МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИВАНОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ТЕКСТИЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

Кафедра теоретической механики
и сопротивления материалов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

"КИНЕМАТИКА"

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников всех специальностей

Иваново 2001

Содержание заданий, выбор вариантов, порядок выполнения работ, пояснения к тексту задач.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. 1.4 - это рис.4 к задаче 1 и т.д. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-ой строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шрифта, а номер условия в таблице - по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Чертеж к задаче выполняется с учетом условий решаемого варианта; он должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин нужно обязательно. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т.п.) и подробно излагать весь ход расчетов. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

К работе, высылаемой на повторную проверку (если она выполнена в другой тетради), должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы; в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдении масштаба, в тексте задач специально не оговаривается, что все нити (веревки, оси) являются нерастяжимыми и невесомыми. Следует также иметь ввиду, что некоторые из заданных в условиях задачи величины (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту, т.е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после ее текста под рубрикой "Указания"; затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера разъяснить ход решения, но воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями; в конце должны быть даны ответы.

В методических указаниях представлены варианты заданий и примеры их выполнения для студентов-заочников механических и технологических специальностей по разделу “Кинематика”.

При составлении данного издания были использованы "Методические указания к расчетно–проектировочным работам по теоретической механике для студентов-заочников" под редакцией проф. С. М. Тарга.

Составители: канд. техн. наук, доц. Н. Ф. Калабин,
д-р техн. наук, проф. Н. И. Смирнов.
Научный редактор канд. техн. наук, доц. Е. В. Горбунова.
Редактор Т. В. Фёдорова
Корректор Т. В. Белова

ЛР № 020306 от 28.11.96. Подписано в печать 17.07.2001.
Формат 1/16 60x84. Бумага писчая. Плоская печать.
Усл. печ. л. 1,16. Уч.-изд. л. 1,11. Тираж 75 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел Ивановской
государственной текстильной академии
Участок оперативной полиграфии ИГТА
153000 г. Иваново, пр. Ф. Энгельса, 21

Рабочая программа

Введение в кинематику. Предмет кинематики. Пространство и время в классической механике. Относительность механического движения. Система отсчета. Задачи кинематики.

Кинематика точки. Векторный способ задания движения точки. Траектория точки. Скорость точки как производная её радиуса-вектора по времени. Ускорение точки как производная ее вектора скорости по времени.

Координатный способ задания движения точки (в прямоугольных декартовых координатах). Определение скорости и ускорения точки по их проекциям на координатные оси.

Естественный способ задания движения точки. Естественный трехгранник. Алгебраическая величина скорости точки. Определение ускорения точки по его проекциям на оси естественного трехгранника; касательное и нормальное ускорения точки. Равномерное и равнопеременное криволинейные движения точки; законы этих движений.

Кинематика

Поступательное движение. Поступательное движение твердого тела. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек твердого тела при поступательном движении.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (вращательное движение). Уравнение (закон) вращательного движения твердого тела. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела. Законы равномерного и равнопеременного вращений. Скорость и ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Векторы угловой скорости и углового ускорения тела. Выражение скорости точки вращающегося тела и её касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в её плоскости. Уравнения движения плоской фигуры. Разложение движения плоской фигуры на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Независимость угловой скорости и углового ускорения фигуры от выбора полюса. Определение скорости любой точки плоской фигуры как геометрической суммы скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса. Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры (тела). Мгновенный центр скоростей. Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью мгновенного центра скоростей. Определения ускорения любой точки плоской фигуры как геометрической суммы ускорения полюса и ускорения этой точки при вращательном движении фигуры вокруг полюса. Понятие о мгновенном центре ускорений.

Сложное движение точки и твердого тела (составное движение). Абсолютное и относительное движения точки, переносное движение. Относительная, переносная и абсолютная скорости и относительное, переносное и абсолютное ускорения точки. Теорема о сложении скоростей. Теорема Кориолиса о сложении ускорений. Модуль и направление кориолисова ускорения. Случай поступательного переносного движения.

Сложное движение твердого тела. Сложение поступательных движений. Сложение мгновенных вращений твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей. Пара мгновенных вращений. Кинематический винт. Мгновенная винтовая ось.

Задача 1(К1а, К1б)

Точка В движется в плоскости xy (рис. 1.0 - 1.9, табл.1; траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1 = 1с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость x'- $f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$ дана в таблице 1.

Указания. Задача 1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1=1с. В некоторых вариантах задачи при вычислении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Таблица 1

Номер условия	$y = f_2(t)$			$S = f(t)$
	рис. 0 – 2	рис. 3 – 6	рис. 7 – 9	
0	$12\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2t^2+2$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)-2$	$4\cos(\frac{\pi}{6}t)$
1	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$8\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$6\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$2\sin(\frac{\pi}{3}t)$
2	$-3\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	$(2+t)^2$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$6t-2t^2$
3	$9\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2t^3$	$10\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$-2\sin(\frac{\pi}{6}t)$
4	$3\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$2\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$-4\cos^2(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{3}t)$
5	$10\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$2-3t^2$	$12\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-3\sin(\frac{\pi}{3}t)$
6	$6\sin^2(\frac{\pi}{6}t)$	$2\sin(\frac{\pi}{4}t)$	$-3\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$3t^2-10t$
7	$-2\sin(\frac{\pi}{6}t)-2$	$(t+1)^3$	$-8\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-2\cos(\frac{\pi}{3}t)$
8	$9\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$2-t^3$	$9\cos(\frac{\pi}{6}t)$	$3\sin(\frac{\pi}{6}t)$
9	$-8\sin(\frac{\pi}{6}t)$	$4\cos(\frac{\pi}{4}t)$	$-6\cos(\frac{\pi}{3}t)$	$-2\cos(\frac{\pi}{6}t)$

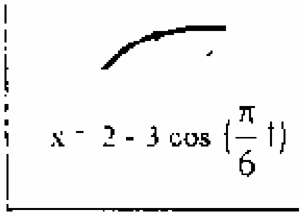


Рис. 1.0

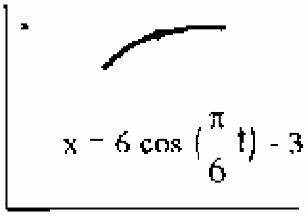


Рис. 1.1

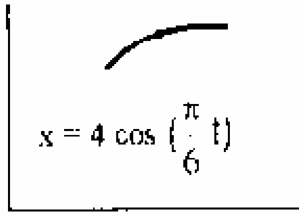


Рис. 1.2

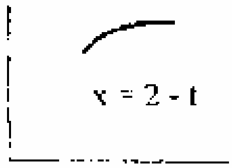


Рис. 1.3

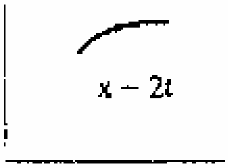


Рис. 1.4

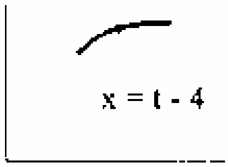


Рис. 1.5

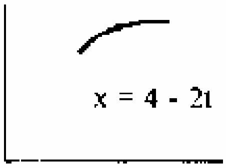


Рис. 1.6

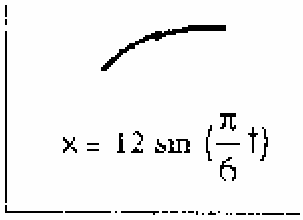


Рис. 1.7

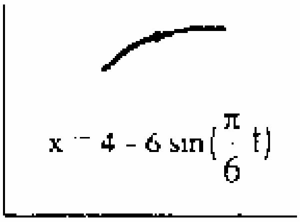


Рис. 1.8

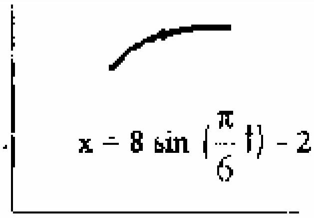


Рис. 1.9

Пример К1а. Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\cos(\frac{\pi}{4}t) + 3; \qquad\qquad y = 2\sin(\frac{\pi}{8}t) - 1$$

(x,y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени $t_1 = 1$ (с) найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos(\frac{\pi}{4}t) = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{8}t). \tag{1}$$

Из уравнения движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos(\frac{\pi}{4}t) = \frac{3-x}{2}, \qquad\qquad \sin(\frac{\pi}{8}t) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно, $\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}$.

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. К1а):

$$x = (y+1)^2 + 1. \tag{2}$$

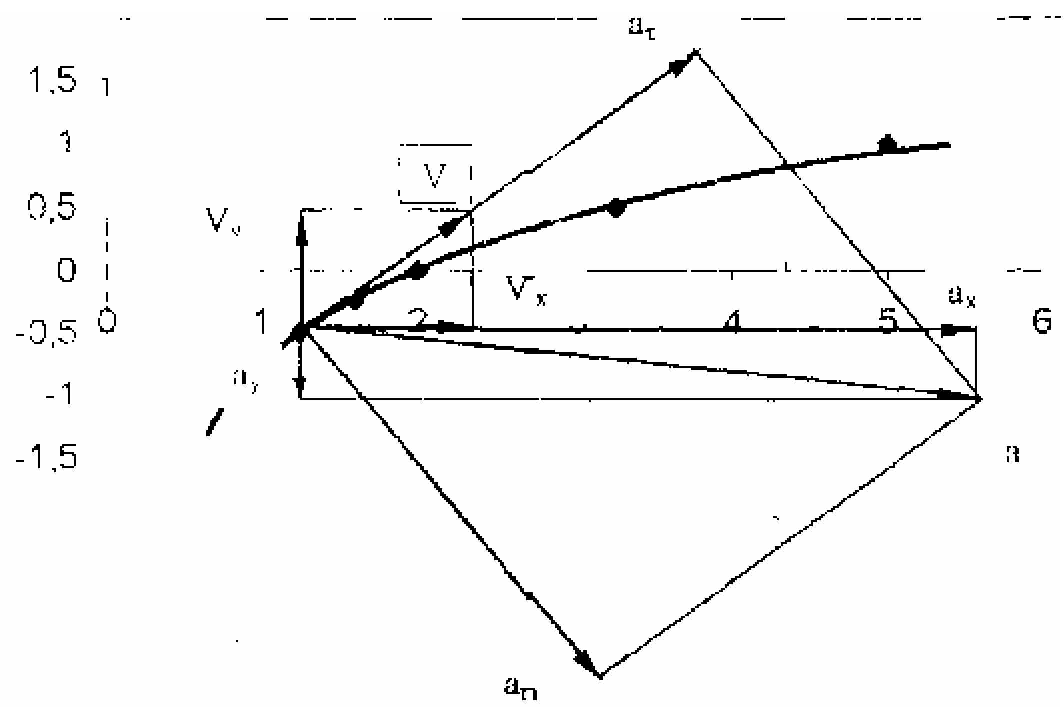


Рис. К1а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}t); \qquad V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos(\frac{\pi}{8}t); \qquad V = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2}}$$

и при t =1c $V_{1x} = 1{,}11$см/с, $V_{1y} = 0{,}73$см/с, $V_1 = 1{,}33 см/с$. (3)

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos(\frac{\pi}{4}t); \qquad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin(\frac{\pi}{8}t) : a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}$$

и при $t = 1c$ $a_{1x} = 0{,}87 см/с^2$, $a_{1y} = -0{,}12 см/с^2$, $a_1 = 0{,}88 см/с^2$. (4)

4 Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство:

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 .$$

Получаем: $2V\frac{dV}{dt} = 2V_x\frac{dV_x}{dt} + 2V_y \cdot \frac{dV_y}{dt}$ и $a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$. (5)

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем, что при $t = 1c$ $a_{1\tau} = 0{,}66 см/с^2$.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a^2{}_\tau}$. Подставив сюда найденные число-вые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t = 1c$ $a_{1n} = 0{,}58 см/с^2$.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = \dfrac{V^2}{a_n}$. Подставляя сюда числовые значения V и a_n, найдем, что при t = 1c ρ_1 = 3,05 см.

Ответ: V = 1,33 см/с, a_1 = 0,88 см/c^2, $a_{1\tau}$ = 0,66 см/c^2, a_{1n} = 0,58 см/c^2, ρ = 3,05 см.

Пример К1б

Точка движется по дуге окружности радиуса R = 2 м по закону $s = 2\sin(\frac{\pi}{4}t)$ (s- в метрах, t – в секундах), где s = AM (рис. К1б). Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1c$.

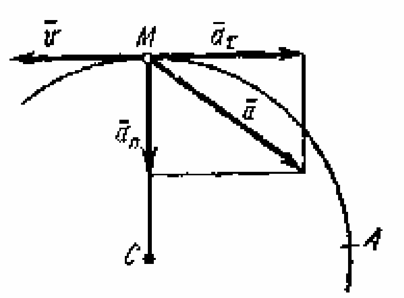


Рис. К1б

Решение. Определяем скорость точки

$$V = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{4}t).$$

При $t_1 = 1c$ получим $V_1 = \pi\sqrt{2}/4 = 1{,}11 м/c$.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим :

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin(\frac{\pi}{4}t),$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{R}.$$

При $t_1 = 1c$ получим, учтя, что $R = 2 м$:

$$a_{1\tau} = -\pi^2\sqrt{2}/16 = 0{,}87 м/c^2,\ a_{1n} = V_1^2/R = \pi^2/16 = 0{,}62 м/c^2 .$$

Тогда ускорение точки при $t_1 = 1c$ будет

$$a_1 = \sqrt{a^2{}_{1\tau} + a_{1n}{}^2} = \pi^2\sqrt{3}/16 = 1{,}07 м/c^2 .$$

Задача 2 (К2)

Механизм состоит из ступенчатых колес 1-3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. 2.0 - 2.9, табл. 2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 – r_1 = 2см, R_1= 4 см, у колеса 2 - r_2 = 6 см, R_2 = 8 см, у колеса 3 - r_3 =12 см, R_3 = 16 см. На ободьях колес расположены точки A, B и C.

В столбце "Дано" таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(f)$-закон вращения колеса 1, $S_4(t)$ - закон движения рейки 4, $\omega_2(t)$-закон изменения угловой скорости колеса 2, $V_5(t)$ -закон изменения скорости груза 5 и т.д. (везде φ выражено в радианах, S- в сантиметрах, t- в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для S_4, S_5 и V_4, V_5 -вниз.

Определить в момент времени t_1=2 с указанные в таблице в столбце "Найти" скорости (V - линейные, ω - угловые) и ускорения (a-линейные, ε -угловые) соответству-ющих точек или тел.

Указания. Задача 2 - на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы, при этом считается, что ремень по ободу колес не скользит.

Таблица 2

Номер условия	Дано	Найти	
		Скорости	Ускорения
0	$S_4 = 4(7t - t^2)$	V_B , V_C	ε_2 , a_A , a_5
1	$V_5 = 2(t^2 - 3)$	V_A , V_C	ε_3 , a_B , a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	V_4 , ω_2	ε_2 , a_C , a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	V_5 , ω_3	ε_2 , a_A , a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	V_4 , ω_1	ε_1 , a_B , a_4
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	V_5 , V_B	ε_2 , a_C , a_4
6	$\varphi_2 = 2(t^2 - 3t)$	V_4 , ω_1	ε_1 , a_C , a_5
7	$V_4 = 3t^2 - 8$	V_A , ω_3	ε_3 , a_B , a_5
8	$S_5 = 2t^2 - 5t$	V_4 , ω_2	ε_1 , a_C , a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	V_5 , V_B	ε_2 , a_A , a_4

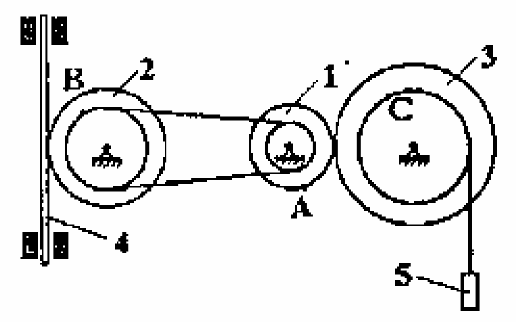


Рис.2.0

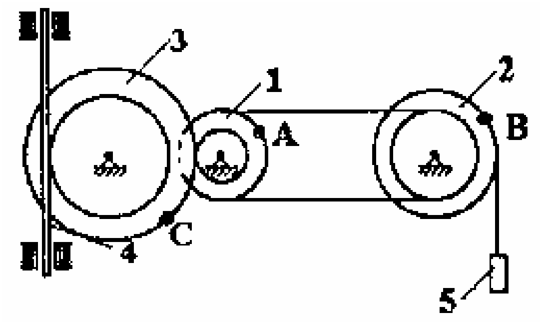


Рис.2.1

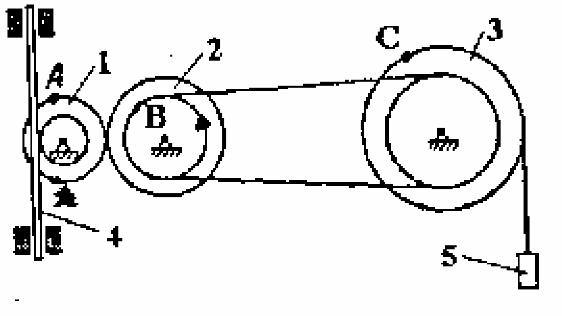


Рис.2.2

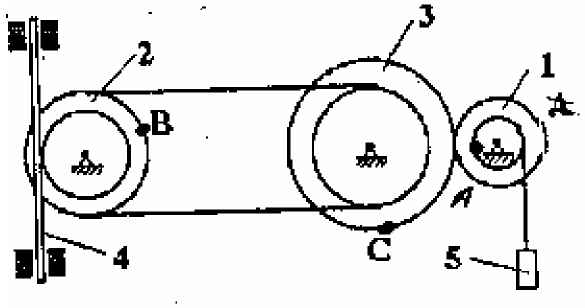


Рис.2.3

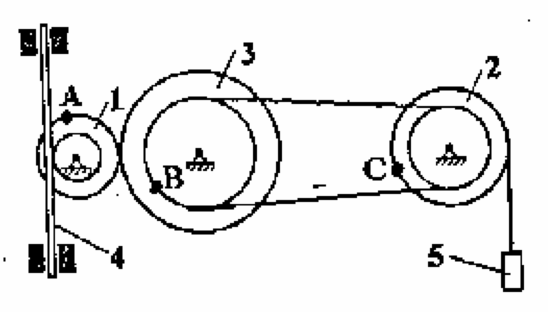


Рис.2.4

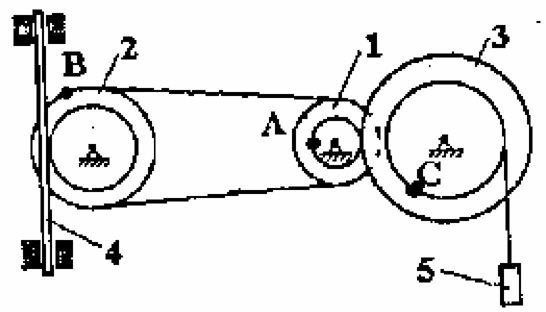


Рис.2.5

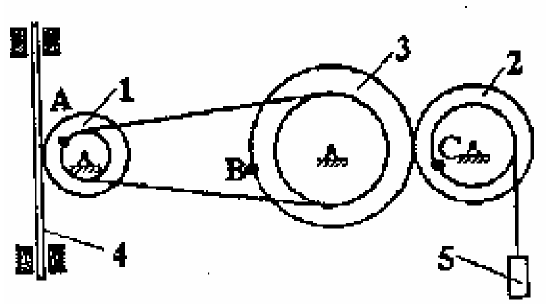


Рис.2.6

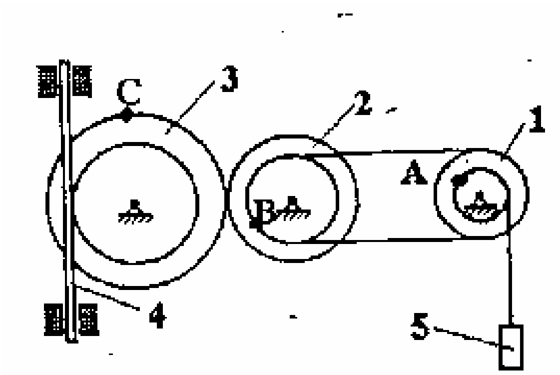


Рис.2.7

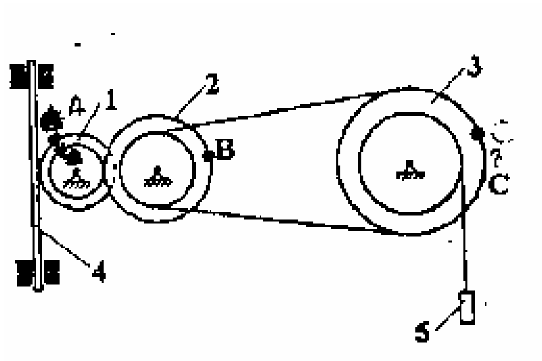


Рис.2.8

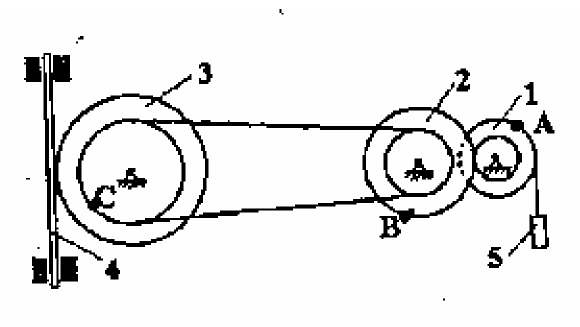


Рис.2.9

Пример 2. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3, скрепленное с валом радиуса r_3, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 2). Рейка движется по закону $S_1 = f(t)$.

Дано: R_2=6 см, r_2=4 см, R_3=8 см, r_3=3 см, $S_1= 3t^3$ (S - в сантиметрах, t - в секундах), A - точка обода колеса 3, t_1=3 с. Определить: ω_3, V4, ε_3, a_A в момент времени $t = t_1$.

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_1), через V_1, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_1), через U_1.

1. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$V_1=S_1=9t^2 . \tag{1}$$

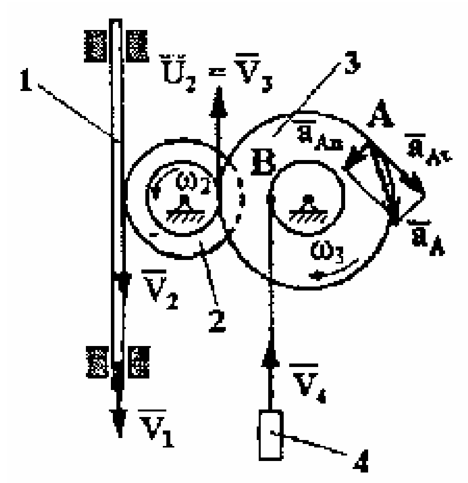


Рис. 2

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $V_2=V_1$ или $\omega_2 R_2 =V_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $U_2=V_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим:

$$\omega_2=\frac{V_1}{R_2}=\frac{3}{2}t^2,\ \omega_3=\frac{r_2}{R_3}\omega_2=\frac{3}{4}t^2 . \tag{2}$$

Тогда для момента времени t_1 = 3 с получим ω_3 = 6,75 c^{-1}.

2. Определяем V_4. Так как $V_4 = V_B= \omega_3 r_3$, то при t_1=3с V_4= 20,25 см/с.

3. Определяем ε_3. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 =\omega_3$ = 1,5t.

Тогда при t_1 = 3с ε_3= 4,5 c^{-2}.

4. Определяем a_A. Для точки A $\bar{a} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$, где численно $a_A^\tau = R_3\ \varepsilon_3$, $a_A^n = R_3\omega^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 с имеем a_A^τ = 36 см/c^2, a_A^n = 364,5 см/c^2

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = 366{,}3 \text{ см/с}^2,$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис.2.

Ответ : $\omega_3 = 6{,}75c^{-1}$, $V_4 = 20{,}25$ см / с, $\varepsilon_3 = 4{,}5c^{-2}$, $a_A = 366{,}3$см/c^2 .

Задача 3 (К3)

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B или E (рис. 3.0 - 3.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползунов B и E (рис. 3.8 , 3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня AB. Длины стержней равны соответственно: l_1 = 0,4 м , $l_2 = 1{,}3$ м, $l_3 = 1{,}2$ м, l_4=0,6 м. Положение механизма определяется углами $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в таблице 3а (для рис. 3.0 – 3.4) или в таблице 3б (для рис. 3.5 – 3.9); при этом в таблице 3а ω_1 и ω_4 - величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: по ходу или против хода часовой стрелки (например, угол у на рис. 3.8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 3.9 - против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере 3 (см. рис. 3,б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость $\overline{V}_B$ и ускорение $\overline{a}_B$ - от точки B к точке b (на рис. 3.5-3.9).

Указания. Задача 3- на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При её решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) к каждому звену механизма в отдельности.

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}^{\tau}_{BA} + \overline{a}^{n}_{AB}$, где A - точка, ускорение которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка A движется по дуге окружности, то $\overline{a}_A = \overline{a}^{\tau}_A + \overline{a}^{n}_A$); B – точка, ускорение которой нужно определить (если точка B движется по дуге окружности радиуса l, то $\overline{a}_B = \overline{a}^{\tau}_B + \overline{a}^{n}_B$, где численно $a^n_B = V^2_B / l$, входящая сюда скорость V_B определяется так же, как и скорости других точек механизма).

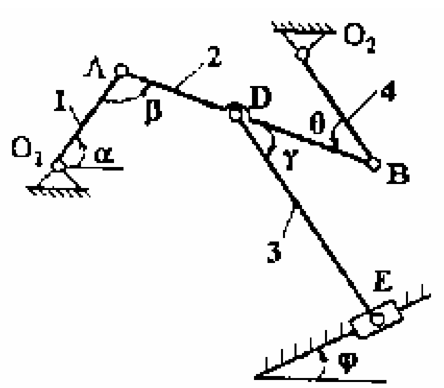


Рис.3.0

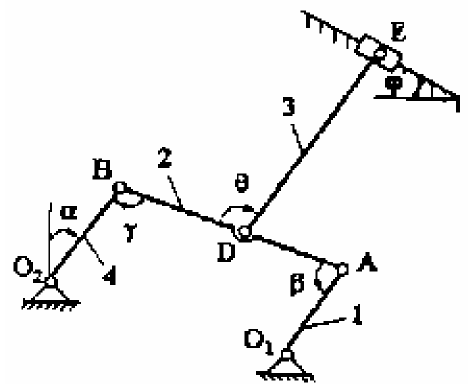
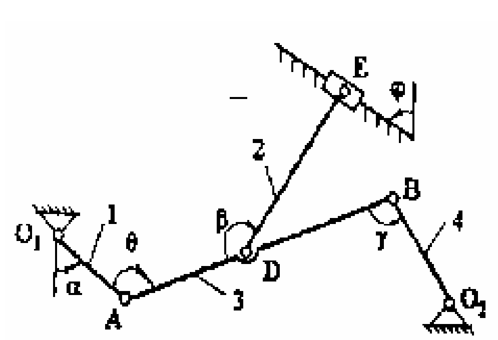


Рис.3.1



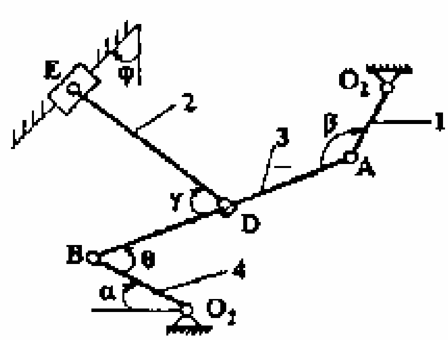
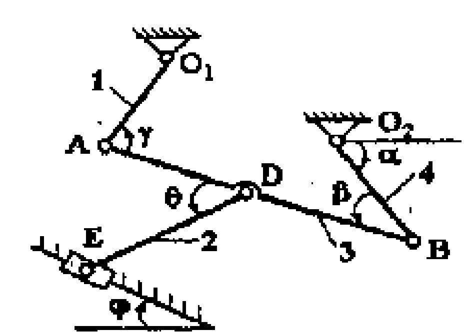


Рис.3.2

Рис.3.3



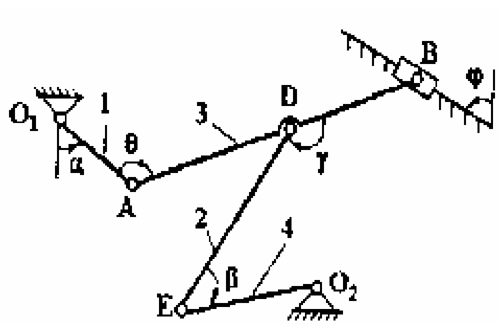
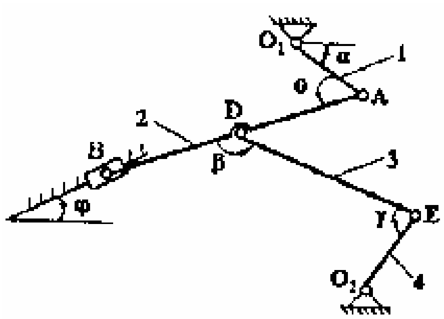


Рис.3.4

Рис.3.5



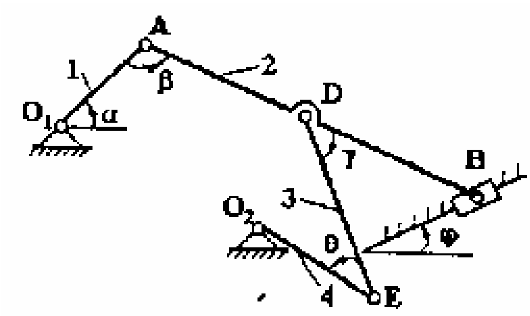
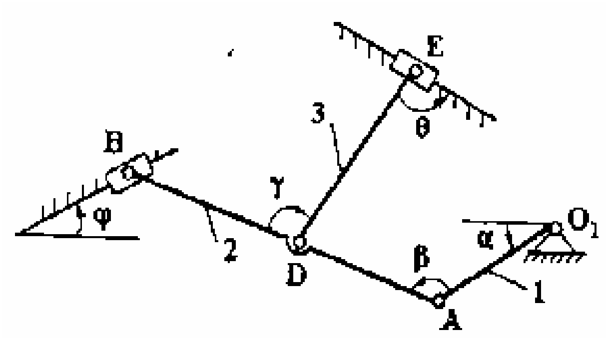


Рис.3.6

Рис.3.7



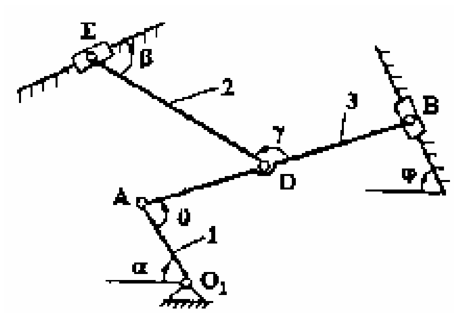


Рис.3.8

Рис.3.9

Таблица 3а (к рис. 3.0 - 3.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ω_4, 1/с	V точек	ω Звена	a точек	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	-	B.E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	-	4	A,E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	-	B,E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	-	5	A,E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	-	D,E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	-	6	A,E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	-	B,E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	-	2	A,E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	-	D,E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	-	8	A,E	DE	A	AB

Таблица 3б (к рис. 3.5 - 3.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	ω_1, 1/с	ε_1, 1/с^2	V_B, м/с	a_B, м/с^2	V Точек	ω Звена	a точки	ε Звена
0	120	30	30	90	150	2	4	-	-	B,E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	-	-	4	6	A,E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	-	-	B,E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	-	-	6	8	A,E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	-	-	B,E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	-	-	8	10	D,E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	-	-	B,E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	-	-	2	5	A.E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	-	-	B,E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	-	-	5	4	D,E	AB	A	AB

Пример 3. Механизм (рис. 3,а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

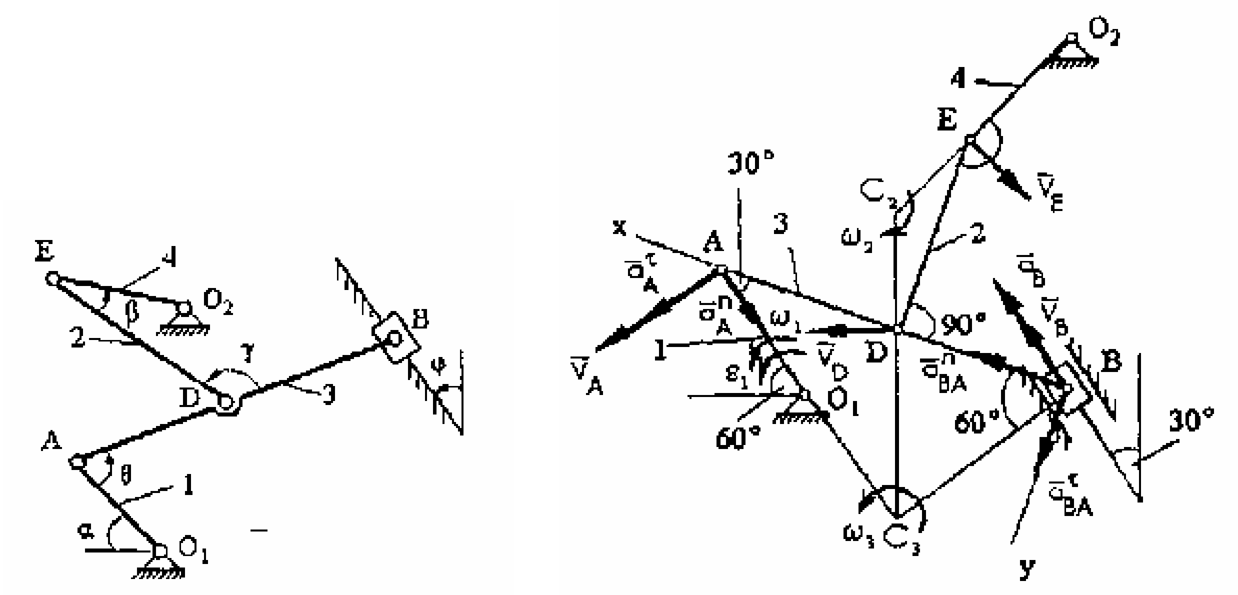
Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, AD = DB, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}2$м, $l_4 = 1{,}4$ м, $\omega = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления ω_1 и ε_1- против хода часовой стрелки).

Определить: $V_{\mathbf{B}}$, V_E , ω_2, a_B, ε_3.

Решение. 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис.3,б).

2. Определяем $\bar{V}_B$. Точка В принадлежит стержню АВ. Чтобы найти $\bar{V}_B$, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{V}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1, можем определить $\bar{V}_A$; численно

$$V_A = \omega_1, l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \ \bar{V}_A \perp O_1A . \qquad (1)$$



а) б)

Рис.3

Направление $\overline{V}_B$ найдем, учитывая, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\overline{V}_A$ и направление $\overline{V}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\overline{V}_B$ (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$V_B \cos 30° = V_A \cos 60° \quad \text{и} \quad V_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \tag{2}$$

3. Определяем $\overline{V}_E$. Точка E принадлежит стержню DE. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\overline{V}_E$, надо сначала найти скорость точки D, принадлежащей одновременно стержню AB. Для этого, зная $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB; это точка C_3, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$, восстановленных из точек A и B (к $\overline{V}_A$ перпендикулярен стержень 1). По направлению вектора $\overline{V}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3. Вектор $\overline{V}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D, соединяющему точки D и C_3, и направлен в сторону поворота. Величину V_D найдем из пропорции

$$\frac{V_D}{C_3D} = \frac{V_B}{C_3B}. \tag{3}$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3E, заметим, что ΔAC_3B прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30° = 0{,}5\ AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$

$$V_D = V_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \qquad \overline{V}_D \perp C_3D. \tag{4}$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E, вращающемуся вокруг O_2, то $\overline{V}_E \perp O_3E$. Тогда, восстанавливая из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\overline{V}_E$ и $\overline{V}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE. По направлению вектора $\overline{V}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2. Вектор $\overline{V}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. 3,б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{V_E}{C_2E} = \frac{V_D}{C_2D}, \qquad V_E = V_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

4. Определяем ω_2. Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и

$$C_2D = \frac{l_2}{2\cos 30°} = 0{,}69 \text{ м}, \qquad \text{то} \qquad \omega_2 = \frac{V_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \qquad (6)$$

5. Определяем $\overline{a}_B$. Точка B принадлежит стержню AB. Чтобы найти $\overline{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B. По данным задачи можем определить $\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n}$, где численно

$$a_A^{\tau} = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2; \qquad a_A^{n} = \omega_1^2 l_1 = 16 \text{ м/с}^2. \qquad (7)$$

Вектор $\overline{a}_A^{n}$ направлен вдоль AO_1, а $\overline{a}_A^{\tau}$ - перпендикулярно AO_1; изображаем эти векторы на чертеже. Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\overline{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\overline{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\overline{V}_B$.

Для определения $\overline{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n} + \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\overline{a}_{BA}^{n}$ (вдоль BA от B к A) и $\overline{a}_{BA}^{\tau}$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $a_{BA}^{n} = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью настроенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{V_A}{C_3A} = \frac{V_A}{l_3 \cos 30°} = 0{,}66 \text{ с}^{-1} \quad \text{и} \quad a_{BA}^{n} = 0{,}61 \text{ м/с}_2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^{τ}; их можно найти, спроецировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B, спроецируем обе части равенства (8) на направление AB (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\overline{a}_{BA}^{\tau}$. Тогда получим

$$a_B \cos 30° = a_A^{\tau} \cos 60° - a_A^{n} \cos 30° + a_{BA}^{n}. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\overline{a}_B$ направлен, как показано на рис. 3,б.

6. Определяем ε_3. Чтобы найти ε_3, сначала определим a_{BA}^{τ}. Для этого обе части равенства (8) спроецируем на направление, перпендикулярное AB (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30° = a_A^{\tau} \sin 60° + a_{BA}^{\tau} + a_A^{n} \cdot \sin 30° + a_A^{n} \cdot \sin 30°. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^{\tau} = -3{,}58$ м/с^2. Знак указывает, что направление a_{BA}^{τ} противоположно показанному на рис. 3,б.

Теперь из равенства $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{\left|a_{BA}^{\tau}\right|}{l_3} = 2{,}56 \text{ c}^{-2}.$$

Ответ: V_B= 0,46 м/с; V_E=0,46 м/с; ω_2=0,67с2; a_B= 0,72 м/с^2; ε_3= 2,56 с$^{-2}$.

Задача 4(К4)

Прямоугольная пластина (рис. 4.0 - 4.4) или круглая пластина радиуса R = 60 см (рис. 4.5 - 4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi=f_1(t)$, заданному в таблице 4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 4.0, 4.1, 4.2, 4.5, 4.6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 4.3, 4.4, 4.7, 4.8, 4.9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 4.0-4.4) или по окружности радиуса R (рис. 4.5-4.9) движется точка M; закон её относительного движения, т.е. зависимость $s=AM=f_2(t)$ (s выражено в сантиметрах, t - в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 4.0 – 4.4 и для рис. 4.5-4.9; там же даны размеры b и l. На рисунках точка M показана в положении, при котором s = AM > 0 (при s < 0 точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени t_1 = 1c.

Указания. Задача 4 - на сложное движение точки. Для её решения необходимо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени t_1= 1 с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче). В случаях, относящихся к рис. 4.5-4.9, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки M в момент времени t_1== 1 с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица 4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi=f_1(t)$	Для рис. 4.0-4.4		Для рис. 4.5-4.9	
		b,см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s=AM=f_2(t)$
0	$4(t^2-t)$	12	$50(3t-t^2)-64$	R	$(\pi R/3)(4t^2-2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2-t^4)-32$	4R/3	$(\pi R/2)(2t^2-t^3)$
2	$6t^3-12t^2$	10	$80(t^2-t)+40$	R	$(\pi R/3)(2t^2-1)$
3	t^2-2t^3	16	$60(t^4-3t^2)-56$	R	$(\pi R/6)(3t-t^2)$
4	$10t^2-5t^3$	8	$80(2t^2-t^3)-48$	R	$(\pi R/3)(t^3-2t)$
5	$2(t^2-t)$	20	$60(t^3-2t^2)$	R	$(\pi R/6)(t^3-2t)$
6	$5t-4t^2$	12	$40(t^2-3t)+32$	3R/4	$(\pi R/2)(t^3-2t^2)$
7	$15t-3t^3$	8	$60(t-t^3)+24$	R	$(\pi R/6)(t-5t^2)$
8	$2t^3-11t$	10	$50(t^3-t)-30$	R	$(\pi R/3)(3t^2-t)$
9	$6t^2-3t^3$	20	$40(t-2t^3)-40$	4R/3	$(\pi R/2)(t-2t^2)$

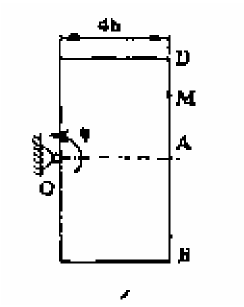


Рис. 4.0

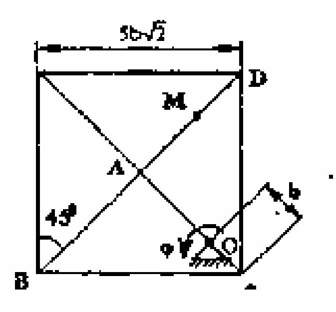


Рис. 4.1

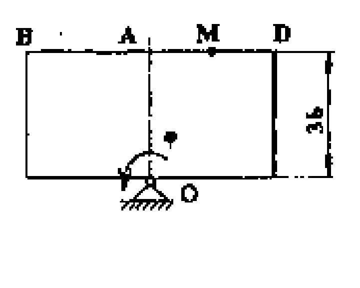


Рис.4.2

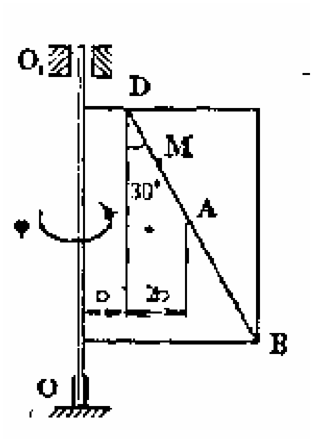


Рис.4.3

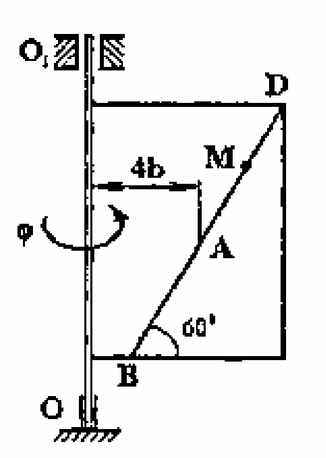


Рис.4.4

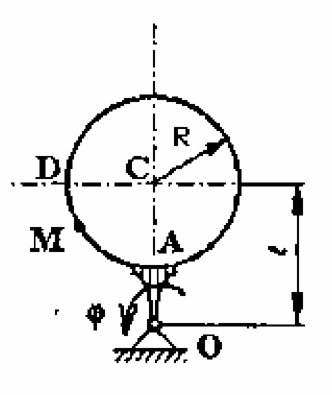


Рис.4.5

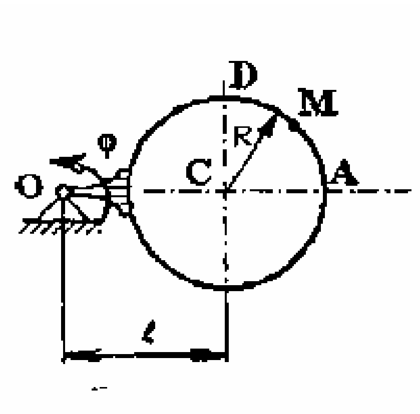


Рис. 4.6

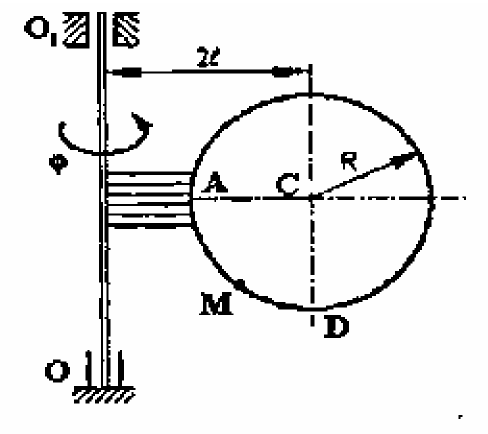


Рис. 4.7

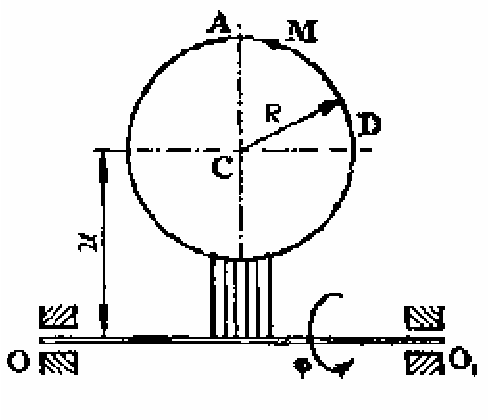


Рис. 4.8

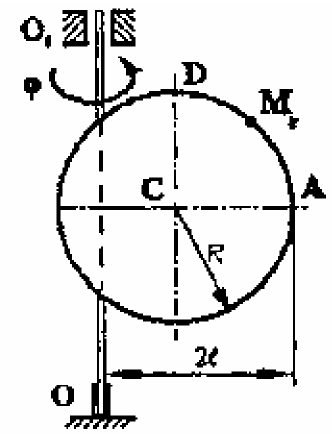


Рис. 4.9

Пример 4. Диск радиуса R (рис. 4) вращается вокруг вертикальной оси OO_1 по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис.4 дуговой стрелкой). По дуге большого круга ADB движется точка M по закону $s = AM = f_2(t)$; положительное направление отсчета s от A к D.

Дано: R = 0,5 м, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s = (\pi R/6)\,(7t - 2t^2)$ (<φ - в радианах, s - в метрах, t - в секундах). Определить: V_M и a_M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным (AB - относительная траектория точки), а вращение диска–перенос-ным движением. Тогда абсолютная скорость $\overline{V}_M$ и абсолютное ускорение $\overline{a}_M$ точки найдутся по формулам:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_r + \overline{V}_e, \qquad \overline{a}_M = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c, \tag{1}$$

где в свою очередь

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r^{\tau} + \overline{a}_r^{n}, \qquad \overline{a}_e = \overline{a}_e^{t} + \overline{a}_e^{n}.$$

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$S = AM = (\pi R/6)(7t - 2t^2). \tag{2}$$

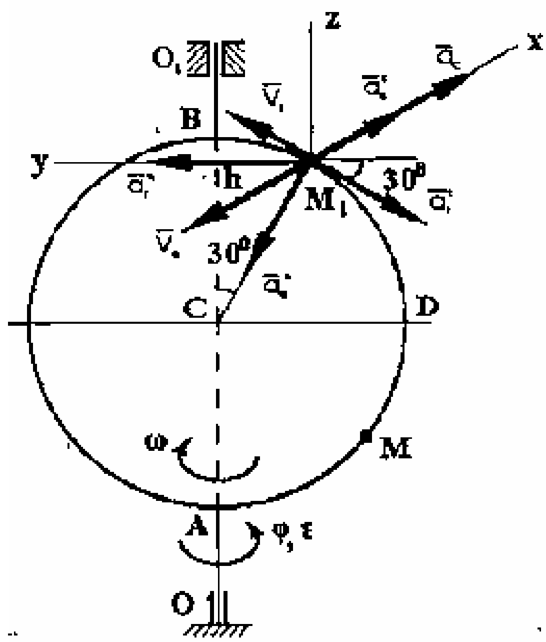


Рис.4

Сначала установим, где будет находиться точка М на дуге ADB в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) $t_1 = 1$ с, получим

$$S_1 = \frac{5}{6}\pi R. \quad \text{Тогда} \quad \angle ACM = \frac{S_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150° \qquad \text{или} \quad \angle BCM = 30°.$$

Изображаем на рис. 4 точку в положении, определяемом этим углом (точка M_1). Теперь находим числовые значения V_r, a_r^n, a_r^τ:

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi R}{6}(7-4t); \quad a_r^\tau = \dot{V}_r = -\frac{2}{3}\pi R; \qquad a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho_r} = \frac{V_r^2}{R},$$

где ρ_r, - радиус кривизны относительной траектории, т.е. дуги ADB. Для момента времени t_1= 1 с, учитывая, что R = 0,5 м, получим

$$V_r = \frac{\pi R}{6}\cdot 3 = \frac{\pi}{4}\ \text{м/с}; \quad a_r^\tau = -\frac{\pi}{3}\ \text{м/с}^2; \qquad a_r^n = \frac{\pi^2}{8}\ \text{м/с}^2. \tag{3}$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{V}_r$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $\bar{a}_r^\tau$ - в противоположную сторону; вектор $\bar{a}_r^n$ направлен к центру С дуги ADB. Изображаем все эти векторы на рис. 4.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^3 - 4t^2$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 6t^2 - 8t,\ \varepsilon = \dot{\omega} = 12t - 8 \quad \text{и при } t_1 = 1\text{ с} \quad \omega = -2\ \text{с}^{-1};\ \varepsilon = 4\ \text{с}^{-2}. \tag{4}$$

Знаки указывают, что при t_1=1с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рис.4 соответствующими дуговыми стрелками.

Для определения $\bar{V}_e$ и $\bar{a}_e$ находим сначала расстояние h точки M_1 от оси вращения. Получаем h = R sin 3O° = 0,25 м. Тогда в момент времени t_1 = 1 с, учитывая равенства (4), получим:

$$V_e = |\omega|h = 0{,}5\ \text{м/с}, \qquad a_e^\tau = \varepsilon h = 1\ \text{м/с}^2, \qquad a_e^n = \omega^2 h = 1\ \text{м/с}^2. \tag{5}$$

Изображаем на рис. 4 векторы $\bar{V}_e$ и $\bar{a}_e^\tau$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\bar{a}_e^n$ (направлен к оси вращения).

3.Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{V}_e$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 60°, то численно в момент времени t_1 = 1 с [см. равенства (3)и(4)]

$$a_c = 2|V_r|\cdot|\omega|\sin 60° = 2\frac{\pi}{4}2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}72\ \text{м/с}^2. \tag{6}$$

Направление $\bar{a}_c$ найдем, спроецировав вектор $\bar{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как и вектор $\bar{a}_e^\tau$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т.е. по ходу часовой стрелки, на 90°. Иначе направление $\bar{a}_c$ можно найти, учтя, что $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}\times\bar{V}_r)$. Изображаем вектор $\bar{a}_c$ на рис. 4.

Теперь можно вычислить значения V_M и a_M.

4. Определение V_M. Так как $\bar{V}_M = \bar{V}_r + \bar{V}_e$, а векторы $\bar{V}$ и $\bar{V}_e$ взаимно перпендикулярны (см. рис. 4), то в момент времени t_1 = 1 с

$$V_M = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}93\ \text{м/с}.$$

5. Определение a_M. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_M = \bar{a}_r^\tau + \bar{a}_r^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_e^n + \bar{a}_c. \tag{7}$$

Для определения a_M проведем координатные оси M_{1xyz} (см. рис. 4) и вычислим проекции вектора $\bar{a}_M$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}_e$ и $\bar{a}_c$ лежат на проведен-ной оси x, а векторы $\bar{a}_r^{\tau}$, $\bar{a}_r^{n}$ и $\bar{a}_e^{n}$ расположены в плоскости дуги ADB, т.е. в плоскости M_{1yz} (см. рис. 4). Тогда, проецируя обе части равенства (7) на координатные оси и учтя одновре-менно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени t_1 = 1 с:

$$a_{Mx} = a_e^{\tau} + a_c = 1+2{,}72 = 3{,}72 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{My} = a_e^n + a_r^n \cos 60° - \left|a_r^{\tau}\right| \cos 30° = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0{,}71 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Mz} = -\left|a_r^{\tau}\right| \cos 60° - a_r^n \cos 30° = -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\right) = -1{,}59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение a_M в момент времени t_1 = 1с:

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2 + a_{Mz}^2} = 4{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: V_M = 0,93 м/с; a_M= 4,1 м/с^2.