

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИВАНОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ТЕКСТИЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра теоретической механики
и сопротивления материалов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

"КИНЕМАТИКА"

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников всех специальностей

Иваново 2001

Содержание заданий, выбор вариантов, порядок выполнения работ, пояснения к тексту задач.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. 1.4 - это рис.4 к задаче 1 и т.д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-ой строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шрифта, а номер условия в таблице - по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Чертеж к задаче выполняется с учетом условий решаемого варианта; он должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы; в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштаба, в тексте задач специально не оговаривается, что все нити (веревки, оси) являются нерастяжимыми и невесомыми. Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величины (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайтесь внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой "Указания"; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера - разъяснить ход решения, но воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

В методических указаниях представлены варианты заданий и примеры их выполнения для студентов-заочников механических и технологических специальностей по разделу “Кинематика”.

При составлении данного издания были использованы "Методические указания к расчетно-проектировочным работам по теоретической механике для студентов-заочников" под редакцией проф. С. М. Тарга.

Составители: канд. техн. наук, доц. Н. Ф. Калабин,
д-р техн. наук, проф. Н. И. Смирнов.

Научный редактор канд. техн. наук, доц. Е. В. Горбунова.

Редактор Т. В. Фёдорова

Корректор Т. В. Белова

ЛР № 020306 от 28.11.96. Подписано в печать 17.07.2001.

Формат 1/16 60x84. Бумага писчая. Плоская печать.

Усл. печ. л. 1,16. Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 75 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел Ивановской
государственной текстильной академии
Участок оперативной полиграфии ИГТА
153000 г. Иваново, пр. Ф. Энгельса, 21

Рабочая программа

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная её радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная ее вектора скорости по времени.

Координатный способ задания движения точки (в прямоугольных декартовых координатах). Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Естественный трехгранник. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника; касательное и нормальное ускорения точки. Равномерное и равнопеременное криволинейные движения точки; законы этих движений.

Кинематика

Поступательное движение. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (вращательное движение). Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Законы равномерного и равнопеременного вращений. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и её касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в её плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость угловой скорости и углового ускорения фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определения ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращательном движении фигуры вокруг полюса. Понятие о мгновенном центре ускорений.

Сложное движение точки и твердого тела (составное движение). Абсолютное и относительное движения точки, переносное движение. Относительная, переносная и абсолютная скорости и относительное, переносное и абсолютное ускорения точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Модуль и направление кориолисова ускорения. Случай поступательного переносного движения.

Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.

Задача 1(К1а, К1б)

Точка В движется в плоскости xOy (рис. 1.0 - 1.9, табл.1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1\text{с}$ определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x' = f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в таблице 1.

Указания. Задача 1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1=1\text{с}$. В некоторых вариантах задачи при вычислении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Таблица 1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$S = f(t)$
	рис. 0 – 2	рис. 3 – 6	рис. 7 – 9	
0	$12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2 + 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
1	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t - 2t^2$
3	$9 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^3$	$10 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4 \cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 3t^2$	$12 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6 \sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 - 10t$
7	$-2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$(t+1)^3$	$-8 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2-t^3$	$9 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

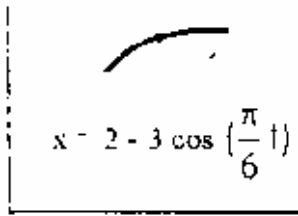


Рис. 1.0

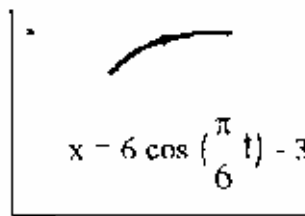


Рис. 1.1

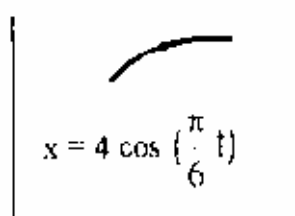


Рис. 1.2

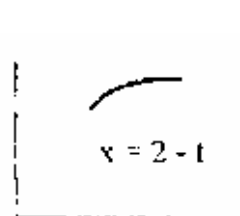


Рис. 1.3

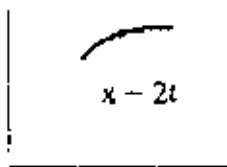


Рис. 1.4

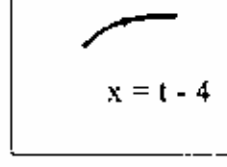


Рис. 1.5

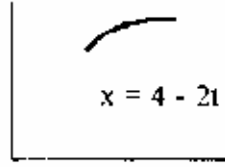


Рис. 1.6

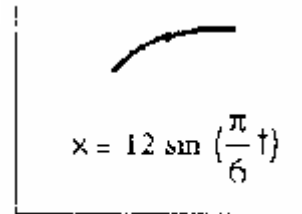


Рис. 1.7

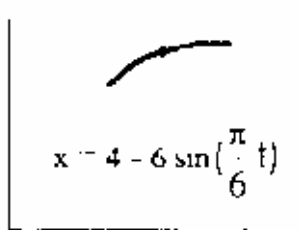


Рис. 1.8

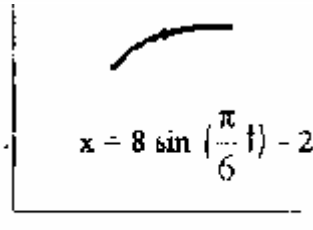


Рис. 1.9

Пример К1а. Даны уравнения движения точки в плоскости xu :

$$x = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3;$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1=1$ (с) найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t . Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \quad (1)$$

Из уравнения движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно,
$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2 \frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1а):

$$x = (y+1)^2 + 1. \quad (2)$$

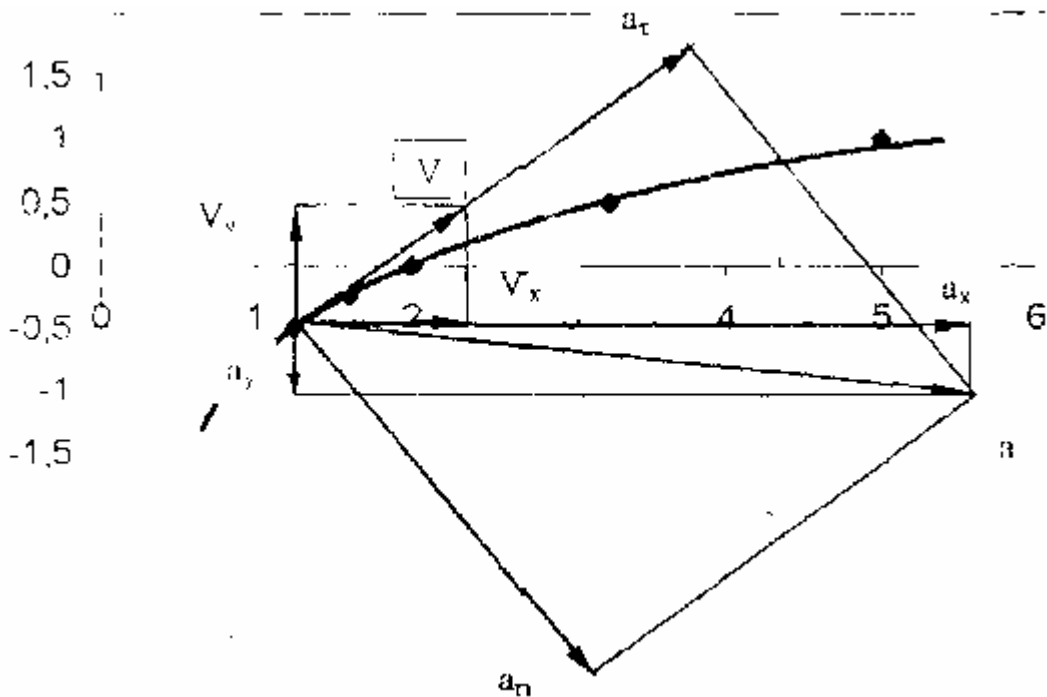


Рис. К1а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right); \quad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right); \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

и при $t=1c$ $V_{1x} = 1,11cм/c$, $V_{1y} = 0,73cм/c$, $V_1 = 1,33cм/c$. (3)

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right); \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right); \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t=1c$ $a_{1x} = 0,87cм/c^2$, $a_{1y} = -0,12cм/c^2$, $a_1 = 0,88cм/c^2$. (4)

4 Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2.$$

Получаем: $2V \frac{dV}{dt} = 2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt}$ и $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$. (5)

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем, что при $t=1c$ $a_{1\tau} = 0,66cм/c^2$.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставив сюда найденные число-вые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t=1c$ $a_{1n} = 0,58cм/c^2$.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \frac{V^2}{a_n}$. Подставляя сюда числовые значения V и a_n , найдем,

что при $t = 1\text{с}$ $\rho_1 = 3,05\text{ см}$.

Ответ: $V = 1,33\text{ см/с}$, $a_1 = 0,88\text{ см/с}^2$, $a_{1\tau} = 0,66\text{ см/с}^2$, $a_{1n} = 0,58\text{ см/с}^2$, $\rho = 3,05\text{ см}$.

Пример К16

Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2\text{ м}$ по закону $s = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ (s - в метрах, t – в секундах), где $s = AM$ (рис. К16). Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1\text{с}$.

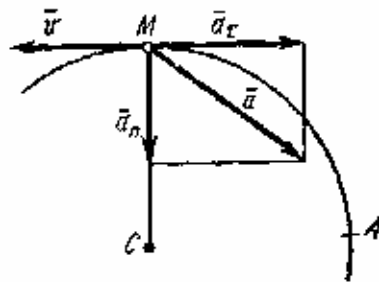


Рис. К16

Решение. Определяем скорость точки

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

При $t_1 = 1\text{с}$ получим $V_1 = \pi\sqrt{2}/4 = 1,11\text{ м/с}$.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим :

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi^2}{8} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}.$$

При $t_1 = 1\text{с}$ получим, учтя, что $R = 2\text{ м}$:

$$a_{1\tau} = -\pi^2 \sqrt{2}/16 = 0,87\text{ м/с}^2, \quad a_{1n} = V_1^2/R = \pi^2/16 = 0,62\text{ м/с}^2.$$

Тогда ускорение точки при $t_1 = 1\text{с}$ будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \pi^2 \sqrt{3}/16 = 1,07\text{ м/с}^2.$$

Задача 2 (К2)

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. 2.0 - 2.9, табл. 2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса 2 - $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса 3 - $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки А, В и С.

В столбце "Дано" таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ -закон вращения колеса 1, $S_4(t)$ - закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$ -закон изменения угловой скорости колеса 2, $V_5(t)$ -закон изменения скорости груза 5 и т.д. (везде φ выражено в радианах, S- в сантиметрах, t- в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для S_4, S_5 и V_4, V_5 -вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбце "Найти" скорости (V - линейные, ω - угловые) и ускорения (a -линейные, ε -угловые) соответствующим точек или тел.

Указания. Задача 2 - на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы, при этом считается, что ремень по ободу колес не скользит.

Таблица 2

Номер условия	Дано	Найти	
		Скорости	Ускорения
0	$S_4 = 4(7t - t^2)$	V_B, V_C	ε_2, a_A, a_5
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A, V_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	V_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	V_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	V_4, ω_1	ε_1, a_B, a_4
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	V_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$S_5 = 2t^2 - 5t$	V_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	V_5, V_B	ε_2, a_A, a_4

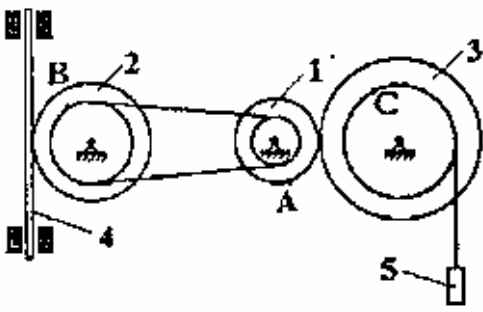


Рис.2.0

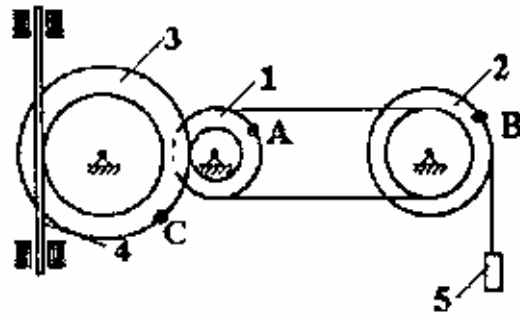


Рис.2.1

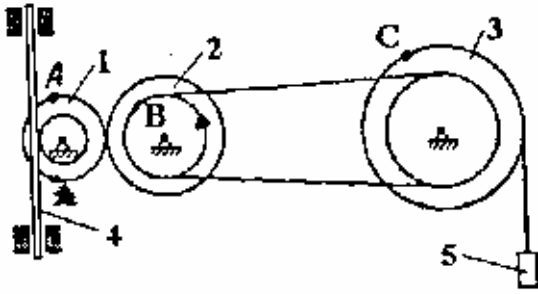


Рис.2.2

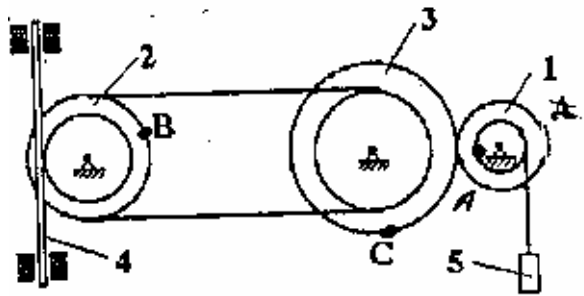


Рис.2.3

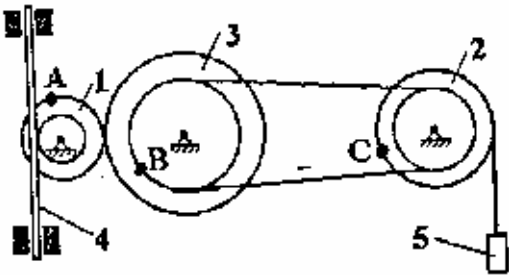


Рис.2.4

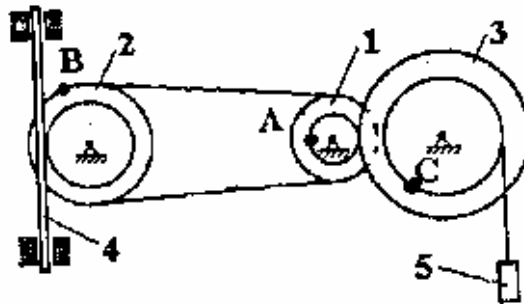


Рис.2.5

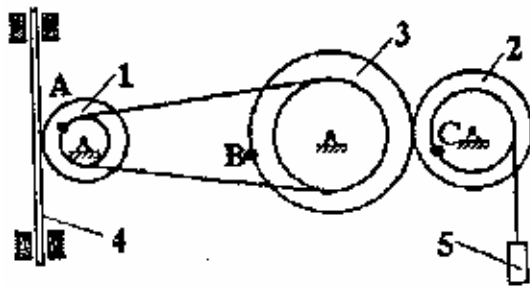


Рис.2.6

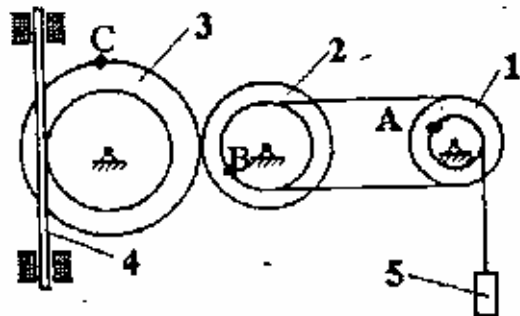


Рис.2.7

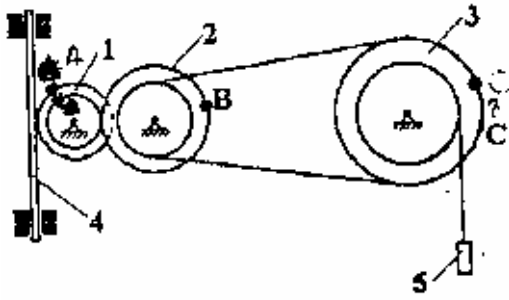


Рис.2.8

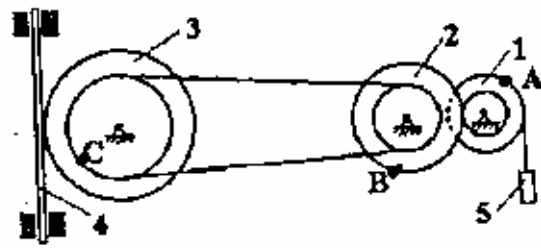


Рис.2.9

Пример 2. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3 , скрепленное с валом радиуса r_3 , находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 2). Рейка движется по закону $S_1 = f(t)$.

Дано: $R_2=6$ см, $r_2=4$ см, $R_3=8$ см, $r_3=3$ см, $S_1= 3t^3$ (S - в сантиметрах, t - в секундах), A - точка обода колеса 3, $t_1=3$ с. Определить: ω_3 , V_4 , ϵ_3 , a_A в момент времени $t = t_1$.

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_1), через V_1 , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_1), через U_1 .

1. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$V_1 = S_1 = 9t^2. \quad (1)$$

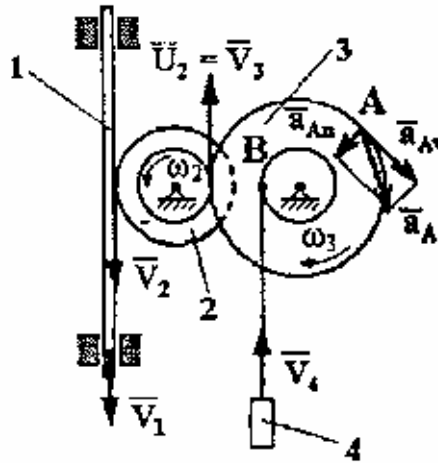


Рис. 2

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $V_2=V_1$ или $\omega_2 R_2 = V_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $U_2=V_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{3}{2} t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3} \omega_2 = \frac{3}{4} t^2. \quad (2)$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_3 = 6,75$ с⁻¹.

2. Определяем V_4 . Так как $V_4 = V_B = \omega_3 R_3$, то при $t_1=3$ с $V_4 = 20,25$ см/с.

3. Определяем ϵ_3 . Учитывая второе из равенств (2), получим $\epsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1,5t$.

Тогда при $t_1 = 3$ с $\epsilon_3 = 4,5$ с⁻².

4. Определяем a_A . Для точки A $\vec{a} = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$, где численно $a_A^\tau = R_3 \epsilon_3$, $a_A^n = R_3 \omega^2$. Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с имеем $a_A^\tau = 36$ см/с², $a_A^n = 364,5$ см/с²

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = 366,3 \text{ см/с}^2,$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис.2.

Ответ : $\omega_3 = 6,75$ с⁻¹, $V_4 = 20,25$ см / с, $\epsilon_3 = 4,5$ с⁻², $a_A = 366,3$ см/с².

Задача 3 (К3)

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В или Е (рис. 3.0 - 3.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползуну В и Е (рис. 3.8, 3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно: $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,3$ м, $l_3 = 1,2$ м, $l_4 = 0,6$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в таблице 3а (для рис. 3.0 – 3.4) или в таблице 3б (для рис. 3.5 – 3.9); при этом в таблице 3а ω_1 и ω_4 - величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол γ на рис. 3.8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 3.9 - против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α ; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере 3 (см. рис. 3,б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость \bar{V}_B и ускорение \bar{a}_B - от точки В к точке b (на рис. 3.5-3.9).

Указания. Задача 3- на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При её решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства

$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n$, где А - точка, ускорение которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка А движется по дуге окружности, то

$\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^n$); В – точка, ускорение которой нужно определить (если точка В движется по дуге окружности радиуса l , то $\bar{a}_B = \bar{a}_B^{\tau} + \bar{a}_B^n$, где численно $a_B^n = V_B^2/l$, входящая сюда скорость V_B определяется так же, как и скорости других точек механизма).

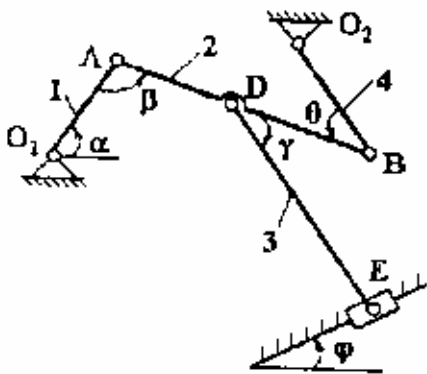


Рис.3.0

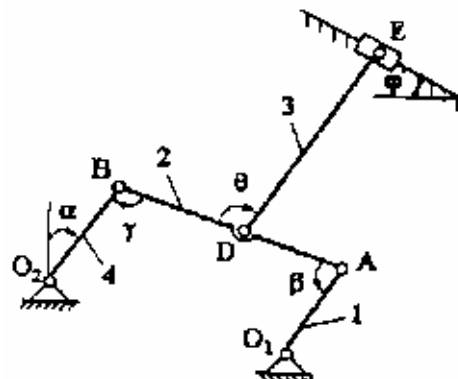


Рис.3.1

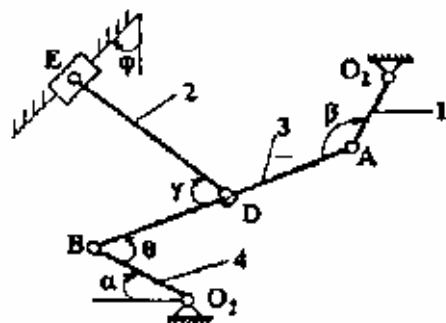
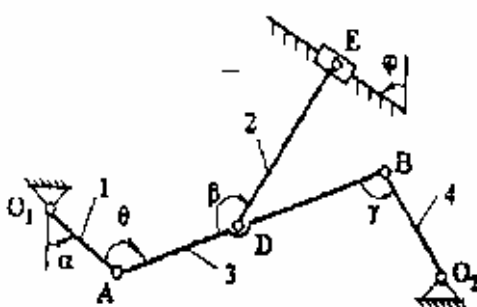


Рис.3.2

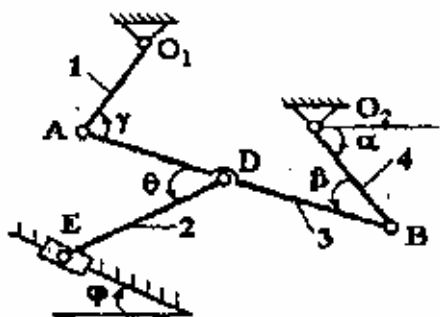


Рис.3.4

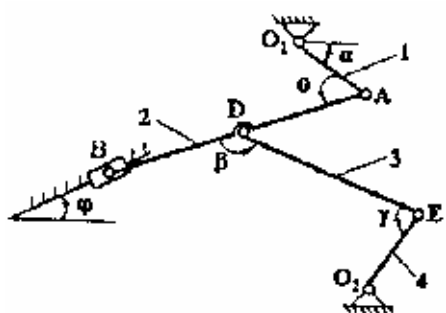


Рис.3.6

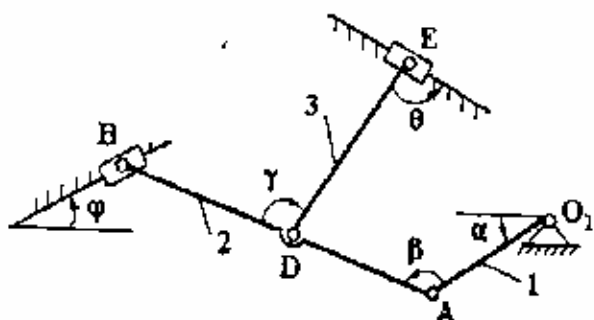


Рис.3.8

Рис.3.3

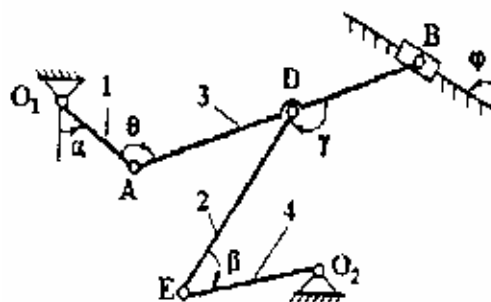


Рис.3.5

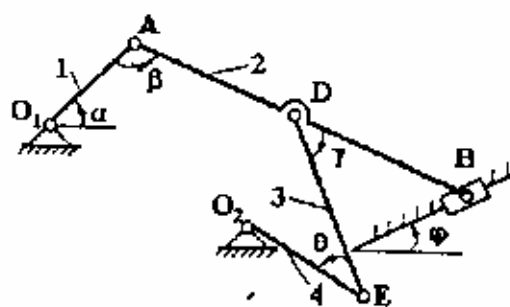


Рис.3.7

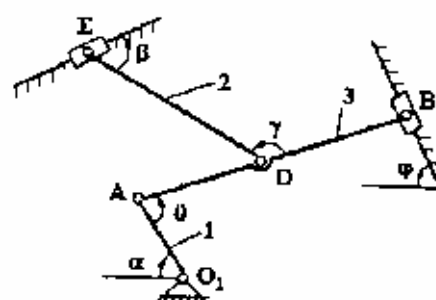


Рис.3.9

Таблица 3а (к рис. 3.0 - 3.4)

Номер усло- вия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1,$ 1/с	$\omega_4,$ 1/с	V точек	ω Звена	a точек	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	В,Е	DE	В	AB
1	90	120	150	0	30	-	4	А,Е	AB	А	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	В,Е	AB	В	AB
3	60	150	150	90	30	-	5	А,Е	DE	А	AB
4	30	30	60	0	150	4	-	Д,Е	AB	В	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	А,Е	AB	А	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	В,Е	DE	В	AB
7	0	60	60	0	120	-	2	А,Е	DE	А	AB
8	60	150	120	90	30	2	-	Д,Е	AB	В	AB
9	30	120	150	0	60	-	8	А,Е	DE	А	AB

Таблица 3б (к рис. 3.5 - 3.9)

Но- мер усло- вия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1,$ 1/с	$\varepsilon_1,$ 1/с ²	$V_B,$ м/с	$a_B,$ м/с ²	V То- чек	ω Зве- на	a точ- ки	ε Зве- на
0	120	30	30	90	150	2	4	-	-	В,Е	AB	В	AB
1	0	60	90	0	120	-	-	4	6	А,Е	DE	А	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	-	-	В,Е	AB	В	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	А,Е	AB	А	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	В,Е	DE	В	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	Д,Е	DE	А	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	-	-	В,Е	DE	В	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	А,Е	AB	А	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	-	-	В,Е	DE	В	AB
9	60	60	60	90	30	-	-	5	4	Д,Е	AB	А	AB

Пример 3. Механизм (рис. 3,а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,2$ м, $l_4 = 1,4$ м, $\omega = 2$ с⁻¹, $\varepsilon_1 = 7$ с⁻² (направления ω_1 и ε_1 - против хода часовой стрелки).

Определить: V_B , V_E , ω_2 , a_B , ε_3 .

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис.3,б).

2. Определяем \bar{V}_B . Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти \bar{V}_B , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление \bar{V}_B . По данным задачи, учитывая направление ω_1 , можем определить \bar{V}_A ; численно

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \bar{V}_A \perp O_1A. \quad (1)$$

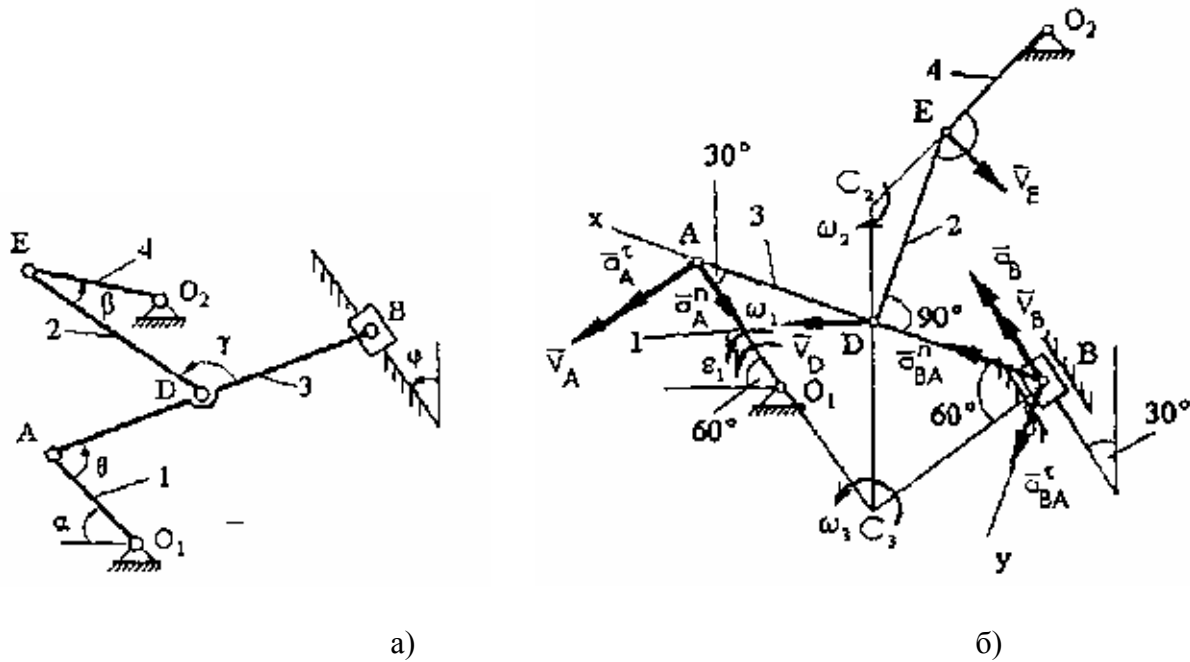


Рис.3

Направление \bar{V}_B найдем, учитывая, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная \bar{V}_A и направление \bar{V}_B , воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор \bar{V}_B (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$V_B \cos 30^\circ = V_A \cos 60^\circ \quad \text{и} \quad V_B = 0,46 \text{ м/с.} \quad (2)$$

3. Определяем \bar{V}_E . Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить \bar{V}_E , надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная \bar{V}_A и \bar{V}_B , строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3 , лежащая на пересечении перпендикуляров к \bar{V}_A и \bar{V}_B , восстановленных из точек A и B (к \bar{V}_A перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора \bar{V}_A определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3 . Вектор \bar{V}_D перпендикулярен отрезку C_3D , соединяющему точки D и C_3 , и направлен в сторону поворота. Величину V_D найдем из пропорции

$$\frac{V_D}{C_3D} = \frac{V_B}{C_3B}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3E , заметим, что $\triangle AC_3B$ прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60° , и что $C_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5 AB = BD$. Тогда $\triangle BC_3D$ является равносторонним и $C_3B = C_3D$

$$V_D = V_B = 0,46 \text{ м/с}; \quad \bar{V}_D \perp C_3D. \quad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E , вращающемуся вокруг O_2 , то $\bar{V}_E \perp O_2E$. Тогда, восстанавливая из точек E и D перпендикуляры к скоростям \bar{V}_E и \bar{V}_D , построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора \bar{V}_D определяем направление поворота стержня DE

вокруг центра C_2 . Вектор \vec{V}_E направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. 3,б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{V_E}{C_2E} = \frac{V_D}{C_2D}, \quad V_E = V_D = 0,46 \text{ м/с}. \quad (5)$$

4. Определяем ω_2 . Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и

$$C_2D = \frac{l_2}{2 \cos 30^\circ} = 0,69 \text{ м}, \quad \text{то} \quad \omega_2 = \frac{V_D}{C_2D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

5. Определяем \vec{a}_B . Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти \vec{a}_B , надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня АВ и траекторию точки В. По данным задачи можем определить $\vec{a}_A = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 16 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

Вектор \vec{a}_A^n направлен вдоль AO_1 , а \vec{a}_A^τ - перпендикулярно AO_1 ; изображаем эти векторы на чертеже. Так как точка В одновременно принадлежит ползуну, то вектор \vec{a}_B параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор \vec{a}_B на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и \vec{V}_B .

Для определения \vec{a}_B воспользуемся равенством

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n. \quad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы \vec{a}_{BA}^n (вдоль ВА от В к А) и \vec{a}_{BA}^τ (в любую сторону перпендикулярно ВА); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью настроенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3A} = \frac{V_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ с}^{-1} \quad \text{и} \quad a_{BA}^n = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ ; их можно найти, спроецировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B , спроецируем обе части равенства (8) на направление АВ (ось х), перпендикулярное неизвестному вектору \vec{a}_{BA}^τ . Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор \vec{a}_B направлен, как показано на рис. 3,б.

6. Определяем ε_3 . Чтобы найти ε_3 , сначала определим a_{BA}^τ . Для этого обе части равенства (8) спроецируем на направление, перпендикулярное АВ (ось у). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau + a_A^n \cdot \sin 30^\circ + a_A^n \cdot \sin 30^\circ. \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3,58 \text{ м/с}^2$. Знак указывает, что направление a_{BA}^τ противоположно показанному на рис. 3,б.

Теперь из равенства $a_{BA}^{\tau} = \epsilon_3 l_3$ получим

$$\epsilon_3 = \frac{|a_{BA}^{\tau}|}{l_3} = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $V_B = 0,46 \text{ м/с}$; $V_E = 0,46 \text{ м/с}$; $\omega_2 = 0,67 \text{ с}^{-2}$; $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$; $\epsilon_3 = 2,56 \text{ с}^{-2}$.

Задача 4(К4)

Прямоугольная пластина (рис. 4.0 - 4.4) или круглая пластина радиуса $R = 60 \text{ см}$ (рис. 4.5 - 4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданному в таблице 4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 4.0, 4.1, 4.2, 4.5, 4.6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 4.0-4.4) или по окружности радиуса R (рис. 4.5-4.9) движется точка M ; закон её относительного движения, т.е. зависимость $s = AM = f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t - в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 4.0 - 4.4 и для рис. 4.5-4.9; там же даны размеры b и l . На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$.

Указания. Задача 4 - на сложное движение точки. Для её решения необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче). В случаях, относящихся к рис. 4.5-4.9, при решении задачи не подставлять числового значения R , пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица 4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 4.0-4.4		Для рис. 4.5-4.9	
		$b, \text{ см}$	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = AM = f_2(t)$
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$(\pi R/3)(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$4R/3$	$(\pi R/2)(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$(\pi R/3)(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) - 56$	R	$(\pi R/6)(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$(\pi R/3)(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$(\pi R/6)(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$3R/4$	$(\pi R/2)(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$(\pi R/6)(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$(\pi R/3)(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	$4R/3$	$(\pi R/2)(t - 2t^2)$

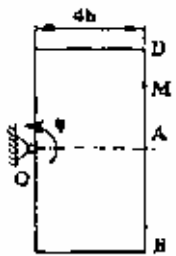


Рис. 4.0

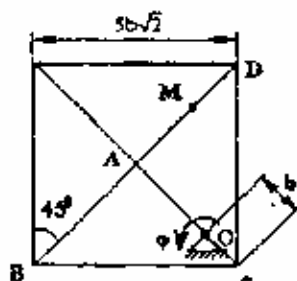


Рис. 4.1

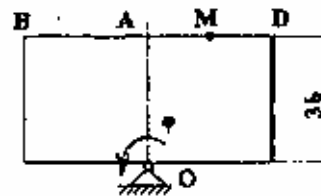


Рис. 4.2

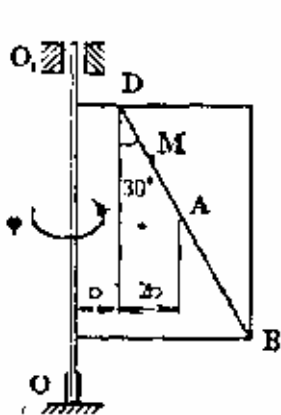


Рис. 4.3

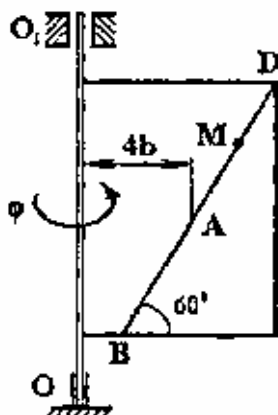


Рис. 4.4

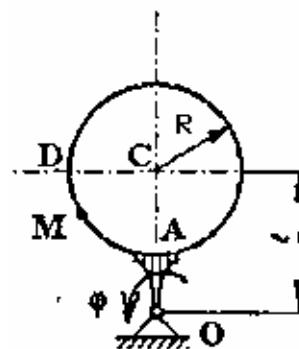


Рис. 4.5

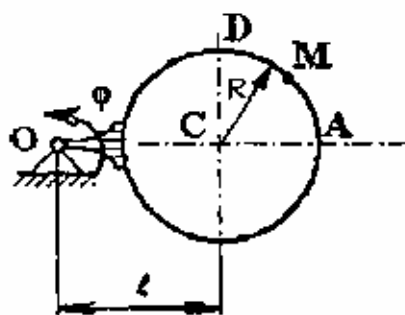


Рис. 4.6

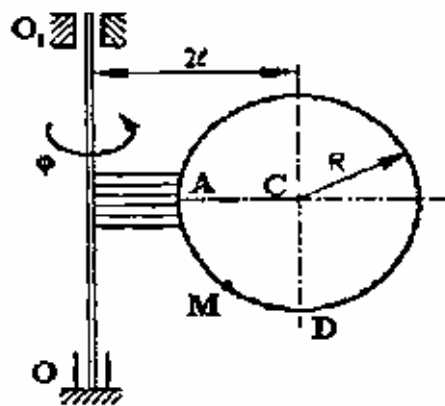


Рис. 4.7

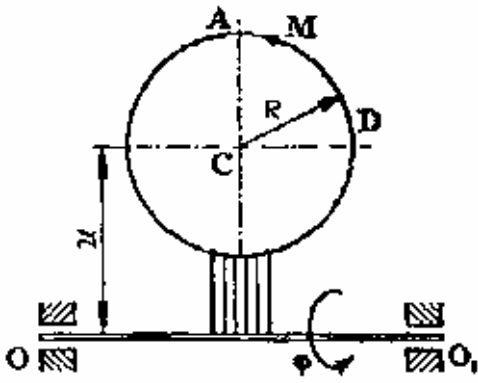


Рис. 4.8

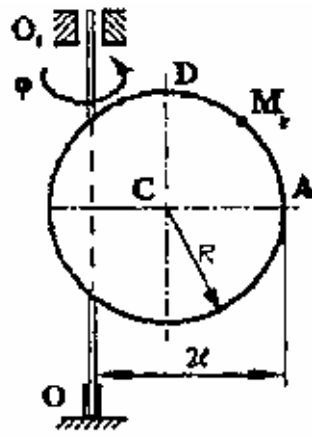


Рис. 4.9

Пример 4. Диск радиуса R (рис. 4) вращается вокруг вертикальной оси OO_1 по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис.4 дуговой стрелкой). По дуге большого круга ADB движется точка M по закону $s = AM = f_2(t)$; положительное направление отсчета s от A к D .

Дано: $R = 0,5$ м, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s = (\pi R/6)(7t - 2t^2)$ (φ - в радианах, s - в метрах, t - в секундах).

Определить: V_M и a_M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным (AB - относительная траектория точки), а вращение диска – переносным движением. Тогда абсолютная скорость \bar{V}_M и абсолютное ускорение \bar{a}_M точки найдутся по формулам:

$$\bar{V}_M = \bar{V}_r + \bar{V}_e, \quad \bar{a}_M = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c, \quad (1)$$

где в свою очередь

$$\bar{a}_r = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^n, \quad \bar{a}_e = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^n.$$

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$S = AM = (\pi R/6)(7t - 2t^2). \quad (2)$$

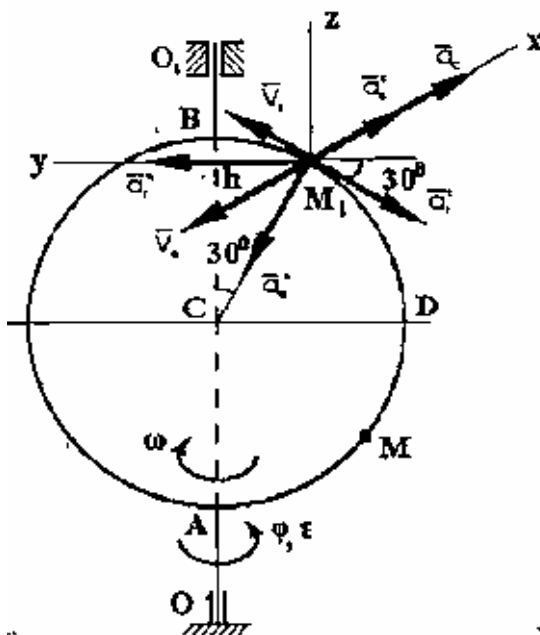


Рис.4

Сначала установим, где будет находиться точка М на дуге АDB в момент времени t_1 . Полагая в уравнении (2) $t_1 = 1$ с, получим

$$S_1 = \frac{5}{6}\pi R. \quad \text{Тогда} \quad \angle ACM = \frac{S_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ \quad \text{или} \quad \angle BCM = 30^\circ.$$

Изображаем на рис. 4 точку в положении, определяемом этим углом (точка M_1). Теперь находим числовые значения V_r , a_r^n , a_r^τ :

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi R}{6}(7-4t); \quad a_r^\tau = \dot{V}_r = -\frac{2}{3}\pi R; \quad a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho_r} = \frac{V_r^2}{R},$$

где ρ_r , - радиус кривизны относительной траектории, т.е. дуги АDB. Для момента времени $t_1 = 1$ с, учитывая, что $R = 0,5$ м, получим

$$V_r = \frac{\pi R}{6} \cdot 3 = \frac{\pi}{4} \text{ м/с}; \quad a_r^\tau = -\frac{\pi}{3} \text{ м/с}^2; \quad a_r^n = \frac{\pi^2}{8} \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор \bar{V}_r направлен в сторону положительного отсчета расстояния s , а вектор \bar{a}_r^τ - в противоположную сторону; вектор \bar{a}_r^n направлен к центру С дуги АDB. Изображаем все эти векторы на рис. 4.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^3 - 4t^2$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ϵ переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t, \quad \epsilon = \dot{\omega} = 12t - 8 \quad \text{и при } t_1 = 1 \text{ с} \quad \omega = -2 \text{ с}^{-1}; \quad \epsilon = 4 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что при $t_1 = 1$ с направление ϵ совпадает с направлением положительного отсчета угла φ , а направление ω ему противоположно; отметим это на рис.4 соответствующими дуговыми стрелками.

Для определения \bar{V}_e и \bar{a}_e находим сначала расстояние h точки M_1 от оси вращения. Получаем $h = R \sin 30^\circ = 0,25$ м. Тогда в момент времени $t_1 = 1$ с, учитывая равенства (4), получим:

$$V_e = |\omega| h = 0,5 \text{ м/с}, \quad a_e^\tau = \epsilon h = 1 \text{ м/с}^2, \quad a_e^n = \omega^2 h = 1 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Изображаем на рис. 4 векторы \bar{V}_e и \bar{a}_e^τ с учетом направлений ω и ϵ и вектор \bar{a}_e^n (направлен к оси вращения).

3.Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором \bar{V}_e и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 60° , то численно в момент времени $t_1 = 1$ с [см. равенства (3)и(4)]

$$a_c = 2|V_r| \cdot |\omega| \sin 60^\circ = 2 \frac{\pi}{4} 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,72 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Направление \bar{a}_c найдем, спроецировав вектор \bar{V}_r на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как и вектор \bar{a}_e^τ), и повернув затем эту проекцию в сторону ω , т.е. по ходу часовой стрелки, на 90° . Иначе направление \bar{a}_c можно найти, учтя, что $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{V}_r)$. Изображаем вектор \bar{a}_c на рис. 4.

Теперь можно вычислить значения V_M и a_M .

4. Определение V_M . Так как $\bar{V}_M = \bar{V}_r + \bar{V}_e$, а векторы \bar{V} и \bar{V}_e взаимно перпендикулярны (см. рис. 4), то в момент времени $t_1 = 1$ с

$$V_M = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0,5)^2} = 0,93 \text{ м/с}.$$

5. Определение a_M . По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_M = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c. \quad (7)$$

Для определения a_M проведем координатные оси M_{1xyz} (см. рис. 4) и вычислим проекции вектора \vec{a}_M на эти оси. Учтем при этом, что векторы \vec{a}_e и \vec{a}_c лежат на проведенной оси x , а векторы \vec{a}_r^τ , \vec{a}_r^n и \vec{a}_e^n расположены в плоскости дуги ADB , т.е. в плоскости M_{1yz} (см. рис. 4). Тогда, проецируя обе части равенства (7) на координатные оси и учитывая одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1 = 1$ с:

$$a_{Mx} = a_e^\tau + a_c = 1 + 2,72 = 3,72 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{My} = a_e^n + a_r^n \cos 60^\circ - |a_r^\tau| \cos 30^\circ = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,71 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Mz} = -|a_r^\tau| \cos 60^\circ - a_r^n \cos 30^\circ = -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right) = -1,59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение a_M в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2 + a_{Mz}^2} = 4,1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $V_M = 0,93 \text{ м/с}$; $a_M = 4,1 \text{ м/с}^2$.