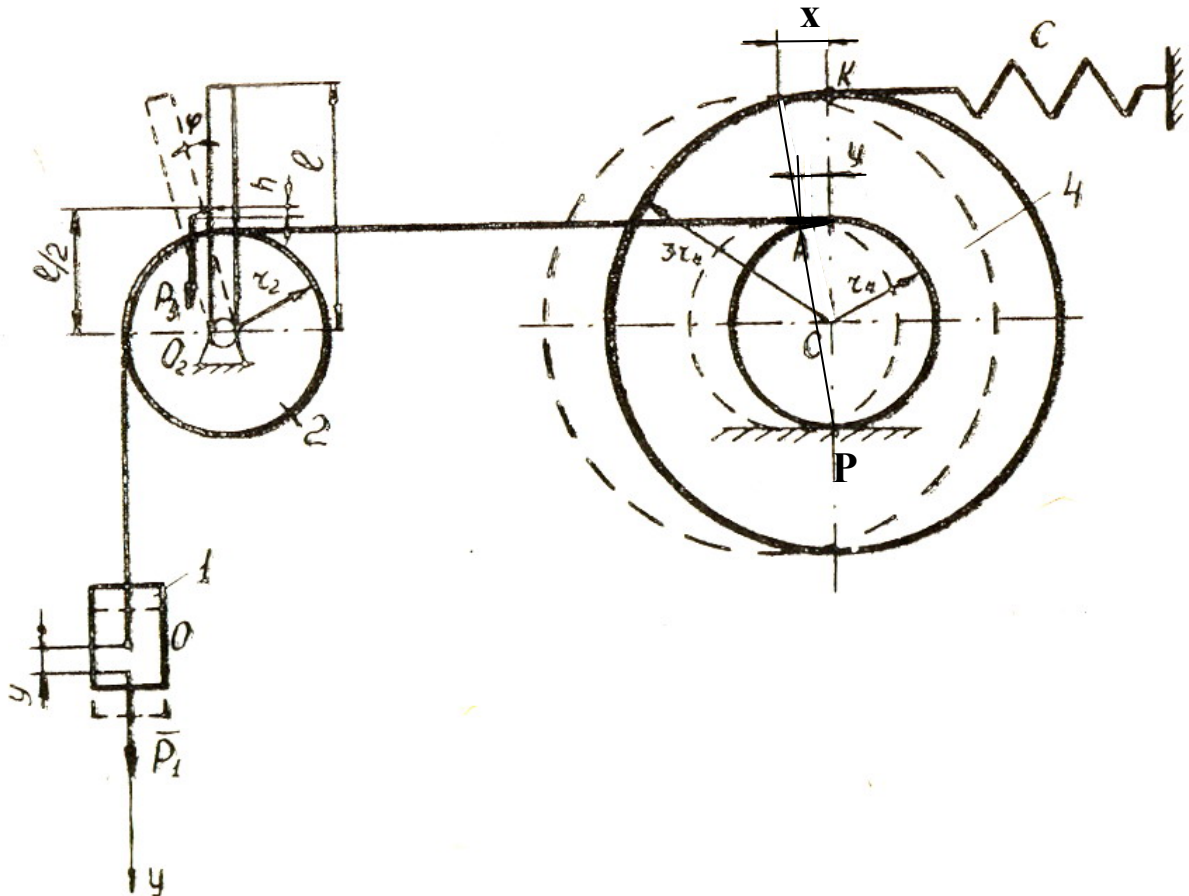


ПРИМЕР

выполнения РГР по теме

«Малые колебания механической системы с одной степенью свободы»



УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Механическая система состоит из 4-х абсолютно твердых тел: груза 1, блока 2, стержня 3, жестко связанного с блоком 2, и ступенчатого катка 4. Тела между собой соединены невесомыми нерастяжимыми нитями. Каток связан с основанием пружиной. При движении груза 1 по вертикали блок 2, представляющий собой сплошной однородный диск, вместе со стержнем 3 вращается вокруг неподвижной оси, а ступенчатый каток катится без скольжения по шероховатой горизонтальной плоскости. Даны массы тел m_1 , m_2 , m_3 , размеры l , r_2 , r_4 , радиус инерции катка ρ_4 , жесткость пружины c и начальные условия y_0, \dot{y}_0 .

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

$m_1=5$ кг, $m_2=2$ кг, $m_3=10$ кг, $m_4=4$ кг, $c=15$ кН/м, $\ell=1$ м,
 $r_2=0,5$ м, $r_4=0,3$ м, $\rho_4=0,6$ м, $y_0=0,05$ м, $\dot{y}_0=0,05$ м/с.

Сплошными линиями на чертеже изображено положение механической системы в положении равновесия, пунктирными – в отклоненном от равновесия состоянии.

ВОПРОСЫ ЗАДАНИЯ

1. Проверить условие устойчивости положения равновесия механической системы.
2. Вычислить статическую деформацию пружины в положении равновесия механической системы.
3. Определить частоту и период малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей.
4. Найти уравнение движения груза 1 $y=y(t)$, приняв за начало отсчета положение равновесия груза 1. Найти также амплитуду колебаний груза 1.

РЕШЕНИЕ

При переходе из отклоненного положения в положение равновесия и обратно:

- груз 1 движется поступательно;
- блок 2 и стержень 3 вращаются вокруг неподвижной оси;
- каток 4 совершает плоскопараллельное движение.

Механическая система имеет одну степень свободы, следовательно, для описания движения всех тел системы можно использовать одну обобщенную координату.

В качестве обобщенной координаты системы принимаем вертикальное смещение y груза 1 от положения равновесия, соответствующего статической деформации пружины.

Для составления дифференциального уравнения движения механической системы в обобщенных координатах воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода для случая консервативной системы (без сил сопротивления):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергии системы.

Определим потенциальную и кинетическую энергии системы. При этом, считая отклонения системы от положения равновесия малыми, кинетическую энергию T определим с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной скорости \dot{y} , а потенциальную энергию Π – с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты y .

Кинетическая энергия системы определяется суммой кинетических энергий тел 1,2,3 и 4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (2)$$

Для нахождения кинетической энергии как функции от обобщенной скорости \dot{y} необходимо составить выражения для кинематических связей тел системы.

Так скорость груза 1 определяется первой производной по времени от смещения y и равна обобщенной скорости:

$$V_1 = \dot{y} \quad (3)$$

Угловые скорости блока 2 и стержня 3 равны и определяются скоростью движения груза 1:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{V_1}{r_2}.$$

Окончательно:

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{\dot{y}}{r_2} \quad (4)$$

Угловая скорость катка 4 определяется скоростью движения точки А равной скорости движения ведомой нерастяжимой нити, и расстоянием до мгновенно неподвижной точки Р (М.Ц.С., или мгновенный центр скоростей) катка, находящейся в контакте с опорной поверхностью:

$$\omega_4 = \frac{V_A}{2r_4},$$

Учитывая очевидное равенство скоростей: $V_A = V_1 = \dot{y}$, получим:

$$\omega_4 = \frac{\dot{y}}{2r_4} \quad (5)$$

Скорость движения центра масс С катка 4 определим через угловую скорость его вращения и расстояние от М.Ц.С. до точки С:

$$V_C = \omega_4 \cdot r_4.$$

После подстановки выражения (5) получим:

$$V_C = \omega_4 \cdot r_4 = \frac{\dot{y}}{2r_4} \cdot r_4 = \frac{\dot{y}}{2} \quad (6)$$

Напишем выражение (2) для кинетической энергии системы, учитывая, что груз 1 движется поступательно, блок 2 и стержень 3 вращаются относительно оси, проходящей через точку O_2 , а каток 4 перемещается поступательно, т.е. его кинетическая энергия состоит из двух компонентов – поступательного, со скоростью движения центра масс, и вращательного относительно оси, проходящей через центр масс катка:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_C^2 + \frac{1}{2} J_{4C} \omega_4^2 \quad (7)$$

Используем формулы для моментов инерции сплошного блока 2 ($J_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$), однородного стержня 3 ($J_3 = \frac{1}{3} m_3 \ell^2$), ступенчатого катка 4 ($J_{4C} = m_4 \rho_4^2$). Тогда выражения (7) приобретет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_3 \ell^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_C^2 + \frac{1}{2} m_4 \rho_4^2 \omega_4^2 \quad (8)$$

После подстановки кинематических связей (3) - (6) в (8) и очевидных сокращений, получим:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_3 \frac{\ell^2}{r_2^2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_4 \frac{1}{4} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_4 \frac{\rho_4^2}{4r_4^2} \dot{y}^2,$$

или окончательно:

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2}{r_2^2} m_3 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\rho_4^2}{r_4^2} \right) m_4 \right) \dot{y}^2 = \frac{1}{2} a_0 \cdot \dot{y}^2, \quad (9)$$

Здесь введен коэффициент инерции a_0 , или **приведенная инертность** механической системы, равная:

$$a_0 = m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2}{r_2^2} m_3 + \frac{1}{4} \cdot \frac{r_4^2 + \rho_4^2}{r_4^2} m_4 \quad (10)$$

Определим потенциальную энергию системы как работу консервативных сил системы (сил тяжести и силы упругости) по перемещению системы из отклоненного положения, характеризующегося обобщенной координатой y , в равновесное положение, при котором $y=0$.

Потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести груза 1 ($P_1=m_1g$) и стержня 3 ($P_3=m_3g$) при указанном перемещении¹:

$$\Pi(m\vec{g}) = -m_1g \cdot y - m_3g \cdot h, \quad (11)$$

где h – вертикальное смещение центра тяжести стержня 3.

Величину h можно найти как разницу между высотой центра тяжести стержня относительно т. O_2 в равновесном и отклоненном состоянии:

$$h = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \cos \varphi = \frac{\ell}{2} (1 - \cos \varphi) \quad (12)$$

Раскладывая косинус в ряд Тейлора, получим:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \quad (13)$$

Ограничимся только двумя первыми членами в разложении, учитывая, что рассматриваются только малые колебания системы. Угол отклонения φ можно выразить через смещение y :

$$\varphi = \frac{y}{r_2} \quad (14)$$

Тогда после подстановки первых двух слагаемых из (13) в (12), с учетом (14) получим:

$$h = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2r_2^2} y^2 \quad (15)$$

Таким образом, выражение (11) приобретает вид:

¹ Силы тяжести блока и катка не входят в выражение для потенциальной энергии в силу того, что точки их приложения не перемещаются в вертикальном направлении

$$\Pi(m\vec{g}) = -m_1 g \cdot y - \frac{1}{2} m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2} y^2 \quad (16)$$

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении системы равна:

$$\Pi(\vec{F}_{\text{упр}}) = \frac{1}{2} c \lambda^2 - \frac{1}{2} c \lambda_{cm}^2, \quad (17)$$

где λ – растяжение пружины из своего недеформированного состояния, λ_{cm} – растяжение пружины до положения, соответствующего равновесному состоянию системы.

Найдем **статическое смещение пружины**.

Оно соответствует условию равновесия катка 4 под действием двух моментов сил – момента силы натяжения ведущей нити, равной весу тела 1, и момента силы упругости пружины при ее статическом растяжении:

$$M_P(m_1\vec{g}) + M_P(\vec{F}_{\text{упр}}) = 0; \quad \text{или} \quad m_1 g \cdot 2r_4 - c \lambda_{cm} (r_4 + 3r_4) = 0, \quad (18)$$

откуда:

$$\lambda_{cm} = \frac{m_1 g}{2c} \quad (19)$$

Обозначим добавочное смещение пружины (перемещение т. К пружины) символом x : $x = \lambda - \lambda_{cm}$. Из чертежа задачи легко увидеть, что $\frac{x}{y} = \frac{PK}{PA} = \frac{r_4 + 3r_4}{2r_4}$, откуда:

$$x = 2y \quad (20)$$

В этом случае выражение (17) преобразуется в следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{F}_{\text{упр}}) &= \frac{1}{2} c (x + \lambda_{cm})^2 - \frac{1}{2} c \lambda_{cm}^2 = \frac{1}{2} c (2y + \lambda_{cm})^2 - \frac{1}{2} c \lambda_{cm}^2 = \\ &= \frac{1}{2} 4cy^2 + 2c\lambda_{cm}y + \frac{1}{2} c \lambda_{cm}^2 - \frac{1}{2} c \lambda_{cm}^2 = \frac{1}{2} 4cy^2 + 2c\lambda_{cm}y \end{aligned} \quad (21)$$

Полная потенциальная энергия системы, согласно (16) и (19), будет:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \Pi(m\vec{g}) + \Pi(\vec{F}_{\text{упр}}) = -m_1 g \cdot y - \frac{1}{2} m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2} y^2 + \frac{1}{2} 4cy^2 + 2c\lambda_{cm}y = \\
&= \frac{1}{2} (4c - m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2}) y^2 + (2c\lambda_{cm} - m_1 g) y = \frac{1}{2} c_0 y^2 + (2c\lambda_{cm} - m_1 g) y,
\end{aligned} \tag{22}$$

здесь введен **обобщенный коэффициент жесткости** c_0 , равный:

$$c_0 = 4c - m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2} \tag{23}$$

Как следует из (19), выражение в скобках в последнем слагаемом (22) равно нулю, откуда потенциальная энергия системы приобретет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_0 y^2 \tag{24}$$

Исследуем устойчивость положения равновесия.

По теореме Лагранжа – Дирихле состояние равновесия консервативной системы является устойчивым, если потенциальная энергия системы – минимальна. Математически это означает, что в этом положении:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big|_0 = 0; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \Big|_0 > 0. \tag{25}$$

По первому условию, продифференцировав (20), получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big|_0 = c_0 y \tag{26}$$

равенство в (25) будет выполняться только при $y = 0$, т.е. при указанном на чертеже положении системы.

Второе условие в (24) – условие строго минимума. Продифференцировав выражение (25) еще раз, получим:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \Big|_0 = c_0 = 4c - m_3 g \cdot \frac{\ell}{2r_2^2},$$

Подставим численные значения в соответствии с исходными данными задания:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \right|_0 = 4 \cdot 15000 - 10 \cdot 9,8 \frac{1}{2 \cdot (0,5)^2} = 60000 - 196 = 59804 \text{ Н / м}$$

Как видно из полученной числовой оценки, это – положительная величина. Следовательно, **механическая система в изображенном на рисунке положении будет находиться в устойчивом равновесии.**

Подставим потенциальную (24) и кинетическую (9) энергии в уравнение Лагранжа второго рода (1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} (a_0 \dot{y}) = a_0 \ddot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = c_0 y,$$

тогда уравнение приобретет вид:

$$a_0 \ddot{y} + c_0 y = 0 \quad (27)$$

Пронормируем уравнение (27), разделив его на коэффициент a_0 перед старшей производной:

$$\ddot{y} + \frac{c_0}{a_0} y = 0, \quad \text{или в окончательном виде: } \ddot{y} + k^2 y = 0 \quad (28)$$

Уравнение (28) – носит название дифференциального уравнения свободных колебаний механической системы. Решение уравнения – гармоническая функция вида: $y = A \cos(kt + \alpha)$, либо

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (29)$$

Величина

$$k = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}} \quad (30)$$

называется круговой частотой колебаний, а константы интегрирования A , α , либо C_1 , C_2 определяются из начальных условий движения.

Скорость груза 1 определим, продифференцировав, например, выражение (29) по времени:

$$V_1 = \dot{y} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt \quad (31)$$

Найдем константы интегрирования из начальных условий, подставив в (29) и (31) значение времени ($t_0=0$):

$$\begin{cases} y(0) = y_0 = C_1; \\ V_1(0) = \dot{y}_0 = kC_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{\dot{y}_0}{k} = \dot{y}_0 \sqrt{\frac{a_0}{c_0}} \quad (32)$$

В числах:

$$\text{- из (10): } a_0 = 5 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1^2}{0,5^2} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot \frac{0,3^2 + 0,6^2}{0,3^2} \cdot 4 = 24,33 \text{ кг};$$

$$\text{- из (23): } c_0 = 4 \cdot 15000 - 10 \cdot 9,8 \frac{1}{2 \cdot (0,5)^2} = 60000 - 196 = 59804 \text{ Н/м};$$

$$\text{- из (30): } k = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}} = \sqrt{\frac{59804}{24,33}} = 49,58 \text{ рад/с};$$

$$\text{- из (32): } C_1 = 0,05 \text{ м}, \quad C_2 = \frac{0,05}{49,58} \approx 0,001 \text{ м}$$

С учетом (30) уравнение движения механической системы (29) для обобщенной координаты y приобретет вид:

$$y = 0,05 \cos 49,58 \cdot t + 0,001 \sin 49,58 \cdot t \quad (33)$$

Определим амплитуду колебаний:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{0,05^2 + 0,001^2} \approx 0,05 \text{ м}$$

Циклическую частоту ν и период T колебаний механической системы найдем по следующим формулам:

$$\nu = \frac{k}{2\pi} = \frac{49,58}{2 \cdot 3,14} \approx 7,9 \text{ Гц}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{7,9} = 0,127 \text{ с}$$

