радиусом 80см приводится во вращение из состояния покоя постоянной силой $F_1 = 30H$, приложенной по касательной к его ободу. При этом возникает сила сопротивления, пропорциональная угловой скорости $F_2 = 15w$, Н, приложенная на расстоянии $r = 45$ см от оси вращения. Барабан считать однородным цилиндром. Определить угловую скорость барабана через 15 с после начала вращения.

16. К ведущему валу редуктора при пуске прикладывается вращающий момент, который зависит от его угловой скорости: $M = 18(1 - 0,5w).$ Момент инерции вала относительно оси вращения $J = 36кг \cdot м^2$. Определить угол, на который повернется вал за 15 с после начала пуска.

17. На тормозящийся вал действует момент сил сопротивления, равный $M = 120(1 - e^{-0,6t})$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен

$J = 150 кг \cdot м^2$. Начальная угловая скорость вала равна $w_0 = 10$ рад/с. Определить значение угла поворота вала в момент времени $t = 5c$.

18. Барабан массой 600кг и радиусом 80 см приводится во вращение из состояния покоя постоянным моментом $M_1 = 500 Н \cdot м$. При этом барабан испытывает силы сопротивления, момент которых $M_2 = 6w^2$. Барабан считать однородным диском. Определить угловую скорость барабана в тот момент времени, когда он повернется на угол $j = 4p$ рад.

19. Вал, вращавшийся с угловой скоростью $w_0 = 2{,}5$ рад/с, начинает испытывать воздействие сил, момент которых $M = 50 \sin(pt)$. Момент инерции вала относительно оси вращения равен $J = 10 кг \cdot м^2$. Определить угловую скорость вала через 10,5 с после начала воздействия сил.

20. Барабан, находившийся в покое, приводится во вращение постоянным моментом M_1. При этом возникает момент сил сопротивления, пропорциональный угловой скорости: $M_2 = 12w$. Барабан считать однородным цилиндром массой 100 кг и радиусом 50 см. Определить, каким должен быть момент M_1, чтобы через 2 с угловая скорость барабана равнялась 8 рад/с.

21. Маховик массой 100 кг и радиусом 80 см, вращавшийся с угловой скоростью $w_0 = 15$ рад/с, начинает испытывать силы сопротивления, момент которых пропорционален угловой скорости $M = 16w$. Маховик считать однородным диском. Определить число оборотов маховика с момента начала торможения и до его остановки.

22. После отключения подачи газа турбин, вращавшаяся с угловой скоростью $w_0 = 6$ рад/с, тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых $M_1 = 15w^2$, и силами трения в подшипниках, момент которых $M_2 = 130 Н \cdot м$. Момент инерции турбины относительно оси вращения равен $J = 120 кг \cdot м^2$. Определить число оборотов турбины с момента начала торможения и до ее остановки.

23. К шкиву в момент пуска прикладывается вращающий момент, который зависит от его угловой скорости: $M = 18(1 - 0{,}5w)$. Шкив считать однородным кольцом массой 100кг и радиусом 60 см. Определить угловую скорость шкива через 10 с после пуска.

24. К однородному цилиндру массой 20 кг и радиусом 10 см, вращающемуся с угловой скоростью $w_0 = 10$ рад/с, прикладывается вращающий момент, который зависит от угловой скорости цилиндра и

времени: $M = \frac{1{,}1t}{w}$. Определить угловую скорость цилиндра через 2 с после приложения момента.

25. На тело, вращавшееся с угловой скоростью $w_0 = 5$ рад/с, начинают действовать силы сопротивления, момент которых зависит от угла поворота тела: $M = 3j^2$. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $J = 10 кг \cdot м^2$. Определить, на какой угол повернется тело до его остановки.

26. Для торможения ротора электродвигателя к нему прикладывается момент сил сопротивления, зависящий от угловой скорости: $M = 0{,}002w^3$. Момент инерции ротора относительно оси вращения равен $J = 0{,}1 кг \cdot м^2$. Определить число оборотов ротора с момента начала торможения и до того момента времени, когда его угловая скорость уменьшится в два раза, если $w_0 = 0{,}5$ рад/с.

27. Для ускорения вращения турбины к ней прикладывается вращающий момент, который зависит от угловой скорости турбины и времени: $M = \frac{1{,}2t}{w^2}$. Начальная угловая скорость турбины $w_0 = 4$ рад/с. Момент инерции турбины относительно оси вращения равен $J = 0{,}2 кг \cdot м^2$. Определить угловую скорость турбины через 2 с после приложения момента.

28. При работе дизеля его вращающий момент может зависеть от угловой скорости: $M = 100(2w - 7)$. Момент инерции вала дизеля относительно оси вращения равен $J = 180 кг \cdot м^2$. Начальная угловая скорость вала $w_0 = 5$ рад/с. Определить угловую скорость вала через 1,5 с после приложения момента.

29. Вращающий момент, приложенный к платформе, обратно пропорционален квадрату угловой скорости: $M = \frac{1{,}5}{w^2}$. Момент инерции платформы относительно оси вращения равен $J = 50 кг \cdot м^2$. Определить угловую скорость платформы через 25 с после приложения момента, если начальная угловая скорость равна $w_0 = 0{,}5$ рад/с.

30. Шкив (однородное кольцо) массой 200 кг и радиусом 40 см приводится во вращение из состояния покоя моментом $M_1 = 80 Н \cdot м$, испытывая силы сопротивления, момент которых $M_2 = 1{,}2w^2$. Определить, на какой угол повернется шкив, пока его угловая скорость станет равной 4 рад/с.

ЗАДАНИЕ Д 3.

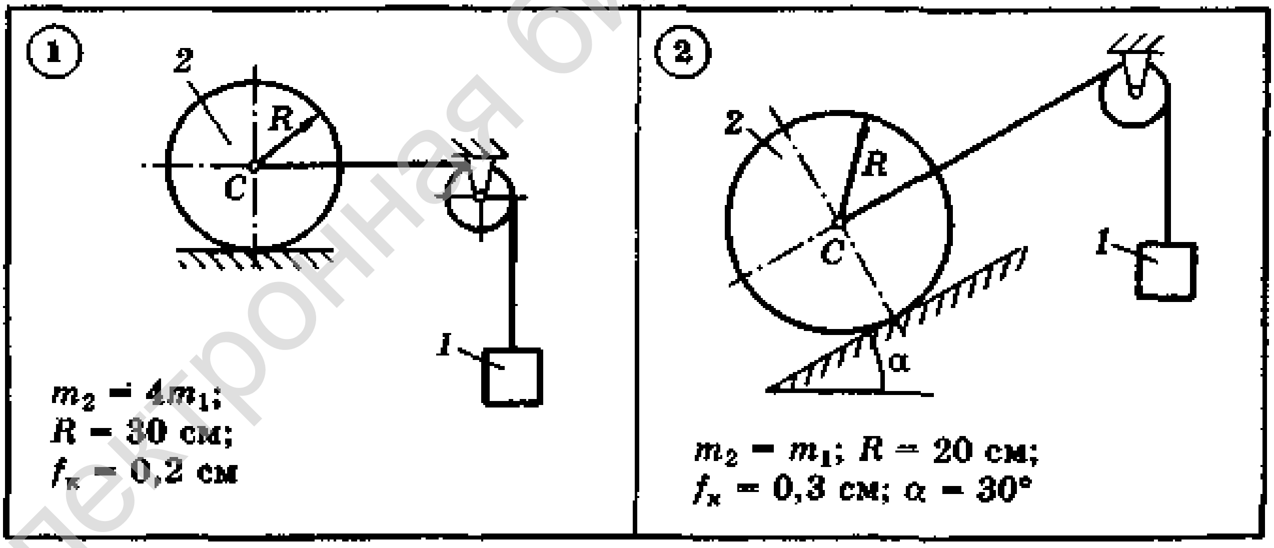
ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЗАДАНИЕ 1.

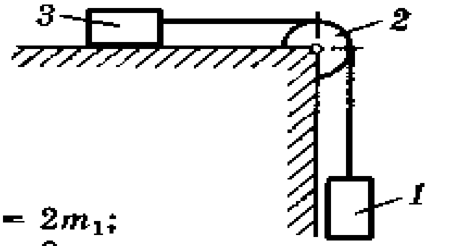
Для приведенных на схемах 1-30 механических систем, используя теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме, определить угловое ускорение (варианты 4, 6, 7, 9, 11, 18, 25, 26, 28) или линейное ускорение (остальные варианты) тела. Нити невесомы и нерастяжимы. Принятые обозначения: т — массы тел, R и r— радиусы, r — радиус инерции (если он не указан, тело считать однородным цилиндром); при наличии трения указываются f — коэффициент трения скольжения, f_k — коэффициент трения качения.

ЗАДАНИЕ 2.

Для приведенных на схемах 1-30 механических систем, используя теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме, определить угловую скорость (варианты 4, 6, 7, 9, 11, 18, 25, 26, 28) или линейную скорость (остальные варианты) тела 1 после его заданного перемещения $j_1 = 2p$ рад или S1 = 2 м. Движение начинается из состояния покоя.

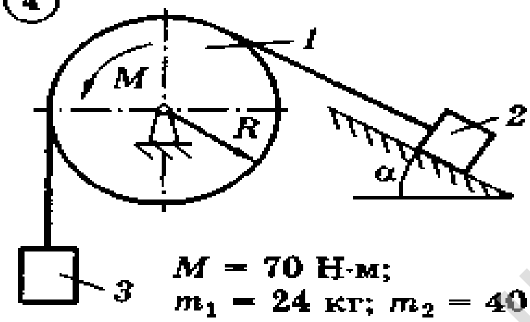


3



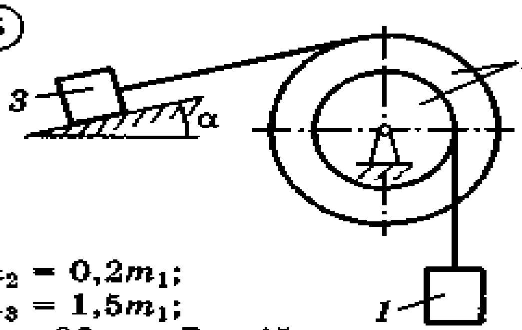
$m_2 = 2m_1$;
$m_3 = 3m_1$;
$f = 0{,}15$

4



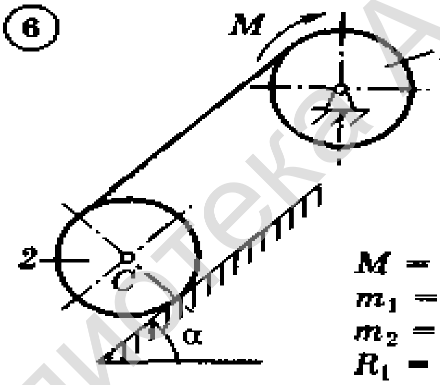
$M = 70$ Н·м;
$m_1 = 24$ кг; $m_2 = 40$ кг;
$m_3 = 20$ кг; $R = 25$ см;
$f = 0{,}12$; $\alpha = 30°$

5



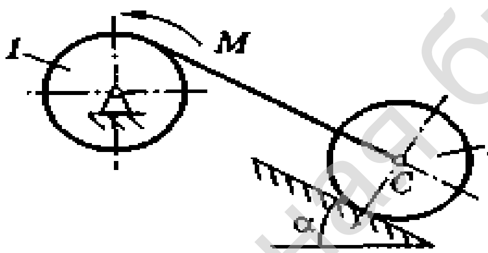
$m_2 = 0{,}2m_1$;
$m_3 = 1{,}5m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 25$ см; $f = 0{,}1$;
$\alpha = 15°$

6



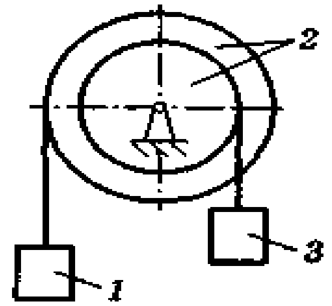
$M = 40$ Н·м;
$m_1 = 15$ кг;
$m_2 = 35$ кг;
$R_1 = 20$ см;
$\alpha = 45°$

7



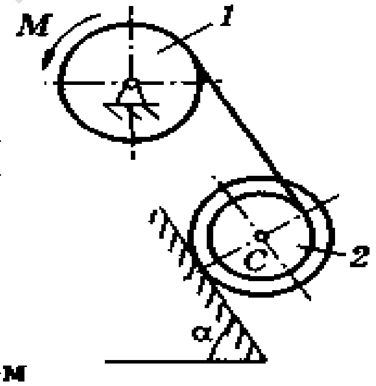
$M = 120$ Н·м;
$m_1 = 30$ кг; $m_2 = 42$ кг;
$R_1 = 40$ см; $\alpha = 30°$

8



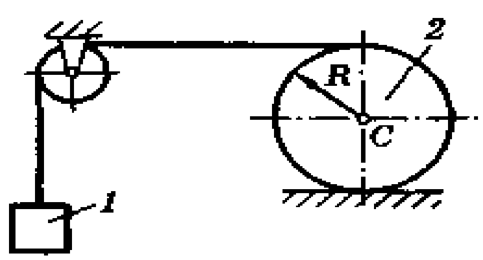
$m_2 = 0{,}5m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 25$ см; $R_2 = 55$ см;
$\rho_2 = 40$ см

9

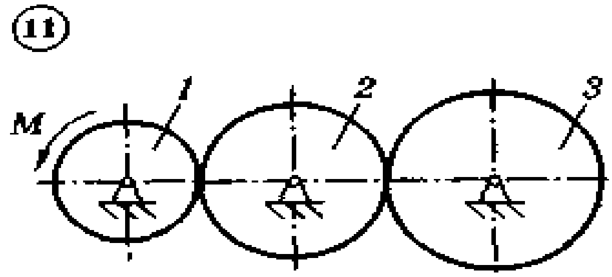


$m_1 = 15$ кг;
$m_2 = 32$ кг;
$R_1 = 20$ см;
$r_2 = 15$ см;
$R_2 = 40$ см;
$\rho_2 = 20$ см;
$\alpha = 60°$;
$M = 120$ Н·м

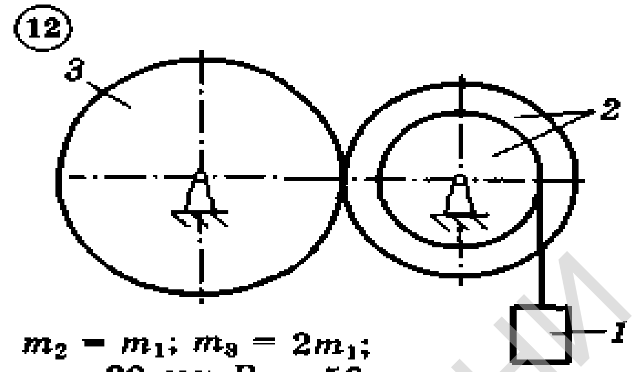
10



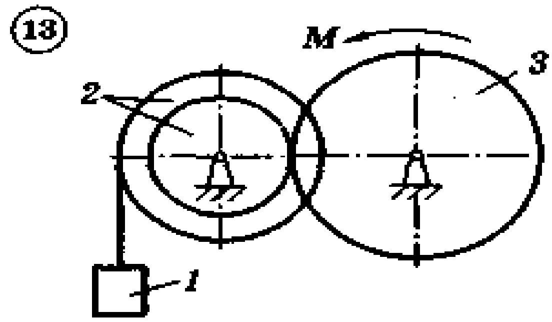
$m_2 = 6m_1$; $R = 45$ см;
$f_к = 0{,}2$ см



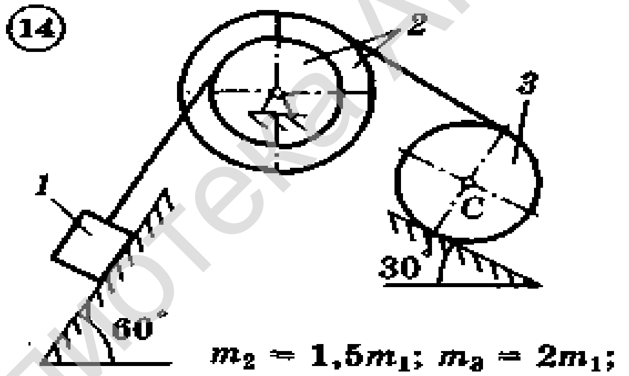
$m_1 = 20$ кг; $m_2 = 10$ кг;
$m_3 = 40$ кг; $M = 60$ Н·м;
$R_1 = 30$ см



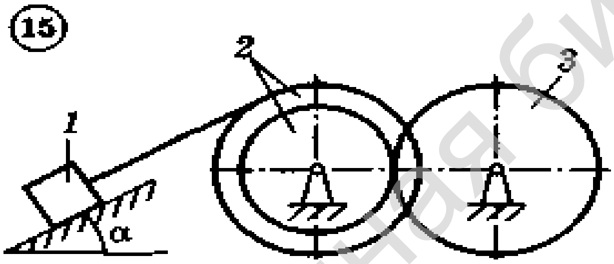
$m_2 = m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 40$ см



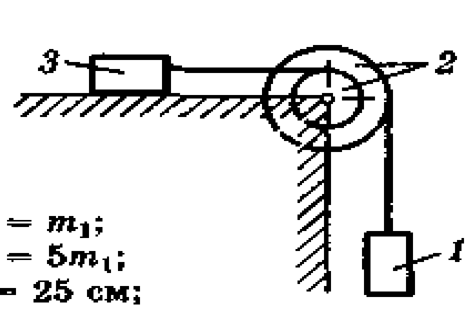
$M = 220$ Н·м; $m_1 = 20$ кг;
$m_2 = 8$ кг; $m_3 = 15$ кг; $r_2 = 40$ см;
$R_2 = 60$ см; $R_3 = 70$ см; $\rho_2 = 50$ см



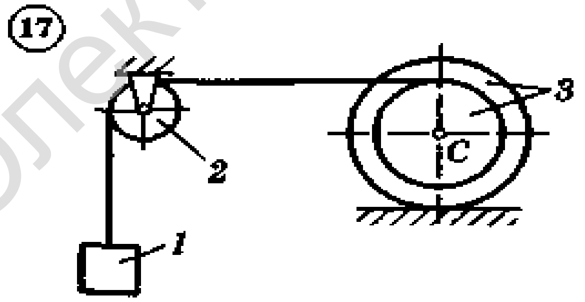
$m_2 = 1{,}5m_1$; $m_3 = 2m_1$;
$r_2 = 35$ см; $R_2 = 55$ см;
$\rho_2 = 40$ см



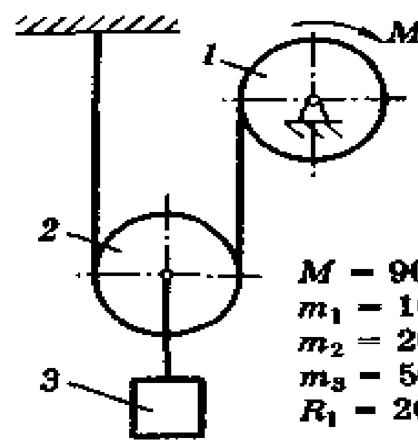
$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 4m_1$;
$r_2 = 30$ см; $R_2 = 50$ см;
$\rho_2 = 40$ см; $f = 0{,}2$; $\alpha = 30°$



$m_2 = m_1$;
$m_3 = 5m_1$;
$r_2 = 25$ см;
$R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 35$ см;
$f = 0{,}2$

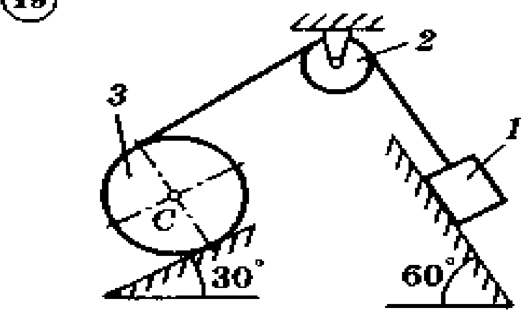


$m_2 = 3m_1$; $m_3 = 7m_1$;
$r_3 = 30$ см; $R_3 = 50$ см;
$\rho_3 = 40$ см



$M = 90$ Н·м;
$m_1 = 10$ кг;
$m_2 = 20$ кг;
$m_3 = 50$ кг;
$R_1 = 20$ см

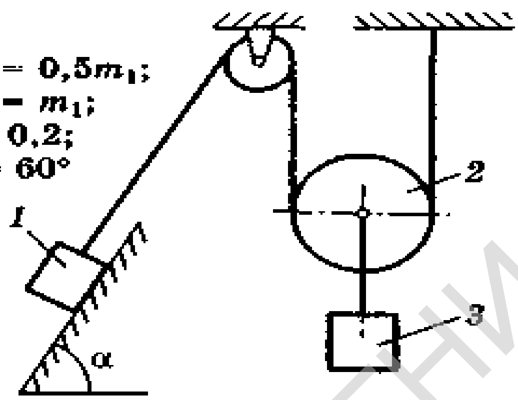
19



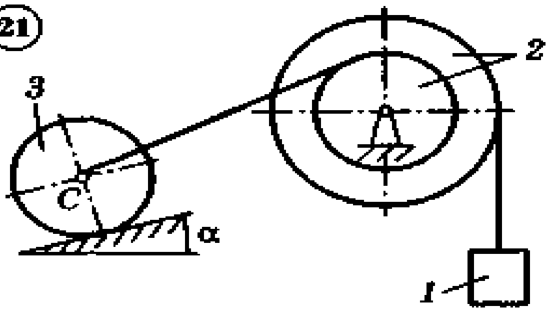
$m_2 = 0{,}6m_1;\ m_3 = 3m_1$

20

$m_2 = 0{,}5m_1;$
$m_3 = m_1;$
$f = 0{,}2;$
$\alpha = 60°$

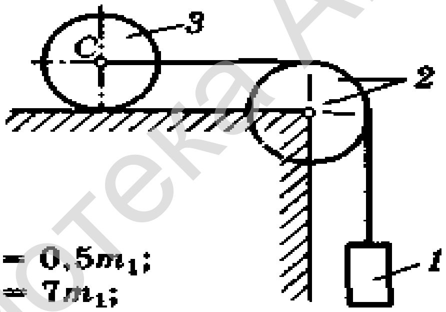


21



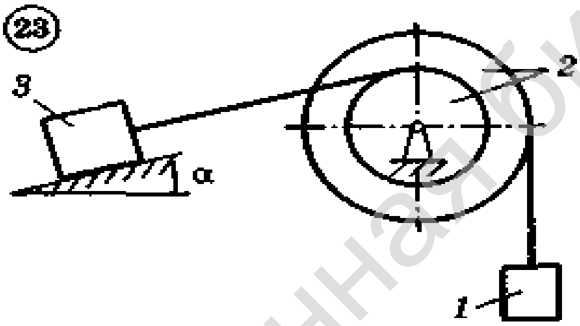
$m_2 = 2m_1;\ m_3 = 5m_1;$
$\rho_2 = 40$ см; $r_2 = 30$ см;
$R_2 = 50$ см; $\alpha = 15°$

22



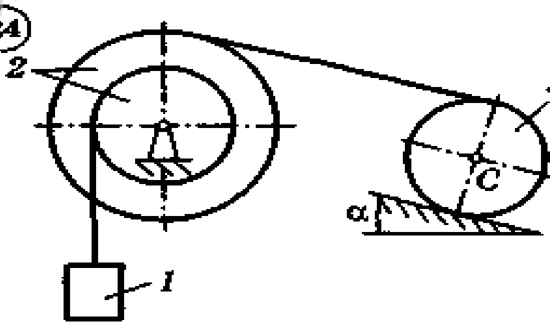
$m_2 = 0{,}5m_1;$
$m_3 = 7m_1;$
$R_3 = 40$ см;
$f_к = 0{,}25$ см

23



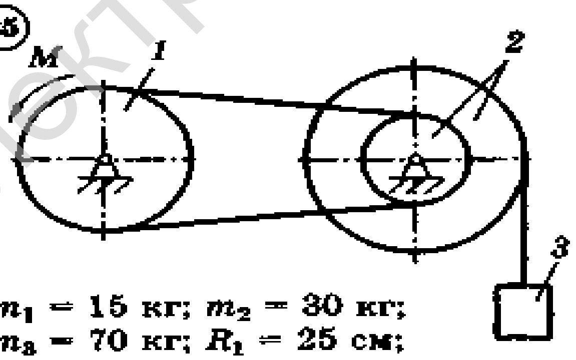
$m_2 = 1{,}5m_1;\ m_3 = 6m_1;$
$r_2 = 20$ см; $R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 30$ см; $f = 0{,}1;\ \alpha = 15°$

24



$m_2 = m_1;\ m_3 = 2{,}5m_1;$
$r_2 = 35$ см; $R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 40$ см; $\alpha = 15°$

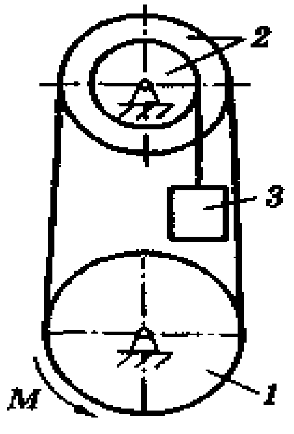
25



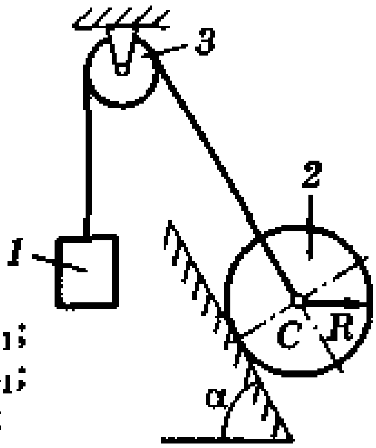
$m_1 = 15$ кг; $m_2 = 30$ кг;
$m_3 = 70$ кг; $R_1 = 25$ см;
$R_2 = 40$ см; $r_2 = 20$ см;
$\rho_2 = 30$ см; $M = 480$ Н·м

26

$m_1 = 20$ кг;
$m_2 = 30$ кг;
$m_3 = 50$ кг;
$R_1 = 50$ см;
$r_2 = 25$ см;
$R_2 = 45$ см;
$\rho_2 = 35$ см;
$M = 180$ Н·м

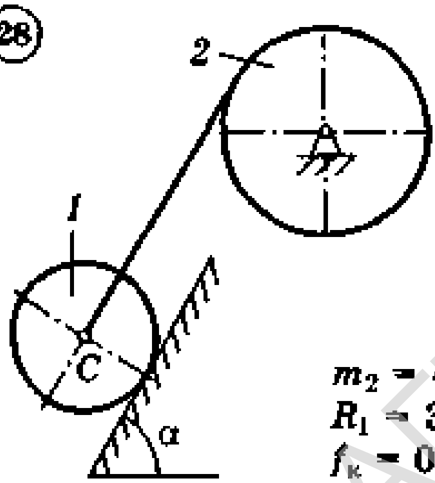


27



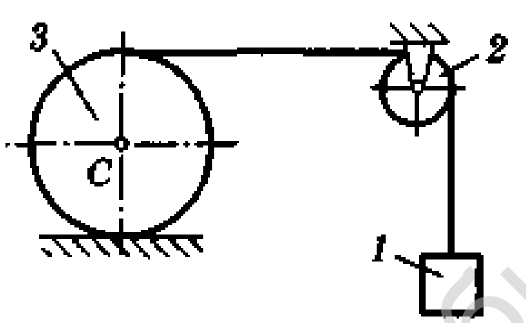
$m_2 = 0{,}5m_1$;
$m_3 = 0{,}5m_1$;
$R = 25$ см;
$f_к = 0{,}28$ см;
$\alpha = 60°$

28



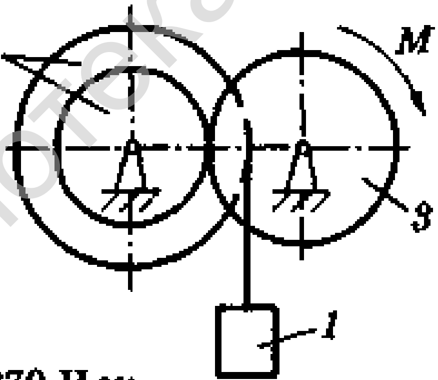
$m_2 = 4m_1$;
$R_1 = 30$ см;
$f_к = 0{,}3$ см;
$\alpha = 60°$

29



$m_2 = 2m_1$; $m_3 = 6m_1$;
$R_3 = 50$ см; $f_к = 0{,}25$ см

30



$M = 270$ Н·м;
$m_1 = 45$ кг; $m_2 = 20$ кг;
$m_3 = 15$ кг; $r_2 = 30$ см;
$R_2 = 50$ см; $r_3 = 35$ см; $\rho_2 = 40$ см

ОТВЕТЫ

ЗАДАНИЕ С1.

№	X_A,kH	Y_A,kH	R_A, кН	R_B, кН	R_C, кН	M_A, кНм
1	5,00	0,330	-	8,33	-	-
2	26,9	11,6	-	53,8	-	-
3	12,1	12,9	-	17,1	-	-
4	-	-	0	16,0	4,00	
5	5,36	6,91	-	6,19	-	-
6	5,00	9,94	-	18,7	-	-
7	28,0	18,5	-	56,0	-	-
8	8,66	11,2	-	6,16	-	-
9	16,2	5,00	-	-	-	33,5
10	1,16	1,41	-	3,59	-	-
11	8,66	15,0	-	-	-	82,3
12	8,66	20,8	-	5,77	-	-
13	2,07	2,61	-	9,68	-	-
14	13,9	12,0	-	16,1	-	-
15	8,84	9,69	-	17,7	-	-
16	6,00	1,00	-	8,49	-	-
17	8,66	5,39	-	19,6	-	-
18	6,50	8,50	-	12,0	-	-
19	16,7	8,96	-	33,4	-	-
20	18,7	10,4	-	5,43	-	-
21	5,00	1,34	-	-	-	47,3
22	1,16	10,7	-	5,70	-	-
23	5,00	31,7	-	13,0	-	-
24	5,00	0,401	-	6,74	-	-
25	16,2	15,0	-	24,9	-	-
26	8,66	1,93	-	21,9	-	-
27	7,07	17,1	-	-	-	37,1
28	6,40	5,00	-	-	-	20,2
29	-	-	13,2	9,73	19,5	-
30	8,66	0,670	-	24,3	-	-

ЗАДАНИЕ С2

№	**Значения модулей величин реакций опор, кН (X, Y, R), кНм (M)**							
1.	X_A	0	Y_A	6.67	R_B	66.7	R_C	20.0
2.	X_A	63.3	Y_A	20.0	X_B	63.3	Y_B	40.0
3.	R_A	46.3	R_B	166	X_C	0	Y_C	30.0
4.	X_A	0	Y_A	63.0	M_A	96.0	R_B	77.0
5.	X_A	8.33	Y_A	16.3	X_B	51.7	Y_B	16.3
6.	X_A	92.5	Y_A	26.0	X_B	27.5	Y_B	26.0
7.	X_A	18.5	Y_A	40.5	X_B	54.5	Y_B	33.0
8.	X_A	6.81	Y_A	0	M_A	15.8	Y_B	9.19
9.	X_A	41.3	Y_A	65.0	X_B	11.3	Y_B	55.0
10.	X_A	10.6	Y_A	0.833	X_B	9.38	Y_B	29.2
11.	X_A	40.0	Y_A	110	X_B	80.0	Y_B	110
12.	X_A	50.0	Y_A	55.0	M_A	70.0	R_B	65.0
13.	R_A	50.0	X_B	0	Y_B	110	M_B	180
14.	R_A	20.0	X_B	70.0	Y_B	20.0	M_B	220
15.	X_A	30.0	Y_A	0	R_B	80.0	R_D	30.0
16.	X_A	90.0	Y_A	10.0	M_A	160	R_B	14.1
17.	X_A	60.0	Y_A	8.0	M_A	104	R_B	8.0
18.	X_A	50.0	Y_A	60.0	M_A	30.0	R_B	60.0
19.	X_A	84.2	Y_A	46.3	X_B	84.2	Y_B	114
20.	X_A	60.0	Y_A	100	M_A	120	R_B	20.0
21.	X_A	53.3	Y_A	15.0	X_B	13.3	Y_B	30.0
22.	X_A	225	Y_A	150	X_B	125	Y_B	50.0
23.	X_A	28.0	Y_A	12.0	X_B	28.0	Y_B	48.0
24.	X_A	20.0	Y_A	160	M_A	320	R_B	20.0
25.	X_A	20.0	Y_A	2.0	X_B	20.0	Y_B	2.0
26.	X_A	90.0	Y_A	75.0	M_A	100	R_B	25.0
27.	X_A	25.0	Y_A	38.3	X_B	25.0	Y_B	1.67
28.	X_A	8.0	Y_A	7.0	X_B	8.0	Y_B	73.0
29.	X_A	30.0	Y_A	15.0	M_A	115	R_B	15.0
30.	X_A	2.22	Y_A	163	X_B	2.22	Y_B	36.7

ЗАДАНИЕ С3.

	Fmin,kH	Fmax,kH		Fmin,kH	Fmax,kH
	-7,15	4,15	6	15,1	23,1
	-3,33	7,67	7	0,381	9,62
	-9,00	3,00	8	4,67	12,7
	-6,47	16,7	9	15,1	23,1
	-6,43	5,57	0	10,8	14,2
	7,12	13,1	1	-6,43	5,57
	8,85	14,2	2	8,06	18,5
	-6,43	5,57	3	8,85	14,2
	0,381	9,62	4	-6,47	16,7
0	4,67	12,7	5	-7,15	4,15
1	-9,00	3,00	6	11,7	18,6
2	10,8	14,2	7	3,84	13,7
3	-6,43	5,57	8	20,0	26,0
4	-2,70	7,70	9	-2,29	7,51
5	3,84	13,7	0	-6,35	4,03

ЗАДАНИЕ К1.

№	ι, м/с	а, м/с2	r , м	№	u , м/с	а, м/с2	r , м
1	19,0	6,32	∞	16	19,0	38,0	∞
2	7,28	4,00	48,2	17	10,8	10,0	31,2
3	6,28	19,7	2,00	18	12,6	39,5	4,00
4	4,24	6,00	4,24	19	2,24	4,00	2,80
5	3,18	4,87	2,81	20	5,54	21,7	3,70
6	14,4	28,8	∞	21	13,4	26,8	∞
7	2,24	2,00	5,59	22	2,50	2,00	5,21
8	3,14	4,55	3,00	23	14,1	26,3	9,00
9	4,47	8,00	5,59	24	7,07	10,0	7,07
10	5,95	8,82	5,09	25	8,95	3,52	92,6
11	15,7	13,4	∞	26	11,3	79,2	∞
12	8,54	4,00	52,0	27	2,24	2,00	5,59
13	2,09	4,86	1,00	28	4,00	4,00	4,00
14	7,35	6,27	9,04	29	2,86	2,31	4,04
15	2,29	0,450	24,8	30	2,77	1,82	6,17

ЗАДАНИЕ К2

№	u , м/с	а, м/с2	№	u , м/с	а, м/с2	№	u , м/с	а, м/с2
1	0,375	0,654	11	0,500	2,77	21	5,30	72,4
2	0,750	2,37	12	0,500	2,80	22	2,80	90,3
3	0,833	7,14	13	0,400	0,632	23	0,150	0,335
4	0,333	0,821	14	0,100	0,141	24	4,19	49,4
5	0,267	0,444	15	0,575	0,718	25	0,600	4,33
6	4,80	45,0	16	2,50	22,1	26	0,195	0,274
7	0,833	1,91	17	0,262	0,417	27	0,800	4,75
8	0,389	0,707	18	1,00	6,77	28	0,800	7,04
9	8,00	219	19	0,514	0,573	29	0,667	1,90
10	0,750	1,77	20	0,559	3,19	30	1,89	52,6

ЗАДАНИЕ К3

№	υ а, м/с	аа, м/с2	№	υ а, м/с	аа, м/с2
1	39,0	78,1	16	98,9	1059
2	151	1272	17	113	451
3	33,5	128	18	28,0	125
4	84,5	487	19	10,8	72,4
5	87,0	511	20	57,2	190
6	314	3612	21	42,5	284
7	5,43	15,6	22	18,0	111
8	2,00	21,9	23	9,77	30,6
9	5,39	19,7	24	66,5	378
10	2,95	15,4	25	77,3	378
11	4,47	12,7	26	36,0	146
12	32,6	68,8	27	139	1107
13	107	692	28	43,3	231
14	4,47	22,0	29	15,0	33,5
15	42,3	168	30	10,2	16,5

ЗАДАНИЕ Д-1

№	Ответы	№	Ответы	№	Ответы
1.	3,14 с	11.	0,993 м/с	21.	10,3 м/с; 3,40 с
2.	2,45м/с	12.	21,8 м/с	22.	2,85 м
3.	6,78 м/с; 7,00 м/с	13.	8,52 м/с	23.	3,71 с
4.	5,00 с	14.	4,00 м; 8,00 м	24.	10,2 с; 102 м
5.	1,00 с; 3,30 м	15.	12,0 м	25.	10,0 с
6.	5,00 м	16.	6,01 км	26.	30,6 м
7.	4,24 м/с	17.	450 кН	27.	0,255; 5,00 м
8.	57,5 м	18.	6,28 м	28.	4,00 м/с; 0
9.	7,01 м	19.	27,0 с	29.	1,86 с
10.	1,50 м/с; 2,00 м	20.	1,81 м/с	30.	3,66 м/с; 3,72 м

ЗАДАНИЕ Д-2

№	Ответы	№	Ответы	№	Ответы
1.	0,533 с	11.	7,57 1/с	21.	4,77 об.
2.	5,41 с	12.	1,72 1/с	22.	1,04 об.
3.	0,572 с	13.	36,1 с	23.	1,84 1/с
4.	35,9 1/с	14.	24,0 об.	24.	12,0 1/с
5.	4,74 с	15.	2,82 1/с	25.	5,00 рад
6.	1,59 с	16.	22,2 рад	26.	15,9 об.
7.	8,66 рад	17.	55,4 рад	27.	4,64 1/с
8.	6,20 1/с	18.	6,73 1/с	28.	11,4 1/с
9.	4,80 об.	19.	4,09 1/с	29.	1,33 1/с
10.	31,3 1/с	20.	112 Нм	30.	3,66 рад

ЗАДАНИЕ Д3

№	ответ	№	ответ
1	1,36 м/с2	1	2,33 м/с
2	1,91 м/с2	2	2,76 м/с
3	1,08 м/с2	3	2,08 м/с
4	13,3 1/с2	4	12,9 1/с
5	0,435 м/с2	5	1,32 м/с
6	19,1 1/с2	6	15,5 1/с
7	3,02 1/с2	7	6,16 1/с
8	0,531 м/с2	8	1,46 м/с
9	70,2 1/с2	9	29,7 1/с
10	2,98 м/с2	10	3,45 м/с
11	19,0 1/с2	11	15,5 1/с
12	1,76 м/с2	12	2,66 м/с
13	0,468 м/с2	13	1,37 м/с
14	0,164 м/с2	14	0,809 м/с
15	1,07 м/с2	15	2,07 м/с
16	1,38 м/с2	16	2,35 м/с
17	1,40 м/с2	17	2,37 м/с
18	21,4 1/с2	18	16,4 1/с
19	0,469 м/с2	19	1,37 м/с
20	0,109 м/с2	20	0,661 м/с
21	0,440 м/с2	21	1,33 м/с
22	0,798 м/с2	22	1,79 м/с
23	0,180 м/с2	23	0,847 м/с
24	1,48 м/с2	24	2,44 м/с
25	6,17 1/с2	25	8,81 1/с
26	4,03 1/с2	26	7,11 1/с
27	2,76 м/с2	27	3,33 м/с
28	8,04 1/с2	28	10,0 1/с
29	2,27 м/с2	29	3,01 м/с
30	0,361 м/с2	30	1,20 м/с

ЛИТЕРАТУРА

Богомаз И.В., Теоретическая механика, том 2, Динамика. Аналитическая механика: Тексты лекций. - М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005 г. – 143 с.

Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика. / Под ред. А.И. Кириллова. – 2-е изд., исправ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008 г. – 384 с.

Диевский В.А., Теоретическая механика: Учебное пособие. 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2008 г. – 320 с.

Кепе О.Э. и др. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учебное пособие для вузов. / Под ред. О.Э. Кепе. – 2-е изд., стереотип. – СПб.: Издательство «Лань», 2008 г. – 368 с.

Диевский В.А., Малышева И.А. Теоретическая механика. Сборник заданий: Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2007. -192с.

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано в печать 25.01.2013 г.
Формат 60×84/16
Печать RISO Объем 5,25 ус.печ.л.
Тираж 60 экз. Заказ № 14

ТИПОГРАФИЯ

АЛЬМЕТЬЕВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО

НЕФТЯНОГО ИНСТИТУТА

423452, Татарстан, г. Альметьевск, ул. Ленина, 2