

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

для заочников

КИНЕМАТИКА.

СТАТИКА

Учебное пособие (книга 1)

ПЕНЗА 2012

УДК 531. 07.

Т

Теоретическая механика для заочников. Книга 1. Кинематика. Статика: Учебное пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2012. – // с.: ил., табл., библиогр. назв.

Составители: Смогунов В.В., Вдовикина О.А., Митрохина Н.Ю., Кузьмин А.В.

Под общей редакцией Смогунова В.В.

Учебное пособие составлено с учетом опыта преподавания курса «Теоретическая механика» в Пензенском государственном университете согласно Государственным образовательным стандартам.

Представлен теоретический материал, контрольные задания и примеры решения задач по разделам «Кинематика» и «Статика».

Учебное пособие предназначено для студентов машиностроительных, приборостроительных специальностей и специальностей сервиса оборудования, изучающих теоретическую механику.

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор

Шеин А.И. заведующий кафедрой «Строительная и теоретическая механика» Пензенского государственного университета архитектуры и строительства

Доктор технических наук, профессор

Мачнев В.А. профессор кафедры «Основы конструирования механизмов и машин» Пензенской государственной сельскохозяйственной академии

УДК 531. 07.

Издательство Пензенского университета, 2012г.

Содержание		<u>ПРОГРАММА КУРСА</u>	<u>4</u>	<u>КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ</u>	<u>5</u>	<u>Введение</u>
<u>7</u>	<u>КИНЕМАТИКА</u>	<u>10</u>	<u>Задача К1 а</u>	<u>16</u>	<u>Задача К1 б</u>	<u>16</u>
				<u>16</u>	<u>Задача К2</u>	<u>25</u>
				<u>25</u>	<u>Задача К3</u>	<u>30</u>
				<u>30</u>	<u>Задача К4</u>	<u>41</u>
				<u>41</u>	<u>Тест</u>	
	<u>по разделу "Кинематика".</u>	<u>52</u>	<u>СТАТИКА</u>	<u>56</u>	<u>Задача С1</u>	<u>61</u>
				<u>61</u>	<u>Задача С2</u>	<u>66</u>
				<u>66</u>	<u>Тест по разделу «Статика»</u>	
		<u>73</u>	<u>Справочные данные</u>	<u>78</u>	<u>Литература</u>	<u>81</u>

ПРОГРАММА КУРСА

Кинематика. Предмет кинематики. Векторный способ задания движения точки. Естественный способ задания движения точки. Понятие об абсолютно твердом теле. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Плоское движение твердого тела и движение плоской фигуры в ее плоскости. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки или сферическое движение. Общий случай движения свободного твердого тела. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твердого тела.

Статика. Предмет статики. Понятие о силовом поле. Система сил, аналитические условия равновесия произвольной системы сил. Центр тяжести твердого тела и его координаты.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЙ, ВЫБОР ВАРИАНТОВ,
ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ,
ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют одно контрольное задание (работу) из 1 книги учебного пособия.

Задание включает задачи К1 – К4 по кинематике и задачи С1, С2 по статике.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. К1.4 – это рис. 4 к задаче К1 и т. д. (в тексте задачи при повторных ссылках на рисунок пишется просто рис. 4 и т.д.). Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце (или в 1-й строке) таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней: например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условие № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность. На первой странице тетради записываются: номер работы, номера решаемых задач.

Решение каждой задачи обязательно начинать на развороте тетради (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано, и что требуется определить (текст задачи не переписывается). Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи: на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям. В результате, в целом ряде задач, чертеж получается более простой, чем общий.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) *и подробно излагать весь ход расчетов*. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения.

Если тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела 1; P_2, l_2, r_2 – тела 2 и т. д. Аналогично, в кинематике и динамике v_B, a_B означают скорость и ускорение точки B ; v_C, a_C – точки C ; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1; ω_2, ε_2 – тела 2 и т. д.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайтесь внимание только на относящиеся *к вашему варианту*, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Введение

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются общие законы механического движения и механического взаимодействия материальных тел. Теоретическая механика относится к ряду естественных наук, т.е. наук о природе. Это наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и возникающих при этом взаимодействиях между телами.

В отличие от физики теоретическая механика изучает количественную сторону связи механического движения с механическим взаимодействием, оставляя в стороне их физическую качественную природу.

Теоретическая механика – фундамент развития технических наук. На основных законах и принципах теоретической механики базируется большинство инженерных дисциплин – сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др. (рис. 1).

Методы исследования, применяемые в теоретической механике, используют при изучении динамических систем, которые описывают явления, выходящие за рамки механических движений.

Разделы «Теоретической механики»

В теоретической механике можно выделить три раздела:

- кинематика;
- статика;
- динамика.

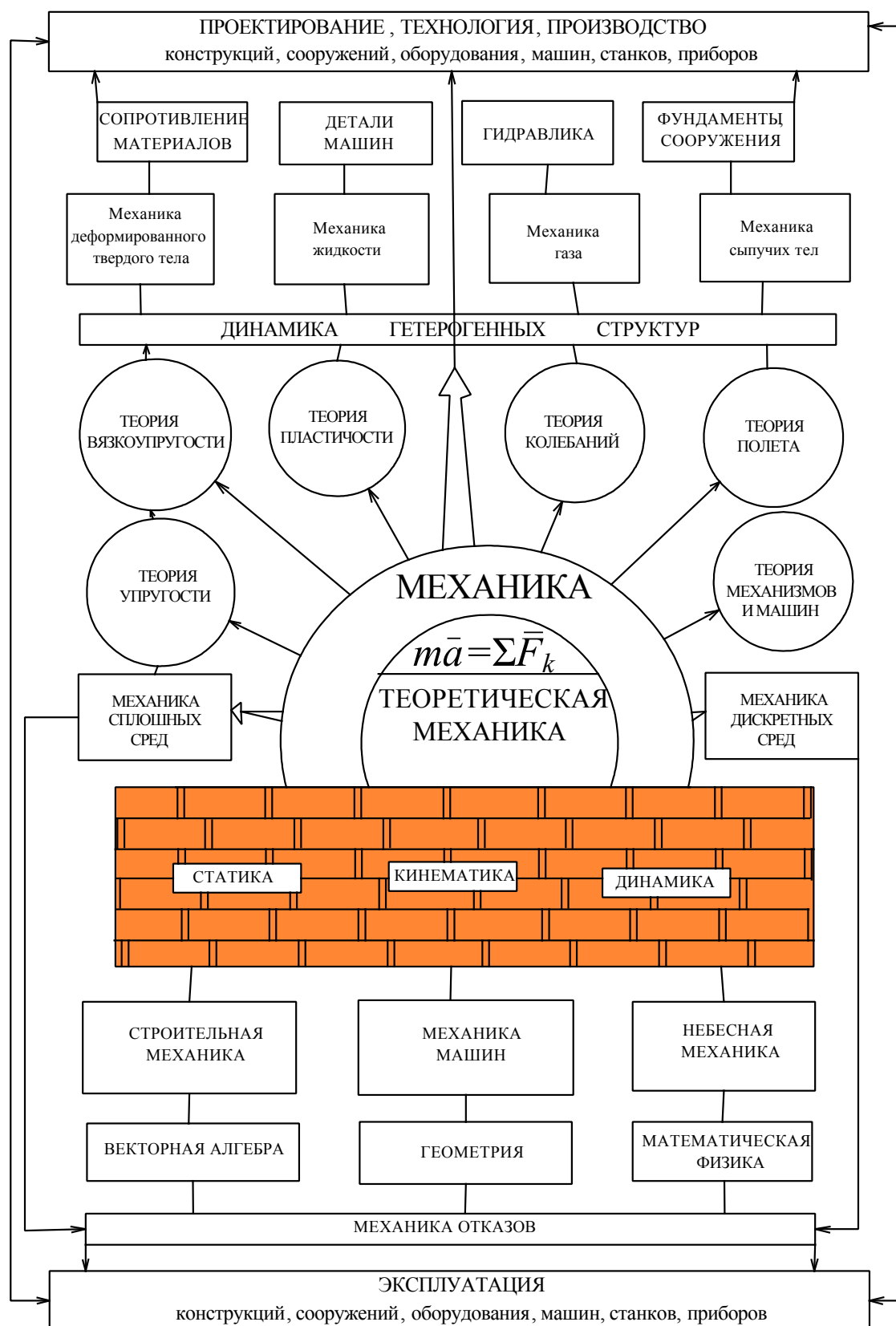


Рис. 1

Кинематика – раздел «Теоретической механики», в котором изучается

движение материальных тел в пространстве с геометрической точки зрения, без учета сил, вызвавших это движение.

Статика – раздел «Теоретической механики», в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Равновесие материальных тел является частным случаем движения.

Динамика – раздел «Теоретической механики», в котором изучается движение тел в пространстве в зависимости от действующих на них сил (движение тел под действием сил).

Модели теоретической механики

1. **Материальная точка** – тело, обладающее массой и не обладающее размерами (размерами тела в данных условиях можно пренебречь).

2. **Система материальных точек** – совокупность материальных точек, в которой положение и движение каждой точки зависит от положения и движения других точек этой системы.

3. **Абсолютно твердое тело** – система материальных точек, в которой расстояния между любыми точками не изменяются при воздействии любых сил.

4. **Механическая система** – совокупность абсолютно твердых тел или абсолютно твердых тел и материальных точек.

5. **Деформируемое тело** (упругое тело).

КИНЕМАТИКА

Предмет кинематики – изучение геометрических свойств движения тел без учета их массы и действующих сил.

Пространство рассматривается как трехмерное евклидово пространство, а время протекает одинаково во всех рассматриваемых системах отсчета.

Относительность механического движения связана с выбором **системы отсчета** – системы координат для определения положения движущегося тела, связанной с тем телом, по отношению к которому изучается движение. Кроме системы координат система отсчета включает в себя время.

Задачи кинематики: установление математических способов задания движения тел и определение основных кинематических величин: траекторий, скоростей, ускорений и т.п.

Кинематика точки

Векторный способ задания движения точки состоит в задании радиус-вектора точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Траектория точки – геометрическое место концов радиус-вектора.

Скорость точки – первая производная радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Ускорение точки – первая производная скорости точки по времени или вторая производная радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Координатный способ задания движения точки в прямоугольных декартовых координатах состоит в задании уравнений движения:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$$

Определение *траектории* точки состоит в исключении времени из уравнения движения и нахождении траектории в виде, дающем зависимость между ее координатами $y = f(x)$.

Определение *скорости* и *ускорения* точки по их проекциям на прямоугольные декартовы координатные оси:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x},$$

$$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Естественный способ задания движения точки состоит в выдаче:

- 1) траектории точки;
- 2) начала отсчета;
- 3) закона движения точки по траектории $s = f(t)$ (s – дуговая координата).

Естественный трехгранник составляется из соприкасающейся, нормальной и спрямляющей плоскостей с осями – единичными векторами: $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$.

Алгебраическая величина *скорости* точки: $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$.

Определение *ускорения* точки по его проекциям на оси естественного трехгранника:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}$ – касательное ускорение точки, характеризующее изменение вектора скорости точки по величине,

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$ – нормальное ускорение точки, характеризующее изменение вектора скорости точки по направлению (ρ – радиус кривизны траектории в данной

точке).

Кинематика твердого тела

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе.

Теорема. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в любой момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Вращательным движением твердого тела называется такое движение, при котором остаются неподвижными все точки тела, лежащие на некоторой прямой, называемой осью вращения. При этом все остальные точки тела описывают окружности с центрами на оси вращения.

Уравнение вращательного движения абсолютно твердого тела:

$$\varphi = f(t) \quad (\varphi - \text{угловая координата, рад}).$$

Угловая скорость и угловое ускорение абсолютно твердого тела:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Вектор угловой скорости абсолютно твердого тела направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. Вектор углового ускорения при ускоренном движении направлен по оси вращения в ту же сторону, что и вектор угловой скорости, а при замедленном движении – в противоположном направлении.

Выражение скорости точки вращающегося тела и ее касательного и нормального ускорений в виде векторных произведений:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad \vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

В виде алгебраических значений:

$$v = \omega r; \quad a_\tau = \varepsilon r; \quad a_n = \omega v \quad \text{или} \quad a_n = \omega^2 r.$$

Плоскопараллельное движение абсолютно твердого тела (движение плоской фигуры в ее плоскости) – это такое движение, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

Движение плоской фигуры в ее плоскости раскладывается на поступательное вместе с полюсом и вращательное вокруг полюса. Вращательная часть движения от выбора полюса не зависит, отсюда следует независимость угловой скорости и углового ускорения фигуры от выбора полюса.

Уравнения движения плоской фигуры:

$$x_A = f_1(t), y_A = f_2(t), \varphi = f_3(t).$$

Скорость любой точки плоской фигуры определяется как геометрическая сумма скорости полюса и скорости этой точки при вращении фигуры вокруг полюса:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_{MA}; \quad v_{MA} = \omega \cdot MA.$$

Теорема о проекциях скоростей двух точек фигуры: проекции скоростей двух точек абсолютно твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны друг другу и одинаково направлены:

$$v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta.$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС) – это точка (P), неизменно связанная с телом, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС основывается на двух свойствах:

1) скорость любой точки тела, лежащей в сечении S , равна скорости при ее

вращении вокруг МЦС;

2) скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до МЦС, т.е.

$$v_A = \omega \cdot PA, \quad v_B = \omega \cdot PB, \quad \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}.$$

Для определения МЦС надо знать только направления скоростей $\vec{v}_A, \vec{v}_B$, для определения v_B – модуль и направление $\vec{v}_A$ и направление $\vec{v}_B$; угловая скорость тела в каждый момент времени равна отношению скорости какой-нибудь точки к

ее расстоянию до МЦС $\omega = \frac{v_B}{PB}.$

Ускорение любой точки плоской фигуры определяется как геометрическая сумма ускорения полюса и ускорения этой точки при вращении фигуры вокруг полюса

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA},$$

где $\vec{a}_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$;

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n \text{ – при движении полюса по прямой;}$$

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A^{\tau} + \vec{a}_A^n + \vec{a}_{MA}^{\tau} + \vec{a}_{MA}^n \text{ – при движении полюса по окружности.}$$

Мгновенный центр ускорений – это точка (Q), ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Ускорения любых других точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра ускорений:

$$\frac{a_M}{QM} = \frac{a_A}{QA} = \dots = \frac{a_N}{QN}.$$

Сложное движение точки и твердого тела

Абсолютное и относительное движение точки, переносное движение:

абсолютным, или *сложным*, называется движение точки по отношению к неподвижной системе координат, выбранной за основную; движение точки по

отношению к подвижной системе координат называется *относительным*; под *переносным* движением понимается движение подвижной системы координат относительно неподвижной. Соответственно называются скорости и ускорения в этих движениях.

Теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_{\text{отн}}, \quad v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{отн}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2v_{\text{отн}}v_{\text{пер}}\cos\alpha}.$$

Теорема Кориолиса о сложении ускорений: абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений: относительного (характеризующего изменение относительной скорости точки в относительном движении), переносного (характеризующего изменение переносной скорости точки в переносном движении) и кориолисова (характеризующего изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении):

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Модуль кориолисова ускорения:

$$a_{\text{кор}} = 2|\vec{\omega}_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}}| \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_{\text{отн}}).$$

Направление кориолисова ускорения находится поворотом вектора относительной скорости $\vec{v}_{\text{отн}}$ на 90° в сторону переносного вращения.

В случае поступательного переносного движения кориолисово ускорение обращается в нуль.

Сложное движение твердого тела

Сложение поступательных движений: результирующее движение также является поступательным со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Сложение мгновенных вращений абсолютно твердого тела вокруг пересекающихся и параллельных осей:

1. Сложение движений вокруг двух осей, пересекающихся в точке O : результирующее движение тела можно представить как мгновенное вращение вокруг оси OC , проходящей через точку O , с угловой скоростью равной геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$;

2. Сложение вращений вокруг двух параллельных осей:

а) $\omega = \omega_1 + \omega_2$ при вращении в одну сторону;

б) $\omega = \omega_1 - \omega_2$ при вращении в разные стороны ($\omega_1 \neq \omega_2$).

Пара мгновенных вращений ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) эквивалентна поступательному движению со скоростью $v = \omega \cdot AB$ (AB – расстояние между осями).

Кинематический винт – это сложное движение, состоящее из вращательного вокруг оси AO и поступательного параллельно оси AO .

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

Задача К1 а

Точка B движется в плоскости xu (рис. К1.0...К1.9, табл. К1, траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки, для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки, а также её касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Зависимость $x=f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y = f_2(t)$, дана в табл. К1 (для рис. 0...2 в столбце 2, для рис. 3...6 в столбце 3, для рис. 7...9 в столбце 4). Номер рисунка выбирается по предпоследней цифре шифра, а номер условия в табл. К1 – по последней.

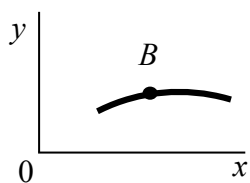
Задача К1 б

Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $s=f(t)$, заданному в табл. К1 в столбце 5 (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\cup}{AM}$ – расстояние точки от некоторого начала A , измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Изобразить на рисунке векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении M , а положительное направление отсчета s – от A к M .

Таблица К1

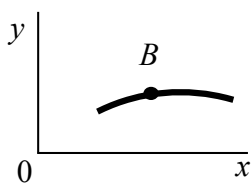
Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0–2	рис. 3–6	рис. 7–9	
1	2	3	4	5
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2 + 2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$

Номер условия	$y = f_2(t)$			$s = f(t)$
	рис. 0–2	рис. 3–6	рис. 7–9	
1	2	3	4	5
1	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$6t - 2t^2$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2$	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
5	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2 - 3t^2$	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3t^2 - 10t$
7	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(t+1)^3$	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$2 - t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$-2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$



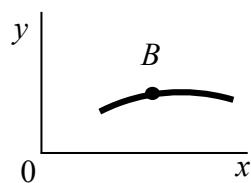
$$x = 6\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 3$$

Рис. К1.0



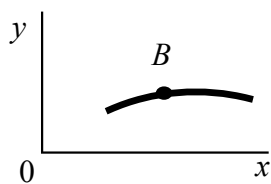
$$x = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.1



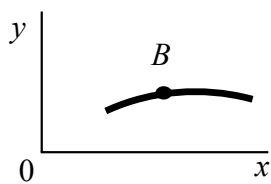
$$x = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.2



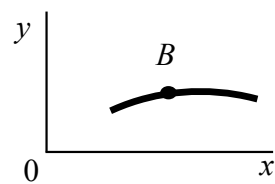
$$x = t - 4$$

Рис. К1.3



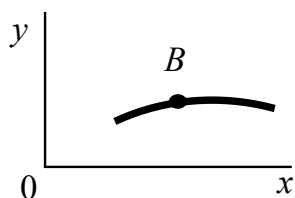
$$x = 4 - 2t$$

Рис. К1.4



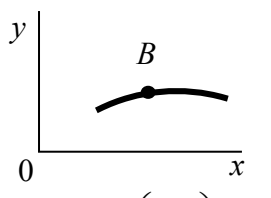
$$x = 2 - t$$

Рис. К1.5



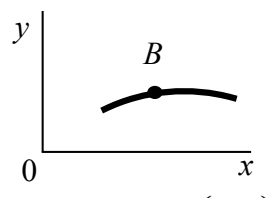
$$x = 2t$$

Рис. К1.6



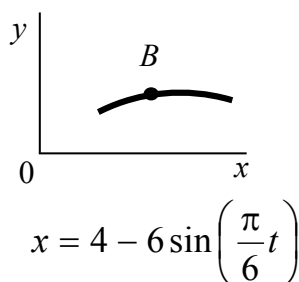
$$x = 8 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$$

Рис. К1.7



$$x = 12 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.8



$$x = 4 - 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Рис. К1.9

Указания. Задача К1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания ее движения. В задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени $t_1 = 1$ с.

В некоторых вариантах задачи К1а при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1; \quad \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha.$$

Пример K1.1 а. Дано: уравнения движения точки в плоскости $xу$:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить: уравнение траектории точки, для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t . Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \quad (1)$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. K1.1а):

$$x = (y+1)^2 + 1. \quad (2)$$

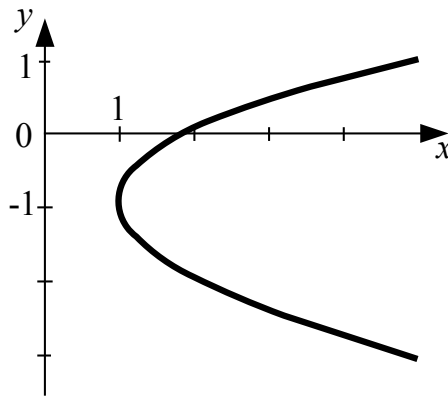


Рис. К1.1а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right), \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$v_{1x} = 1,11 \text{ см/с}, \quad v_{1y} = 0,73 \text{ см/с}, \quad v_1 = 1,33 \text{ см/с}. \quad (3)$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right), \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$a_{1x} = 0,87 \text{ см/с}^2; \quad a_{1y} = -0,12 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = 0,88 \text{ см/с}^2. \quad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени равенство

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2. \text{ Получим}$$

$$2v \frac{dv}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \quad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, находим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0,66$ см/с.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0,58$ см/с².

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n} , найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 3,05$ см.

Ответ: $v_1 = 1,33$ см/с, $a_1 = 0,88$ см/с², $a_{1\tau} = 0,66$ см/с², $a_{1n} = 0,58$ см/с², $\rho_1 = 3,05$ см.

Пример К1.2 а Дано: уравнения движения точки в плоскости xu :

$$x = 4 - 2t; \quad y = 2 \cos \frac{\pi t}{4} \quad (x, y - \text{в сантиметрах, } t - \text{в секундах}). \quad (1)$$

Определить: уравнение траектории точки, для момента времени $t_1 = 1$ с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t . Из первого уравнения (1) выразим параметр t :

$$t = \frac{4-x}{2} \quad \text{и подставим полученное значение во второе уравнение (1):}$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{4-x}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{8}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{8} + \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi x}{8}\right).$$

Учтя, что $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, а $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, получим окончательно уравнение траектории

(синусоиды, рис. К1.2а)

$$y = 2 \sin \frac{\pi x}{8}.$$

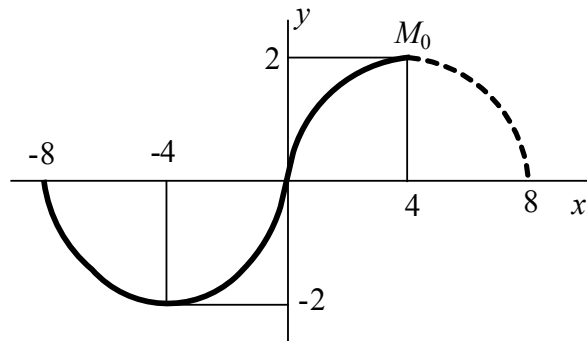


Рис. К1.2а

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x = \dot{x} = -2; \quad v_y = \dot{y} = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{4}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2};$$

и при $t_1 = 1$ с

$$v_{1x} = -2 \text{ см/с}, \quad v_{1y} = -1,11 \text{ см/с}, \quad v_1 = 2,29 \text{ см/с}. \quad (3)$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x = \dot{v}_x = 0, \quad a_y = \dot{v}_y = -\frac{\pi^2}{8} \cos \frac{\pi t}{4}; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$a_{1x} = 0; \quad a_{1y} = -0,87 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = 0,87 \text{ см/с}^2. \quad (4)$$

4. Касательное ускорение найдем по формуле

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \quad (5)$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, находим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0,42 \text{ см/с}$.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0,76$ см/с².

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2 / a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n} , найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 6,9$ см.

Ответ: $v_1 = 2,29$ см/с, $a_1 = 0,87$ см/с², $a_{1\tau} = 0,42$ см/с², $a_{1n} = 0,76$ см/с², $\rho_1 = 6,9$ см.

Пример_K1.1 б. При движении точки по дуге окружности радиуса $R = 2$ м уравнение пути имеет вид: $s = 6t - 2t^2$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\smile}{AM}$ (рис. К1 б).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

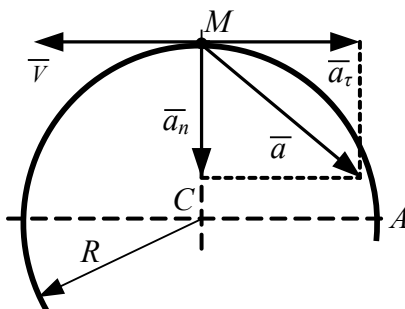


Рис. К1.1 б

Решение. Движение точки задано естественным способом. Скорость точки определим как первую производную от дуговой координаты по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = 6 - 4t. \text{ При } t_1 = 1 \text{ с получим } v_1 = 6 - 4 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}.$$

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -4 \text{ м/с}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}.$$

При $t_1=1$ с получим: $a_{1\tau} = -4 \text{ м/с}^2$, $a_{1n} = 2^2/2 = 2 \text{ м/с}^2$.

Тогда ускорение точки при $t_1=1$ с будет

$$a = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 4,47 \text{ м/с}^2.$$

Изобразить векторы $\bar{v}_1$ и $\bar{a}_\tau$ следует, учитывая знаки результатов дифференцирования ($v_1 > 0$, $a_{1\tau} < 0$), при этом направление касательной считать положительным в сторону возрастания дуговой координаты. Вектор $\bar{a}_n$ направлен к центру окружности.

Пример_K1.2_б. При движении точки по дуге окружности радиуса $R = 2$ м уравнение пути имеет вид: $s = 4 \cos \frac{\pi t}{3}$ (s – в метрах, t – в секундах), где $s = \overset{\cup}{AM}$ (рис. K1 б).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1=1$ с.

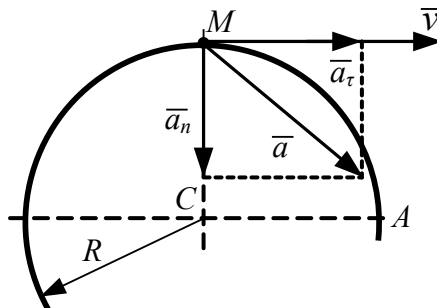


Рис. K1.2.б

Решение. Движение точки задано естественным способом. Скорость точки определим как первую производную от дуговой координаты по времени:

$$v = \frac{ds}{dt} = -\frac{4\pi}{3} \sin \frac{\pi t}{3}. \text{ При } t_1=1 \text{ с получим } v_1 = -3,65 \text{ м/с}.$$

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi^2}{9} \cos \frac{\pi t}{3}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}.$$

При $t_1=1$ с получим: $a_{1\tau} = -2,19 \text{ см/с}^2$, $a_{1n} = 6,66 \text{ см/с}^2$.

Тогда ускорение точки при $t_1=1$ с будет

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = 7,02 \text{ см/с}^2.$$

Изобразить векторы $\bar{v}_1$ и $\bar{a}_\tau$ следует, учитывая знаки результатов дифференцирования ($v_1 < 0$, $a_{1\tau} < 0$), при этом направление касательной считать положительным в сторону возрастания дуговой координаты. Вектор $\bar{a}_n$ направлен к центру окружности.

Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колёс $1...3$, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5 , привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0...К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса $1 - r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса $2 - r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса $3 - r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки A , B и C .

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ – закон вращения колеса 1 , $s_4(t)$ – закон движения рейки 4 , $\omega_2(t)$ – закон изменения угловой скорости колеса 2 , $v_5(t)$ – закон изменения скорости груза 5 и т.д. (везде φ выражено в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах). Положительное направление для φ и ω против хода часовой стрелки, для s_4 , s_5 и v_4 , v_5 – вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (v – линейные, ω – угловые) и ускорения (a – линейные, ε – угловые) соответствующих точек или тел (v_5 – скорость груза 5 и т.д.).

Указания. Задача К2 – на исследование вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободу каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Таблица К2

Номер условия	Дано	Найти	
		скорости	ускорения
0	$s_4 = 4(7t - t^2)$	v_B, v_C	ε_2, a_A, a_5
1	$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A, v_C	ε_3, a_B, a_4
2	$\varphi_1 = 2t^2 - 9$	v_4, ω_2	ε_2, a_C, a_5
3	$\omega_2 = 7t - 3t^2$	v_5, ω_3	ε_2, a_A, a_4
4	$\varphi_3 = 3t - t^2$	v_4, ω_1	ε_1, a_B, a_5
5	$\omega_1 = 5t - 2t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_C, a_4
6	$\dot{\varphi}_2 = 2(t^2 - 3t)$	v_4, ω_1	ε_1, a_C, a_5
7	$v_4 = 3t^2 - 8$	v_A, ω_3	ε_3, a_B, a_5
8	$s_5 = 2t^2 - 5t$	v_4, ω_2	ε_1, a_C, a_4
9	$\omega_3 = 8t - 3t^2$	v_5, v_B	ε_2, a_A, a_4

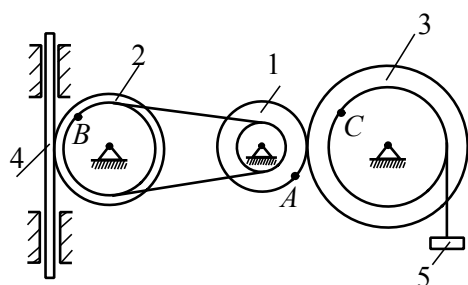


Рис. К2.0

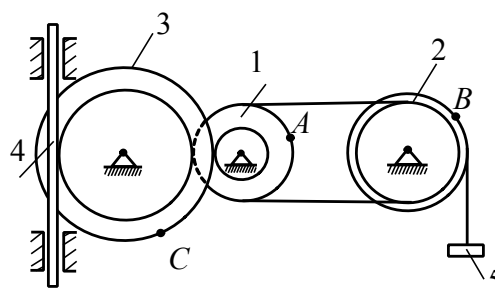


Рис. К2.1

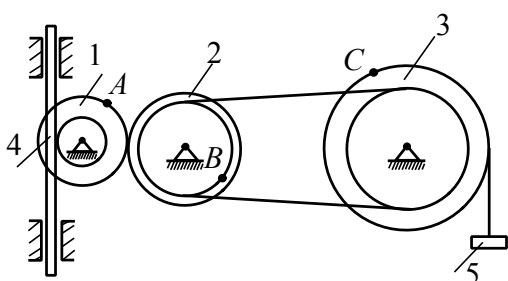


Рис. К2.2

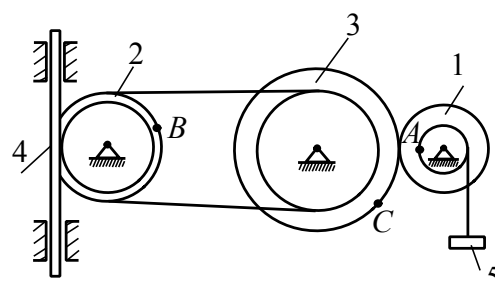


Рис. К2.3

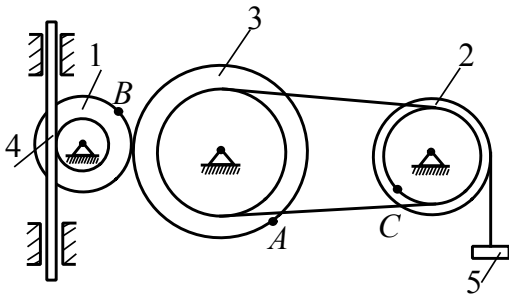


Рис. К2.4

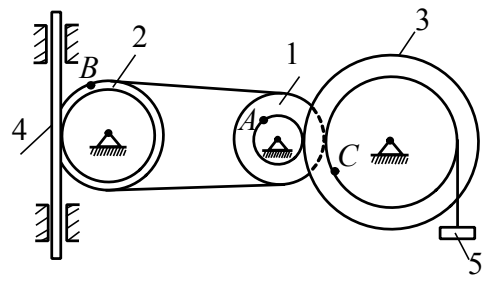


Рис. К2.5

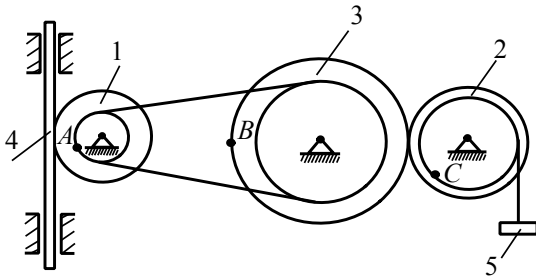


Рис. К2.6

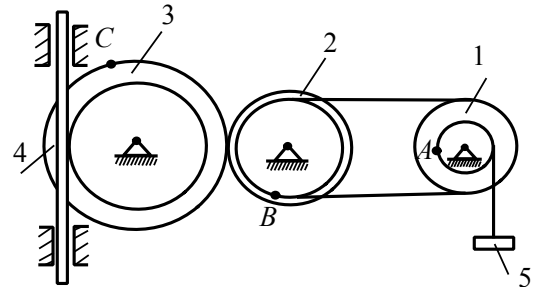


Рис. К2.7

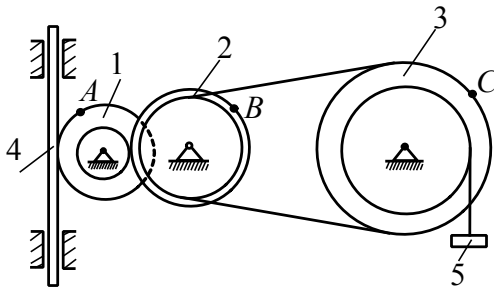


Рис. К2.8

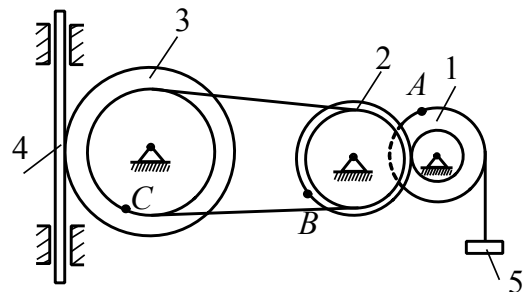


Рис. К2.9

Пример К2.а. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3 , скрепленное с валом радиуса r_3 , находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. К2.а). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Дано: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), A – точка обода колеса 3, $t_1 = 3$ с.

Определить: ω_3 , v_4 , ε_3 , a_A в момент времени $t = t_1$.

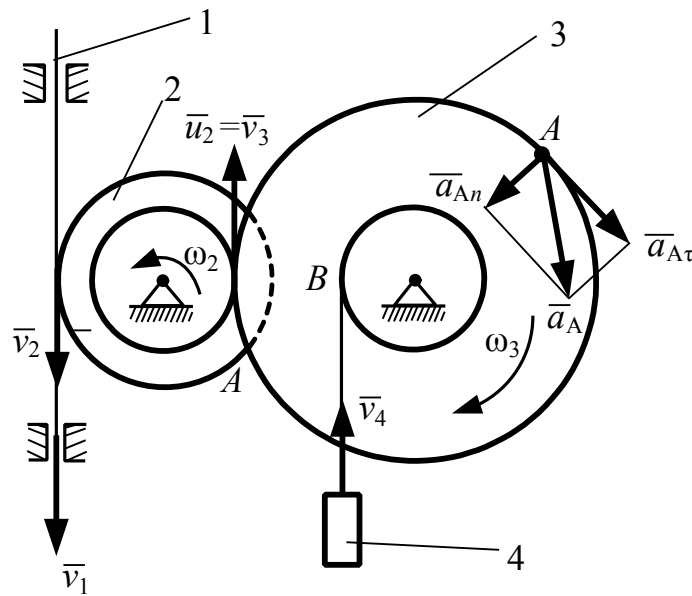


Рис. К2 а

Решение. Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колеса (радиуса R_i), через v_i , а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i .

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t . Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2. \quad (1)$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ или $\omega_2 R_2 = v_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = v_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \quad \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \quad (2)$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_3 = 6,75 \text{ с}^{-1}$.

2. Определяем v_4 . Так как $v_4 = v_B = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с $v_4 = 20,25 \text{ см/с}$.

3. Определяем ε_3 . Учитывая второе из равенств (2), получим

$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1,5t$. Тогда при $t_1 = 3$ с $\varepsilon_3 = 4,5$ с⁻².

4. Определяем a_A . Для точки A $\vec{a}_A = \vec{a}_{A\tau} + \vec{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3 \varepsilon_3$, $a_{An} = R_3 \omega_3^2$. Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с имеем

$$a_{A\tau} = 36 \text{ см/с}^2, \quad a_{An} = 364,5 \text{ см/с}^2, \quad a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366,3 \text{ см/с}^2.$$

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.а.

Ответ: $\omega_3 = 6,75$ с⁻¹; $v_4 = 20,25$ см/с; $\varepsilon_3 = 4,5$ с⁻²; $a_A = 366,3$ см/с².

Пример К2.б. Рейка 4, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 , ступенчатое колесо 1 с радиусами R_1 и r_1 и ступенчатое колесо 3 с радиусами R_3 и r_3 находятся в зацеплении, на шкив радиуса r_3 намотана нить с грузом 5 на конце (рис. К2.б). Угловая скорость колеса 1 изменяется по закону $\omega_1 = f(t)$.

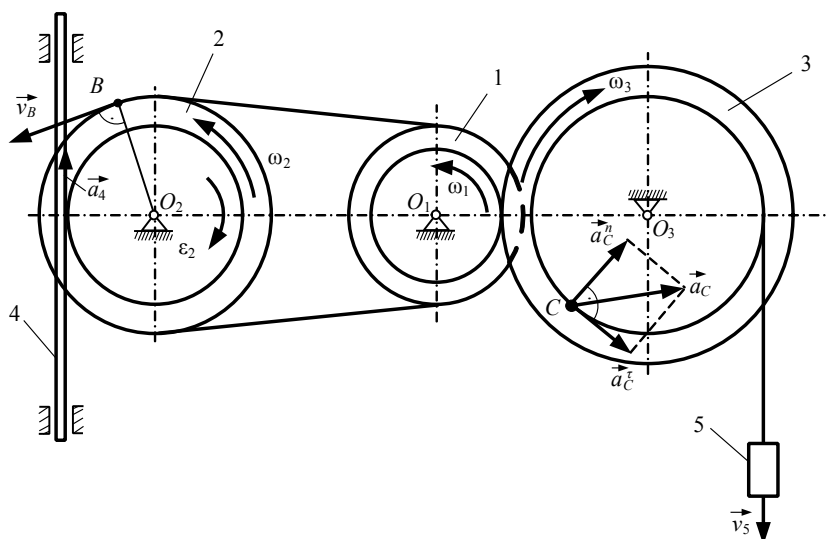


Рис. К2 б

Дано: $r_1=2$ см, $R_1=4$ см, $r_2=6$ см, $R_2=8$ см, $r_3=12$ см, $R_3=16$ см, $\omega_1 = 5t - 2t^2$, $t_1=2$

с.

Определить: $v_5, v_B, \varepsilon_2, a_C, a_4$ в момент времени $t = t_1$.

Решение. 1. Определим скорость точки B ремня, передаваемую от колеса 1 колесу 2: $v_B = \omega_1 R_1 = (5t - 2t^2) R_1$. При $t_1 = 2$ с $v_B = 8$ см/с.

2. Зная скорость точки B колеса 2, можно определить угловую скорость вращения колеса $\omega_2 = \frac{v_B}{R_2} = (5t - 2t^2) \frac{R_1}{R_2}$ и угловое ускорение колеса

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = (5 - 4t) \frac{R_1}{R_2}.$$

$$\text{При } t_1 = 2 \text{ с } \varepsilon_2 = -1,5 \text{ с}^{-2}.$$

3. Определим скорость точек соприкосновения колеса 2 и рейки 4 $v_4 = \omega_2 r_2 = (5t - 2t^2) \frac{R_1 r_2}{R_2}$. Зная закон изменения скорости рейки, можно сразу определить ее ускорение, т.к. рейка совершает поступательное движение

$$a_4 = \dot{v}_4 = (5 - 4t) \frac{R_1 r_2}{R_2}. \text{ При } t_1 = 2 \text{ с } a_4 = -9 \text{ см/с}^2.$$

4. Колеса 3 и 1 находятся во внешнем зацеплении, поэтому скорости точек их соприкосновения одинаковы в любой момент времени $\omega_3 R_3 = \omega_1 r_1$, откуда

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{r_1}{R_3} = (5t - 2t^2) \frac{r_1}{R_3}.$$

находим

Груз 5 прикреплен к концу нерастяжимой нити, которая сходит с внутреннего обода колеса 3, следовательно, $v_5 = \omega_3 r_3 = (5t - 2t^2) \frac{r_1 r_3}{R_3}$. При $t_1 = 2$ с $v_5 = 3$ см/с.

5. Определим вращательное ускорение точки C $a_C^{ep} = \varepsilon_3 r_3$, где

$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = (5 - 4t) \frac{r_1}{R_3}$, тогда $a_C^{\tau} = (5 - 4t) \frac{r_1 r_3}{R_3}$. Центробежное ускорение точки

$$a_C^n = r_3 \omega_3^2 = (5t - 2t^2)^2 \frac{r_1^2}{R_3^2} r_3. \text{ При } t_1 = 2 \text{ с } a_C^{\text{вп}} = -4,5 \text{ см/с}^2, a_C^n = 0,375 \text{ см/с}^2.$$

Т.к. $\bar{a}_C^{\tau} \perp \bar{a}_C^n$, то $a_C = \sqrt{(a_C^{\tau})^2 + (a_C^n)^2} = 4,52 \text{ см/с}^2$.

Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рисунке К2.б.

Ответ: $v_B = 8 \text{ см/с}$, $v_5 = 3 \text{ см/с}$, $\varepsilon_2 = -1,5 \text{ с}^{-2}$, $a_4 = -9 \text{ см/с}^2$, $a_C = 4,52 \text{ см/с}^2$.

Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В или Е (рис. К3.0...К3.7) или из стержней 1, 2, 3 и ползуну В и Е (рис. К3.8...К3.9), соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами; точка D находится в середине стержня АВ. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0,4 \text{ м}$, $l_2 = 1,2 \text{ м}$, $l_3 = 1,4 \text{ м}$, $l_4 = 0,6 \text{ м}$. Положение механизма определяется углами α , β , γ , φ , θ . Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0...4) или в табл. К3б (для рис. 5...9); при этом в табл. К3а ω_1 и ω_2 — величины постоянные.

Определить величины, указанные в таблице в столбце «Найти». Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол γ на рис. 8 следует отложить от DB по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т.д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α ; ползун с направляющими для большей наглядности

изобразить, как в примере КЗ а (см. рис. КЗ б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против хода часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{v}_B$ и ускорение a_B – от точки B к b (на рис. 5...9).

Таблица КЗа (к рис. КЗ.0...КЗ.4)

Номер условия	Углы, град					Дано		Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/c$	$\omega_4, 1/c$	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	0	60	30	0	120	6	–	B, E	DE	B	AB
1	90	120	150	0	30	–	4	A, E	AB	A	AB
2	30	60	30	0	120	5	–	B, E	AB	B	AB
3	60	150	150	90	30	–	5	A, E	DE	A	AB
4	30	30	60	0	150	4	–	D, E	AB	B	AB
5	90	120	120	90	60	–	6	A, E	AB	A	AB
6	90	150	120	90	30	3	–	B, E	DE	B	AB
7	0	60	60	0	120	–	2	A, E	DE	A	AB
8	60	150	120	90	30	2	–	D, E	AB	B	AB
9	30	120	150	0	60	–	8	A, E	DE	A	AB

Таблица КЗб (к рис. КЗ.5...КЗ.9)

Номер условия	Углы, град					Дано				Найти			
	α	β	γ	φ	θ	$\omega_1, 1/с$	$\varepsilon_1, 1/с$	$v_B, м/с$	$a_B, м/с^2$	v точек	ω звена	a точки	ε звена
0	120	30	30	90	150	2	4	—	—	B, E	AB	B	AB
1	0	60	90	0	120	—	—	4	6	A, E	DE	A	AB
2	60	150	30	90	30	3	5	—	—	B, E	AB	B	AB
3	0	150	30	0	60	—	—	6	8	A, E	AB	A	AB
4	30	120	120	0	60	4	6	—	—	B, E	DE	B	AB
5	90	120	90	90	60	—	—	8	10	D, E	DE	A	AB
6	0	150	90	0	120	5	8	—	—	B, E	DE	B	AB
7	30	120	30	0	60	—	—	2	5	A, E	AB	A	AB
8	90	120	120	90	150	6	10	—	—	B, E	DE	B	AB
9	60	60	60	90	30	—	—	5	4	D, E	AB	A	AB

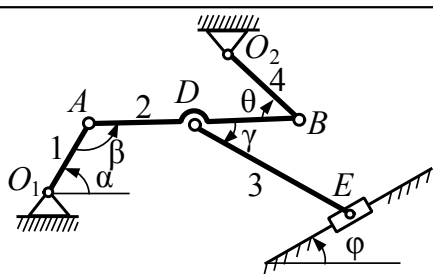


Рис. К3.0

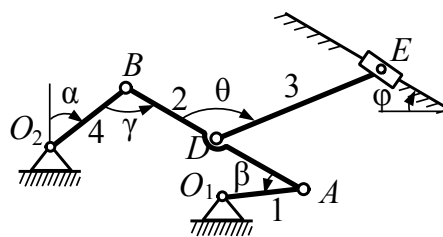


Рис. К3.1

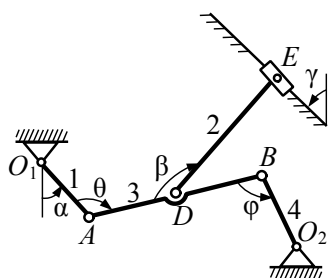


Рис. К3.2

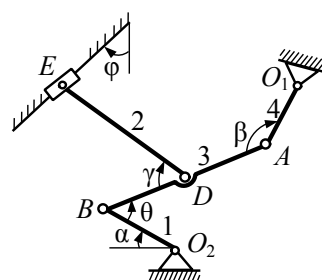


Рис. К3.3

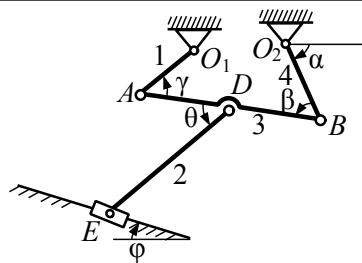


Рис. К3.4

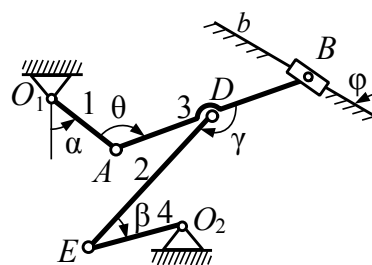


Рис. К3.5

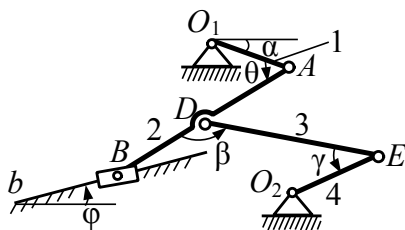


Рис. К3.6

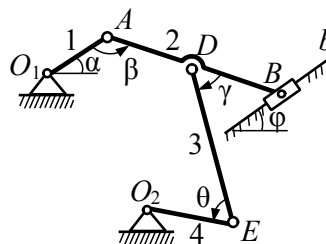


Рис. К3.7

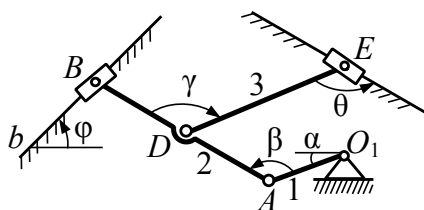


Рис. К3.8

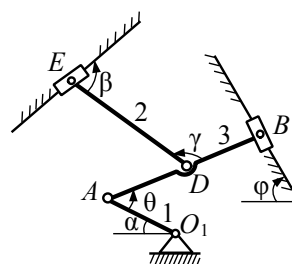


Рис. К3.9

Указания. Задача К3 – на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При её решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену механизма в отдельности.**

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$, где A – точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка A движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$); B – точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (в случае, когда точка B тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного примера К3).

Пример_К3_а. Механизм (рис. К3 а) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD = DB$, $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $\omega_1 = 2$ с⁻¹, $\varepsilon_1 = 7$ с⁻² (направления ω_1 и ε_1 – против хода часовой стрелки).

Определить: v_B , v_E , ω_2 , a_B , ε_3 .

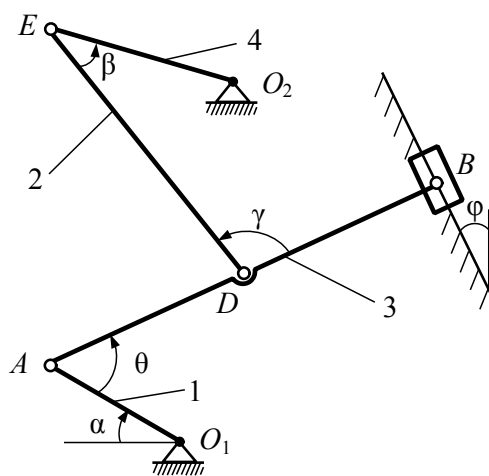
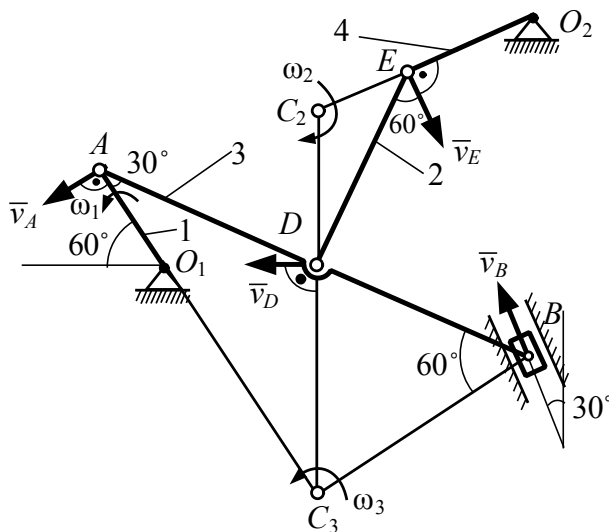


Рис. К3 а

Решение. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3 б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).



1. Определяем v_B . Точка B принадлежит стержню AB . Чтобы найти v_B , надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar{v}_B$. По данным задачи, учитывая направление ω_1 , можем определить $\bar{v}_A$; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0,8 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_A \perp O_1 A. \quad (1)$$

Направление $\bar{v}_B$ найдем, учтя, что точка B принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar{v}_A$ и направление $\bar{v}_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня AB) на прямую, соединяющую эти точки (прямая AB). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор (проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30^\circ = v_A \cos 60^\circ \quad \text{и} \quad v_B = 0,46 \text{ м/с}. \quad (2)$$

2. Определяем $\bar{v}_E$. Точка E принадлежит стержню DE . Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar{v}_E$, надо сначала найти скорость точки D , принадлежащей одновременно стержню AB . Для этого, зная $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня AB ; это точка C_3 , лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, восстановленных из точек A и B (к $\bar{v}_A$ перпендикулярен стержень l). По направлению вектора $\bar{v}_A$ определяем направление поворота стержня AB вокруг МЦС C_3 . Вектор $\bar{v}_D$ перпендикулярен отрезку C_3D , соединяющему точки D и C_3 , и направлен в сторону поворота. Величину v_D найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \quad (3)$$

Чтобы вычислить C_3D и C_3B , заметим, что ΔAC_3B – прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60° , и что $C_3B = AB \sin 30^\circ = 0,5AB = BD$. Тогда ΔBC_3D является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0,46 \text{ м/с}; \quad \bar{v}_D \perp C_3D. \quad (4)$$

Так как точка E принадлежит одновременно стержню O_2E , вращающемуся вокруг O_2 , то $\bar{v}_E \perp O_2E$. Тогда, восстанавливая из точек E и D перпендикуляры к скоростям $\bar{v}_E$ и $\bar{v}_D$, построим МЦС C_2 стержня DE . По направлению вектора $\bar{v}_D$ определяем направление поворота стержня DE вокруг центра C_2 . Вектор $\bar{v}_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30^\circ$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \quad v_E = v_D = 0,46 \text{ м/с}. \quad (5)$$

3. Определяем ω_2 . Так как МЦС стержня 2 известен (точка C_2) и $C_2D = l_2 / (2 \cos 30^\circ) = 0,69 \text{ м}$, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0,67 \text{ с}^{-1}. \quad (6)$$

4. Определяем $\bar{a}_B$ (рис. К3 в), на котором изображаем все векторы ускорений). Точка B принадлежит стержню AB . Чтобы найти $\bar{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня AB и траекторию точки B . По данным задачи можем определить $\bar{a}_A^\tau = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2,8 \text{ м/с}^2; \quad a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1,6 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

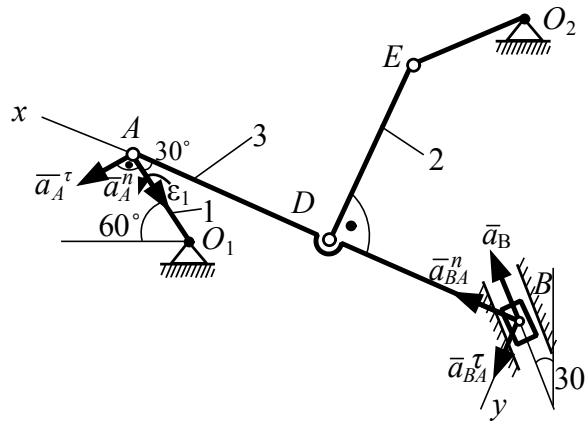


Рис. К3 в

Вектор $\bar{a}_A^n$ направлен вдоль AO_1 , а $\bar{a}_A^\tau$ – перпендикулярно AO_1 ; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К3 в). Так как точка B одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar{a}_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar{a}_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar{v}_B$.

Для определения $\bar{a}_B$ воспользуемся равенством

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar{a}_{BA}^n$ (вдоль BA от B к A) и $\bar{a}_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно BA); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя ω_3 с помощью построенного МЦС C_3 стержня 3, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3 A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30^\circ} = 0,66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0,61 \text{ м/с}^2. \quad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения a_B и a_{BA}^τ ; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить a_B , спроектируем обе части равенства (8) на направление BA (ось x), перпендикулярное неизвестному вектору $\bar{a}_{BA}^\tau$.

Тогда получим

$$a_B \cos 30^\circ = a_A^\tau \cos 60^\circ - a_A^n \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0,72 \text{ м/с}^2. \quad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar{a}_B$ направлен как показано на рис. К3 в.

5. Определяем ε_3 . Чтобы найти ε_3 , сначала определим a_{BA}^τ . Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное AB (ось y). Тогда получим

$$-a_B \sin 30^\circ = a_A^\tau \sin 60^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau. \quad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3,58 \text{ м/с}^2$. Знак указывает, что направление $\bar{a}_{BA}^\tau$ противоположно показанному на рис. К3 в.

Теперь из равенства $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l^3} = 2,56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 0,46 \text{ м/с}$; $v_E = 0,46 \text{ м/с}$; $\omega_2 = 0,67 \text{ с}^{-1}$; $a_B = 0,72 \text{ м/с}^2$; $\varepsilon_3 = 2,56 \text{ с}^{-2}$.

Примечание. Если точка B , ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К3.0...К3.4, где B движется по окружности радиуса O_2B), то направление $\bar{a}_B$ заранее неизвестно.

В этом случае $\bar{a}_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar{a}_B = \bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar{a}_B^\tau + \bar{a}_B^n = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (13)$$

При этом вектор $\bar{a}_B^n$ (см., например, рис. К3.0) будет направлен вдоль BO_2 , а вектор $\bar{a}_B^\tau$ – перпендикулярно BO_2 в любую сторону. Числовые значения a_A^τ , a_A^n и a_{BA}^n определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^\tau=0$ или $a_A^n=0$, если точка A движется прямолинейно).

Значение $\bar{a}_B^n$ также вычисляется по формуле $a_B^n = v_B^2 / \rho = v_B^2 / l$, где l – радиус окружности O_2B , а v_B определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения a_B^τ и a_{BA}^τ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя a_B^τ , можем вычислить искомое уравнение $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$. Величина a_{BA}^τ служит для нахождения ε_{AB} (как в рассмотренном примере).

Пример_К3_б. Механизм (рисунок К3 г) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B , соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами.

Дано: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 30^\circ$, $AD=DB$, $l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,6$ м, $\omega_1 = 5$ с⁻¹, $\varepsilon_1 = 8$ с⁻².

Определить: v_B , v_E , ω_{DE} , a_B , ε_{AB} .

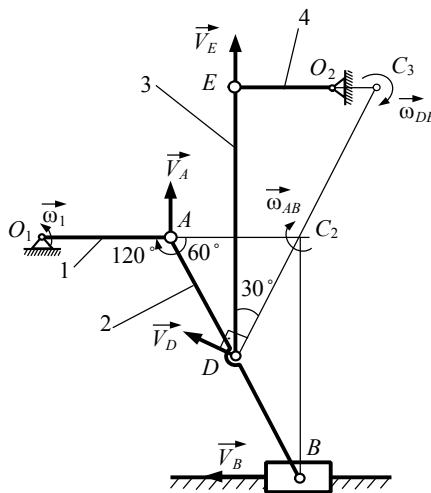


Рис. К3 г

Решение. Звенья 1 и 4 механизма совершают простейшее вращательное движение, звенья 2 и 3 – плоское, ползун B движется поступательно.

1. Определим скорость точки A как скорость точки, принадлежащей звену 1: $v_A = l_1 \omega_1 = 0,4 \cdot 5 = 2 \text{ м/с}$. Покажем $\vec{v}_A \perp O_1A$ с учетом направления угловой скорости ω_1 . Точка B принадлежит одновременно звену 2 и ползуну и в силу наложенных связей может двигаться только вдоль направляющих, следовательно, вектор скорости точки B может быть направлен только горизонтально. Для определения скорости точки B найдем положение мгновенного центра скоростей (МЦС) звена 2 на пересечении перпендикуляров к скоростям точек A и B (точка C_2).

2. Определим угловую скорость вращения звена 2 относительно его МЦС, зная скорость точки A и вычислив расстояние C_2A от точки A до МЦС

$$C_2A = AB \cdot \cos 60^\circ = 1,2 \cos 60^\circ = 0,6 \text{ м} . \quad \omega_{AB} = \frac{v_A}{C_2A} = \frac{2}{0,6} = 3,333 \text{ с}^{-1}$$

Направление ω_{AB} покажем с учетом направления вектора $\vec{v}_A$.

3. Определим скорость точки B, вычислив расстояние C_2B от точки B до МЦС

$$C_2B = AB \sin 60^\circ = 1,2 \sin 60^\circ = 1,039 \text{ м} .$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot C_2B = 3,333 \cdot 1,039 = 3,463 \text{ м/с}$$

Направление вектора $\vec{v}_B$ покажем с учетом направления ω_{AB} .

4. Точка D также принадлежит звену 2, следовательно, ее скорость можно определить относительно МЦС звена 2, вычислив расстояние C_2D от точки D до МЦС $C_2D = C_2A = 0,6 \text{ м}$. Следовательно, $v_D = 3,333 \cdot 0,6 = 2 \text{ м/с}$. Покажем вектор скорости точки D ($\vec{v}_D \perp C_2D$) с учетом направления ω_{AB} .

Одновременно точка D принадлежит звену 3, также совершающему плоское движение. Точка E , также принадлежащая звену 3 в силу наложенных на нее связей может двигаться только по окружности радиусом O_2E , следовательно, вектор скорости точки E обязательно будет перпендикулярен O_2E . МЦС звена 3 находится на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек D и E (точка C_3). Определяем угловую скорость звена 3 ω_{DE} относительно его МЦС, вычислив

$$\text{расстояние } C_3D = \frac{DE}{\cos 30^\circ} = \frac{1,4}{\cos 30^\circ} = 1,616 \text{ м} :$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{C_3D} = \frac{2}{1,616} = 1,238 \text{ с}^{-1}$$

Направление ω_{DE} покажем с учетом направления вектора $\vec{v}_D$.

Скорость точки E определим относительно МЦС звена 3, вычислив расстояние $C_3E = DE \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 1,4 \operatorname{tg} 30^\circ = 0,808 \text{ м}$.

$$v_E = \omega_{DE} \cdot C_3E = 1,238 \cdot 0,808 = 1 \text{ м/с}$$

5. Определим ускорение точки B $\vec{a}_B$ (рис. К3 д). Точка B принадлежит звену 2, совершающему плоское движение. Выберем за полюс точку A . Тогда

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

где $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$ – ускорение полюса; $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ – ускорение, получаемое точкой B при вращении плоской фигуры вокруг полюса; $a_B^n = \omega_1 l_1 = 10 \text{ м/с}^2$; $a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 3,2 \text{ м/с}^2$; $a_{BA}^n = \omega_{BA}^2 l_2 = 13,33 \text{ м/с}^2$; $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} AB$;

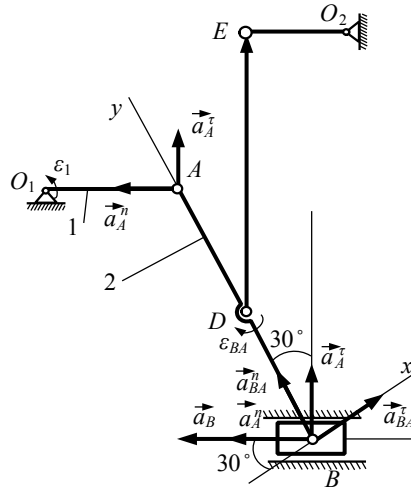


Рис. К3 д

Проведем оси координат Bx и спроецируем равенство

$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$ на эти оси

$$-a_B \cos 30^\circ = -a_A^n \cos 30^\circ + a_A^\tau + a_{BA}^\tau;$$

$$a_B \sin 30^\circ = a_A^n \sin 30^\circ + a_A^\tau \cos 30^\circ + a_{BA}^n;$$

Из первого равенства находим

$$a_B = \frac{a_B^n \sin 30^\circ + a_A^\tau \cos 30^\circ + a_{BA}^n}{\sin 30^\circ} = \frac{10 \sin 30^\circ + 3,2 \cos 30^\circ + 13,33}{\sin 30^\circ} = 42,202 \text{ м/с}^2.$$

Из второго равенства определяем ε_{AB}

$$a_{BA}^\tau = -a_B \cos 30^\circ + a_B^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \sin 30^\circ = -42,202 \cos 30^\circ + 10 \cos 30^\circ - 3,2 \sin 30^\circ$$

$$a_{BA}^\tau = -29,487 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{|a_{BA}^{\tau}|}{AB} = \frac{29,487}{1,2} = 24,573 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 3,463 \text{ м/с}$, $v_E = 1 \text{ м/с}$, $\omega_{DE} = 1,238 \text{ с}^{-1}$, $a_B = 42,202 \text{ м/с}^2$,
 $\varepsilon_{AB} = 24,573 \text{ с}^{-2}$.

Задача К4

Прямоугольная пластина (рис. К4.0...К4.4) или круглая пластина радиусом $R = 60 \text{ см}$ (рис. К4.5...К4.9) вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$, заданной в табл. К4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рис. 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения OO_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рис. 0...4) или по окружности радиуса R (рис. 5...9), движется точка M ; закон её относительного движения т.е. зависимость $s = AM = f_2(t)$ (s – в сантиметрах, t – в секундах), задан в таблице отдельно для рис. 0 – 4 и для рис. 5 – 9; там же даны размеры b и l . На рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (при $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$.

Указания. Задача К4 – на сложное движение точки. Для её решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка M на пластине в момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$ и изобразить точку

именно в этом положении, а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче. В случаях, относящихся к рис. 5...9, при решении задачи не подставлять числового значения R , пока не будут определены положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с и угол между радиусами CM и CA в этот момент.

Таблица К4

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рис. 0...4		Для рис. 5...9	
		b , см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = \overset{\smile}{AM} = f_2(t)$
1	2	3	4	5	6
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	$4/3 R$	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{6}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 3t^3) - 40$	$\frac{4}{3}R$	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

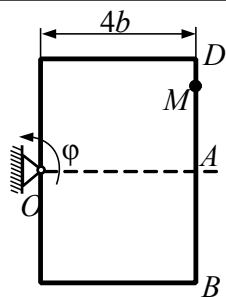


Рис. К4.0

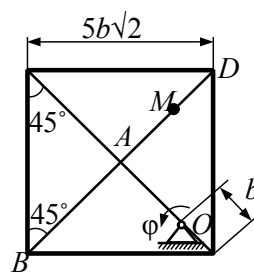


Рис. К4.1

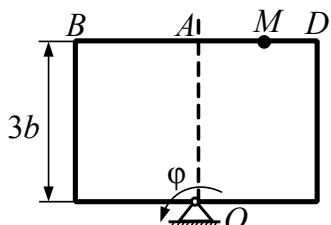


Рис. К4.2

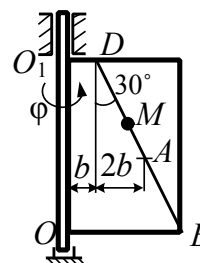


Рис. К4.3

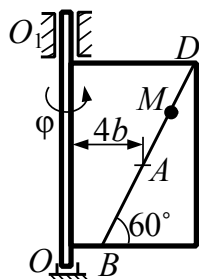


Рис. К4.4

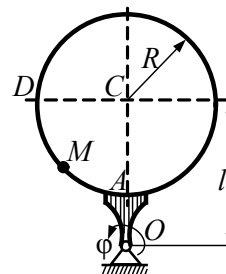


Рис. К4.5

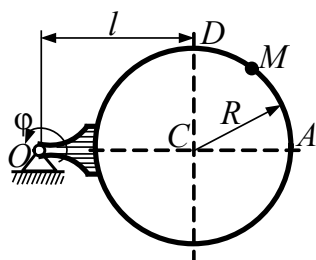


Рис. К4.6

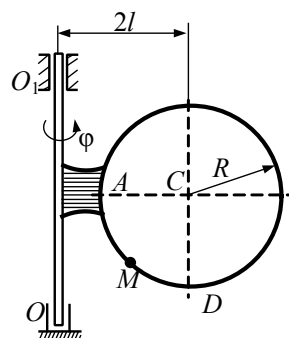


Рис. К4.7

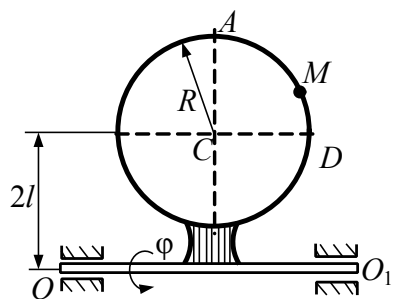


Рис. К4.8

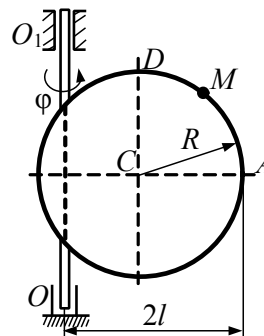


Рис. К4.9

Пример К4 а. Пластина $OEAB_1D$ ($OE=OD$, рис. К4 а) вращается вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости пластины, по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4а дуговой стрелкой). По дуге окружности радиуса R движется точка B по закону $s = \overset{\cup}{AB} = f_2(t)$ (положительное направление отсчета s – от A к B).

Дано: $R = 0,5 \text{ м}$, $\varphi = t^2 - 0,5t^3$, $s = \pi R \cos(\pi t/3)$ (φ – в радианах, s – в метрах, t – в секундах).

Определить: $v_{абс}$ и $a_{абс}$ в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по дуге окружности относительным, а вращение пластины – переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{абс}$ и абсолютное ускорение точки $\bar{a}_{абс}$ найдутся по формулам:

$$\bar{v}_{абс} = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер},$$

$$\bar{a}_{абс} = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}, \quad (1)$$

где, в свою очередь,

$$\bar{a}_{отн} = \bar{a}_{отн}^{\tau} + \bar{a}_{отн}^n, \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n.$$

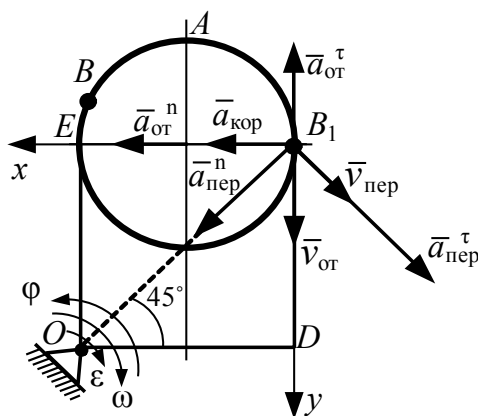


Рис. К4 а

Определим все, входящие в равенства (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = \overset{\cup}{AB} = \pi R \cos(\pi t/3) \quad (2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка B на дуге окружности в момент времени t . Полагая в уравнении (2) $t_1 = 2$ с, получим

$$s_1 = \pi R \cos(2\pi/3) = -0,5\pi R$$

Тогда

$$\angle ACB = \frac{s_1}{R} = -0,5\pi$$

Знак минус свидетельствует о том, что точка B в момент $t_1 = 2$ с находится справа от точки A . Изображаем ее на рис. К4а в этом положении (точка B_1). Теперь находим числовые значения $v_{\text{отн}}$, $a_{\text{отн}}^{\tau}$, $a_{\text{отн}}^n$:

$$v_{\text{отн}} = \dot{s} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(\pi t/3),$$

$$a_{\text{отн}}^{\tau} = \dot{v}_{\text{отн}} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos(\pi t/3), \quad a_{\text{отн}}^n = \rho_{\text{отн}} = \frac{v_{\text{отн}}^2}{R} = \frac{v_{\text{отн}}^2}{R},$$

где $\rho_{\text{отн}}$ – радиус кривизны относительной траектории, равный радиусу окружности R . Для момента $t_1 = 2$ с, учитывая, что $R = 0,5$ м, получим:

$$v_{\text{отн}} = -\frac{\pi^2 R}{3} \sin(2\pi/3) = -\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12} = -1,42 \text{ м/с},$$

$$a_{\text{отн}}^{\tau} = -\frac{\pi^3 R}{9} \cos(2\pi/3) = \frac{\pi^3}{36} = 0,86 \text{ м/с}^2, \quad a_{\text{отн}}^n = \frac{\pi^4}{24} = 4,06 \text{ м/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\bar{a}_{\text{отн}}^{\tau}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s , а вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ – в противоположную сторону; вектор $\bar{a}_{\text{отн}}^n$ направлен к центру C окружности. Изображаем все эти векторы на рис. К4а.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = t^2 - 0,5t^3$. Найдем сначала угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 2t - 1,5t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 2 - 3t$$

и при $t_1 = 2\text{с}$

$$\omega = -2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = -4 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2\text{с}$ направления ω и ε противоположны направлению положительного отсчета угла φ ; отметим это на рис. К4а.

Для определения $\bar{v}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}$ находим сначала расстояние $h_1 = OB_1$ точки B_1 от оси вращения O . Из рисунка видно, что $h_1 = 2R\sqrt{2} = 1,41 \text{ м}$. Тогда в момент времени $t_1 = 2 \text{ с}$, учитывая равенства (4), получим

$$v_{\text{пер}} = |\omega| \cdot h_1 = 2,82 \text{ м/с},$$

$$a_{\text{пер}}^{\tau} = |\varepsilon| \cdot h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2, \quad a_{\text{пер}}^n = \omega^2 h_1 = 5,64 \text{ м/с}^2. \quad (5)$$

Изображаем на рис. К4а векторы $\bar{v}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}$ с учетом направлений ω и ε и вектор $\bar{a}_{\text{пер}}^n$ (направлен к оси вращения).

3. Кориолисово ускорение. Модуль кориолисова ускорения определяем по формуле $a_{\text{кор}} = 2|v_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin \alpha$, где α – угол между вектором $\bar{v}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$). В нашем случае этот угол равен 90° , так как ось вращения перпендикулярна плоскости пластины, в которой расположен вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$.

Численно в момент времени $t_1 = 2$ с, так как в этот момент $|v_{\text{отн}}| = 1,42$ м/с и $|\omega| = 2$ с⁻¹, получим

$$a_{\text{кор}} = 5,68 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Н.Е.Жуковского: так как вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, то повернем его на 90° в направлении ω , т.е. по ходу часовой стрелки. Изображаем $\bar{a}_{\text{кор}}$ на рис. К4а. (Иначе направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ можно найти, учтя, что $a_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times v_{\text{отн}})$.)

Таким образом, значения всех входящих в правые части равенств (1) векторов найдены и для определения $v_{\text{абс}}$ и $a_{\text{абс}}$ остается только сложить эти векторы. Произведем это сложение аналитически.

4. Определение $v_{\text{абс}}$. Проведем координатные оси B_1xy (см. рис. К4а) и спроектируем почленно обе части равенства $\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$ на эти оси. Получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$v_{\text{абс } x} = v_{\text{отн } x} + v_{\text{пер } x} = 0 - |v_{\text{пер}}| \cos 45^\circ = -1,99 \text{ м/с};$$

$$v_{\text{абс } y} = v_{\text{отн } y} + v_{\text{пер } y} = |v_{\text{отн}}| + |v_{\text{пер}}| \cos 45^\circ = 3,41 \text{ м/с}.$$

После этого находим

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{абс } x}^2 + v_{\text{абс } y}^2} = 3,95 \text{ м/с}.$$

Учитывая, что в данном случае угол между $\bar{v}_{\text{отн}}$ и $\bar{v}_{\text{пер}}$ равен 45° , значение $v_{\text{абс}}$ можно еще определить по формуле

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{отн}}^2 + v_{\text{пер}}^2 + 2|v_{\text{отн}}| \cdot |v_{\text{пер}}| \cdot \cos 45^\circ} = 3,95 \text{ м/с}.$$

5. Определение $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{отн}^{\tau} + \bar{a}_{отн}^n + \bar{a}_{пер}^{\tau} + \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{кор} \quad (7)$$

Для определения a_{abc} спроектируем обе части равенства (7) на проведенные оси B_1xy . Получим

$$a_{abc \ x} = a_{отн}^n + a_{кор} + a_{пер}^n \cos 45^\circ - |a_{пер}^{\tau}| \cos 45^\circ,$$

$$a_{abc \ y} = a_{пер}^n \cos 45^\circ - |a_{пер}^{\tau}| \cos 45^\circ - |a_{отн}^{\tau}|.$$

Подставив сюда значения, которые все величины имеют в момент времени $t_1 = 2$ с, найдем, что в этот момент

$$a_{abc \ x} = 9,74 \text{ м/с}^2, \quad a_{abc \ y} = 7,15 \text{ м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{abc} = \sqrt{a_{abc \ x}^2 + a_{abc \ y}^2} = 12,08 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v_{abc} = 3,95 \text{ м/с}$, $a_{abc} = 12,08 \text{ м/с}^2$.

Пример К4_б. Треугольная пластина ADE вращается вокруг оси z по закону $\varphi = f_1(t)$ (положительное направление отсчета угла φ показано на рис. К4б дуговой стрелкой). По гипотенузе AD движется точка B по закону $s = AB = f_2(t)$; положительное направление отсчета s – от A к D .

Дано: $\varphi = 0,1t^3 - 2,2t$, $s = AB = 2 + 15t - 3t^2$; (φ – в радианах, s – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить: v_{abc} и a_{abc} в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение. Рассмотрим движение точки B как сложное, считая ее движение по прямой AD относительным, а вращение пластины – переносным. Тогда абсолютная скорость $\bar{v}_{abc}$ и абсолютное ускорение $\bar{a}_{abc}$ найдутся по формулам:

$$\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}, \quad \vec{a}_{abc} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}, \quad (1)$$

где, в свою очередь, $\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^{\tau} + \vec{a}_{пер}^n$.

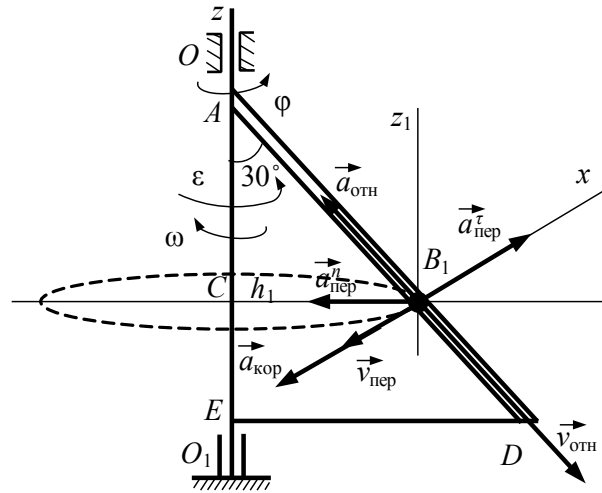


Рис. К4 б

Определим все входящие в равенство (1) величины.

1. Относительное движение. Это движение прямолинейное и происходит по закону

$$s = AB = 2 + 15t - 3t^2. \quad (2)$$

Поэтому

$$v_{отн} = \dot{s} = 15 - 6t, \quad a_{отн} = \dot{v}_{отн} = -6.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с имеем

$$s_1 = AB_1 = 20 \text{ см}, \quad v_{отн} = 3 \text{ см/с}, \quad a_{отн} = -6 \text{ см/с}^2. \quad (3)$$

Знаки показывают, что вектор $\vec{v}_{отн}$ направлен в сторону положительного отсчета дуговой координаты s , а вектор $\vec{a}_{отн}$ – в противоположную сторону. Изображаем эти векторы на рис. К4б.

2. Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону

$$\varphi = 0,1t^3 - 2,2t.$$

Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \dot{\varphi} = 0,3t^2 - 2,2; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 0,6t \quad \text{и при } t_1 = 2 \text{ с,}$$

$$\omega = -1 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = 1,2 \text{ с}^{-2}. \quad (4)$$

Знаки указывают, что в момент $t_1 = 2$ с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ , а направление ω ему противоположно; отметим это на рис. К4б, соответствующими дуговыми стрелками.

Из рисунка находим расстояние h_1 точки B_1 от оси вращения z :

$$h_1 = AB_1 \sin 30^\circ. \quad \text{Тогда в момент } t_1 = 2 \text{ с, учитывая равенства (4), получим}$$

$$\begin{aligned} v_{\text{пер}} &= |\omega| \cdot h_1 = 10 \text{ см/с,} \\ a_{\text{пер}}^\tau &= |\varepsilon| \cdot h_1 = 12 \text{ см/с}^2, \quad a_{\text{пер}}^n = \omega^2 h_1 = 10 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Изобразим на рис. К4б векторы $\bar{v}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}^\tau$ (с учетом знаков ω и ε) и $\bar{a}_{\text{пер}}^n$; направлены векторы $\bar{v}_{\text{пер}}$ и $\bar{a}_{\text{пер}}^\tau$ перпендикулярно плоскости ADE , а вектор $\bar{a}_{\text{пер}}^n$ по линии B_1C к оси вращения.

3. Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\bar{v}_{\text{отн}}$ и осью вращения (вектором $\bar{\omega}$) равен 30° , то численно в момент времени $t_1=2$ с

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot |v_{\text{отн}}| \cdot |\omega| \cdot \sin 30^\circ = 3 \text{ см/с}^2. \quad (6)$$

Направление $\bar{a}_{\text{кор}}$ найдем по правилу Н.Е.Жуковского. Для этого вектор $\bar{v}_{\text{отн}}$ спроектируем на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена противоположно вектору $\bar{a}_{\text{пер}}^n$) и затем эту проекцию повернем на 90° в сторону ω , т.е. по ходу часовой стрелки; получим направление вектора $\bar{a}_{\text{кор}}$. Он

направлен перпендикулярно плоскости пластины так же, как вектор $\bar{v}_{\text{пер}}$ (см. рис. К4б).

4. Определение $v_{\text{абс}}$. Так как $\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{отн}} + \bar{v}_{\text{пер}}$, а векторы $\bar{v}_{\text{отн}}$ и $\bar{v}_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны, то $v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{отн}}^2 + v_{\text{пер}}^2}$; в момент времени $t_1 = 2$ с $v_{\text{абс}} = 10,44$ см/с.

5. Определение $a_{\text{абс}}$. По теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{пер}}^{\tau} + \bar{a}_{\text{пер}}^n + \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (7)$$

Для определения $a_{\text{абс}}$ проведем координатные оси B_1xyz_1 и вычислим проекции $\bar{a}_{\text{абс}}$ на эти оси. Учтем при этом, что векторы $\bar{a}_{\text{пер}}^{\tau}$ и $\bar{a}_{\text{кор}}$ лежат на оси x , а векторы $\bar{a}_{\text{пер}}^n$ и $\bar{a}_{\text{отн}}$ расположены в плоскости B_1yz_1 т.е. в плоскости пластины. Тогда, проектируя обе части равенства (7) на оси B_1xyz_1 и учтя одновременно равенства (3), (5), (6), получим для момента времени $t_1 = 2$ с:

$$a_{\text{абс } x} = |a_{\text{пер}}^{\tau}| - a_{\text{кор}} = 9 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс } y} = a_{\text{пер}}^n + |a_{\text{отн}}| \sin 30^\circ = 13 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{\text{абс } z} = |a_{\text{отн}}| \cos 30^\circ = 5,20 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{\text{абс}}$

$$a_{\text{абс}} = \sqrt{a_{\text{абс } x}^2 + a_{\text{абс } y}^2 + a_{\text{абс } z}^2} = 16,64 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $v_{\text{абс}} = 10,44$ см/с, $a_{\text{абс}} = 16,64$ см/с².

Тест по разделу "Кинематика".

Кинематика точки

1. Ускорение точки характеризует:

Ответ:

- а) изменение вектора скорости по величине;
- б) изменение вектора скорости по направлению;
- в) изменение вектора скорости по величине и направлению.

2. При векторном способе задания движения материальной точки ее положение в пространстве в любой момент времени задается:

Ответ:

- а) декартовыми координатами;
- б) дуговой координатой;
- в) радиус-вектором.

3. При естественном задании движения траектория в малых окрестностях точки может рассматриваться как плоская кривая, целиком расположенная в соприкасающейся плоскости, определяемой двумя осями естественного трехгранника:

Ответ:

- а) касательной τ и главной нормалью n ;
- б) касательной τ и бинормалью b ;
- в) главной нормалью n и бинормалью b .

4. Мгновенное значение скорости точки при координатном способе задания определяется по формулам:

Ответ:

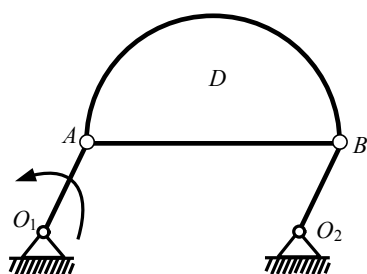
$$\text{a) } \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} ; \quad \text{б) } v = \frac{ds}{dt} ; \quad \text{в) } v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} .$$

5. Если точка движется по кривой линии с постоянной скоростью, ее ускорение равно:

$$\text{a) } a = \frac{dv}{dt} ; \quad \text{б) } a = \frac{v^2}{\rho} ; \quad \text{в) } a = 0 .$$

Кинематика твердого тела

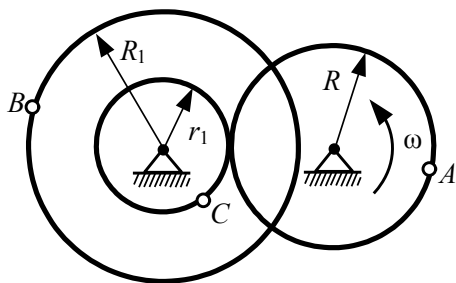
6. Какое движение совершает тело D , если $O_1A = O_2B$?



Ответ:

- а) поступательное;
- б) вращательное;
- в) плоскопараллельное.

7. Скорость какой точки схемы определяется по формуле $v = \frac{\omega R}{r_1} R_1$?



Ответ:

а) точки A ;

б) точки B ;

в) точки C .

8. Диск вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 2t^2 - 4t$. Чему равна угловая скорость вращения через 1 секунду после начала движения?

Ответ: а) -4 с^{-1} ; б) 0 ; в) 2 с^{-1} .

9. Тело вращается по закону $\varphi = -2t^3 + 3t^2$. В интервале времени $2 \leq t < 3 \text{ с}$ движение тела:

Ответ: а) замедленное; б) равномерное; в) ускоренное.

10. Где находится мгновенный центр скоростей точек плоской фигуры?

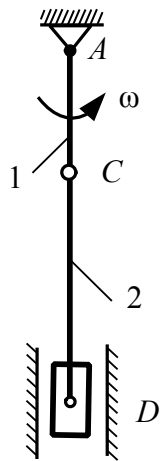
Ответ:

а) в точке пересечения векторов скоростей всех точек;

б) на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей точек, восстановленных в точках приложения;

в) ни то ни другое.

11. В какой точке находится мгновенный центр скоростей звена 2?



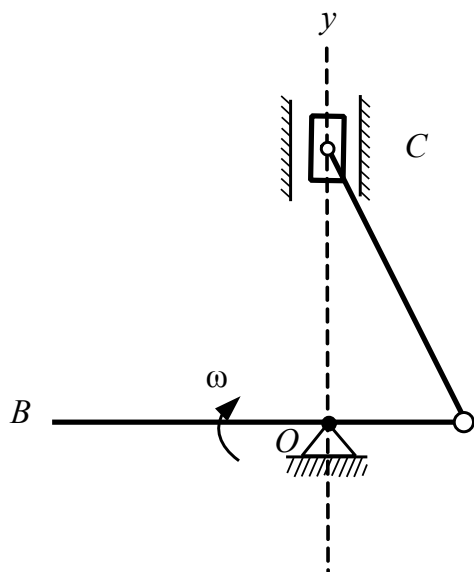
Ответ:

а) в точке A ;

б) в точке C ;

в) в точке D .

12. Какие тела совершают в данное мгновение поступательное движение?



Ответ:

- а) только AC ;
- б) только ползун C ;
- в) AC и ползун C .

Сложное движение точки и твердого тела

13. Абсолютное ускорение точки в общем случае сложного движения складывается:

Ответ:

- а) из относительного и переносного ускорений;
- б) относительного, переносного и кориолисова ускорений;
- в) относительного и кориолисова ускорений.

14. В каком случае ускорение Кориолиса равно нулю?

Ответ:

- а) когда переносное движение поступательное;
- б) когда переносное движение вращательное;
- в) когда переносное движение плоское.

15. Какое движение твердого тела можно рассматривать как сложное?

Ответ:

- а) поступательное;
- б) вращательное;
- в) плоскопараллельное.

СТАТИКА

Система сил – совокупность нескольких сил.

Эквивалентные системы сил – это системы, которые могут быть заменены одна $|\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n|$ другой $|\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_n|$ без нарушения кинематического состояния тела:

$$|\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n| \propto |\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_n|.$$

Равнодействующая сила $\bar{R}$ – эквивалентная системе сил:

$$\bar{R} \propto |\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n|.$$

Уравновешенная система сил – $|\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n \propto 0|$, под действием которой тело остается в исходном кинематическом состоянии.

Силы, равномерно распределенные по отрезку прямой, характеризуются интенсивностью – величиной силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка: q (Н/м). Равнодействующая сила $Q = qa$ (Н) приложена в середине отрезка a .

Плоская система сил

Аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил

1. Равенство нулю сумм проекций сил на две координатные оси и суммы их моментов относительно любого центра:

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0.$$

2. Равенство нулю сумм моментов сил относительно двух центров и суммы их проекций на одну ось:

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \sum M_B(\vec{F}_k) = 0, \sum F_{kx} = 0.$$

3. Равенство нулю сумм моментов сил относительно трех центров, лежащих на одной прямой.

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \sum M_B(\vec{F}_k) = 0, \sum M_C(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия равновесия плоской системы параллельных сил

$$1. \sum F_{ky} = 0, \sum M_O(\vec{F}_k) = 0.$$

$$2. \sum M_A(\vec{F}_k) = 0, \sum M_B(\vec{F}_k) = 0.$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: Момент равнодействующей плоской системы сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра:

$$\bar{M}_O(\vec{R}) = \sum \bar{M}_O(\vec{F}_k).$$

Реакция стержневых опор характеризуется одним вектором силы, направленным вдоль оси стержня $\vec{R}_A$.

Реакция шарнирно неподвижной опоры характеризуется двумя проекциями вектора силы $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$.

Реакция шарнирно подвижной опоры характеризуется одним вектором силы, направленным по нормали к поверхности, вдоль которой опора допускает перемещение $\vec{R}_A$.

Реакция жесткой заделки характеризуется двумя проекциями силы и моментом в приведенном центре: $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{M}_A$.

Равновесие системы тел с нежесткими связями рассматривается для каждого

тела в отдельности, при этом связь заменяется на силы взаимодействия между телами. Если неизвестных получается больше числа уравнений равновесия – система статически неопределимая.

Равновесие при наличии сил трения учитывается во всех практических случаях, за исключением предельной силы трения в законе Амонтона–Кулона:

$F_{np} = fN$, где f – коэффициент трения, N – нормальная реакция.

Угол трения φ – угол между предельной реакцией и нормалью к поверхности

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{np}}{N}.$$

Конус трения – геометрическое место всех возможных направлений предельной реакции.

Трение качения возникает в результате деформации поверхностей. Коэффициент трения качения пропорционален радиусу цилиндра и различен для различных материалов $\delta = 0,001 \dots 0,1 \cdot 10^{-2}$ м. Момент сопротивления качению: $M = \delta N$.

Пространственная система сил

Момент силы относительно оси – скалярная величина, равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, взятому относительно точки пересечения оси с плоскостью

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_{xy} \cdot h.$$

Зависимость между моментами силы относительно центра и относительно оси, проходящей через этот центр: $M_z(\vec{F}) = M_O \cos \gamma$, т.е. момент силы относительно оси равен проекции на эту ось вектора, изображающего момент данной силы относительно любого центра, лежащего на оси.

Аналитические формулы для вычисления моментов силы относительно трех

координатных осей:

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y; \quad M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z; \quad M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x.$$

Основная теорема статики (теорема Пуансо): Любая система сил, приложенных к абсолютно твердому телу, может быть заменена одной силой (главным вектором данной системы сил $\vec{R}$) и одной парой сил (главным моментом данной системы сил $\vec{M}_0$).

Вычисление главного вектора и главного момента пространственной системы сил:

$$R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \quad R_z = \sum F_{kz};$$

$$M_{0x} = \sum M_x(\vec{F}_k); \quad M_{0y} = \sum M_y(\vec{F}_k); \quad M_{0z} = \sum M_z(\vec{F}_k).$$

Частные случаи приведения пространственной системы сил

1) к паре сил $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 \neq 0$ – на тело действует пара сил с моментом $\vec{M}_0$.

Значение $\vec{M}_0$ не зависит от выбора центра приведения;

2) к равнодействующей $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 = 0$ – на тело действует равнодействующая, линия действия которой проходит через центр приведения O ;

3) к динамическому винту (только если $\vec{R} \parallel \vec{M}$) $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_0 \neq 0$, ось винта проходит через центр приведения O ;

4) случай равновесия $\vec{R} = 0, \vec{M}_0 = 0$.

Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum F_{kz} = 0;$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0; \quad \sum M_z(\vec{F}_k) = 0.$$

Условия равновесия пространственной системы параллельных сил:

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0.$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси:

Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же оси: $M_x(\vec{R}) = \sum M_x(\vec{F}_k)$.

Центр параллельных сил и центр тяжести

Центр параллельных сил – точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей $\vec{R}$ системы параллельных сил $\vec{F}_k$ при любых поворотах этих сил около их точек приложения в одну и ту же сторону и на один и тот же угол.

Формулы для определения координат центра параллельных сил

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}, \quad y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}, \quad z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}.$$

Центр тяжести твердого тела – связанная с ним точка, через которую проходит линия действия равнодействующей $\vec{P}$ сил тяжести частиц $\vec{P}_k$ данного тела при любом положении тела в пространстве.

Формулы для определения координат центра тяжести тела

$$x_c = \frac{\sum P_k x_k}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_k y_k}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_k z_k}{P}.$$

Центр тяжести:

– объема
$$x_c = \frac{\sum V_k x_k}{V}; \quad y_c = \frac{\sum V_k y_k}{V}; \quad z_c = \frac{\sum V_k z_k}{V};$$

– площади
$$x_c = \frac{\sum S_k x_k}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_k y_k}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_k z_k}{S};$$

– линии
$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}; \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}; \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}.$$

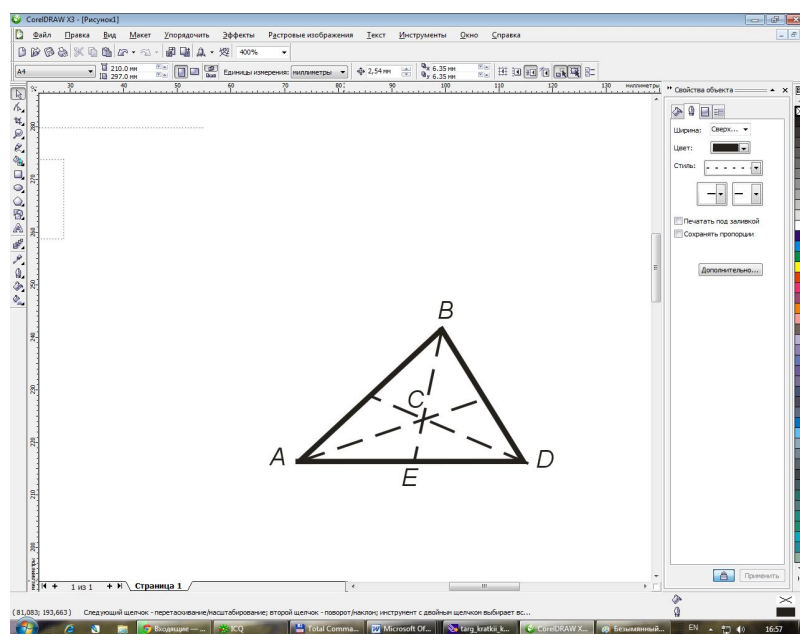
Способы определения положения центров тяжести тел: симметрия, разбиение, дополнение, интегрирование, экспериментальный.

Центр тяжести:

1) дуги окружности лежит на оси симметрии на расстоянии от центра, равном

$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha - \text{в радианах};$$

2) треугольника – в точке пересечения его медиан $CE=1/3BE$;



3) кругового сектора – на его оси симметрии на расстоянии от центра

$$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}, \quad \alpha - \text{в радианах}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ

Задача С1

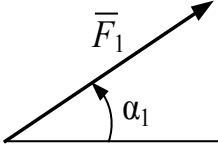
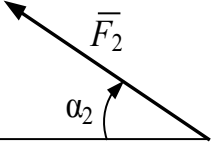
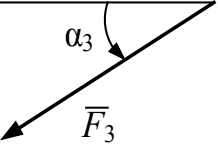
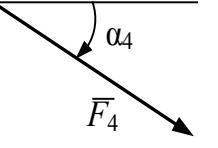
Жесткая рама, расположена в вертикальной плоскости, закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

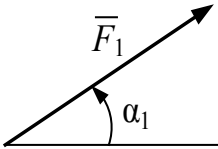
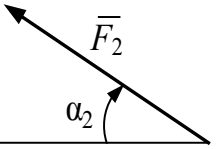
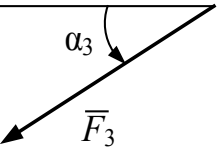
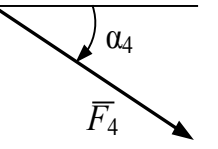
В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25\text{кН}$. На раму действует пара сил с моментом $M = 100\text{кН}\cdot\text{м}$ и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице.

Определить реакции связи в точках A , B , вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,5\text{ м}$.

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. В ее решении учесть, что натяжение обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым, если брать на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко определяются, воспользоваться теоремой Вариньона, тогда $m_0(\bar{F}) = m_0(\bar{F}') + m_0(\bar{F}'')$.

Таблица С1

Силы								
	$F_1 = 10\text{ кН}$		$F_2 = 20\text{ кН}$		$F_3 = 30\text{ кН}$		$F_4 = 40\text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
0	Н	30	-	-	-	-	К	60
1	-	-	Д	15	Е	60	-	-
2	К	75	-	-	-	-	Е	30
3	-	-	К	60	Н	30	-	-

Силы								
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

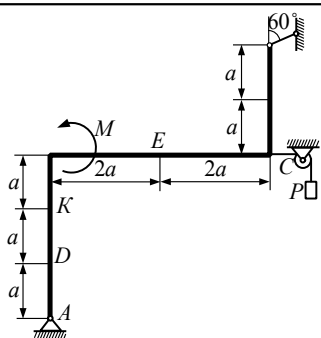


Рис. C1.0

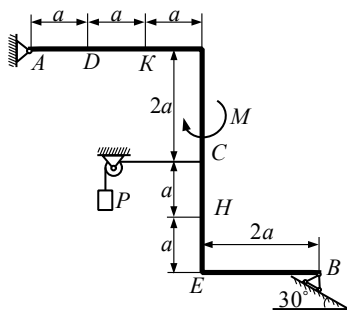


Рис. C1.2

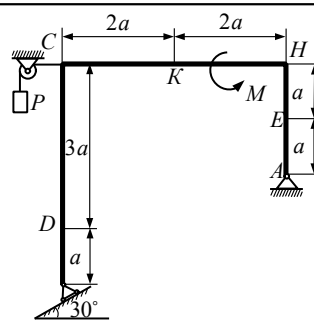


Рис. C1.1

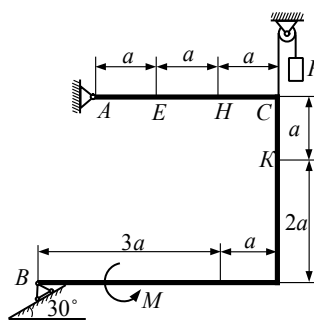
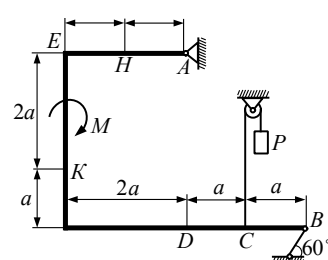
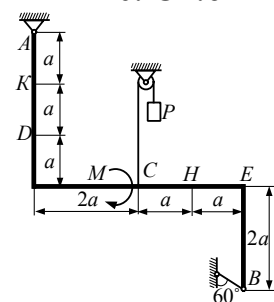
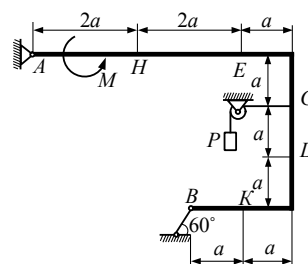
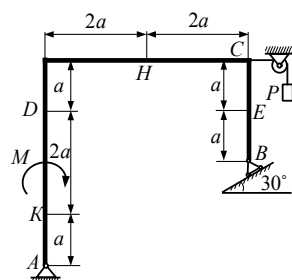
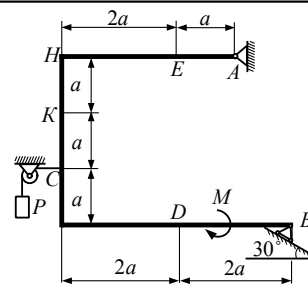
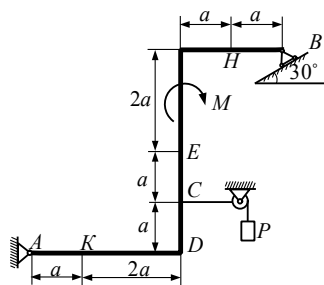
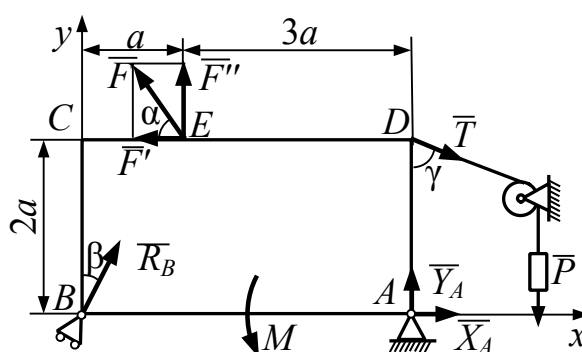


Рис. C1.3



Пример_С1_а. Жесткая пластина $ABCD$ (рис. С1 а) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B – подвижную шарнирную, опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.



Дано: $F=25$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75^\circ$, $M = 50$ кН·м, $\beta = 30^\circ$, $a = 0,5$ м.

Определить: реакции в точках A и B , вызываемые действующими нагрузками.

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси $ху$ и изобразим действующие на пластину силы: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом M , натяжение троса $\bar{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}', \bar{F}''$ ($F' = F \cos \alpha$, $\bar{F}'' = F \sin \alpha$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0,$$

$$M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8,5$ кН; $Y_A = -23,3$ кН; $R_B = 7,3$ кН. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1 а.

Пример_С1_б. Жесткая рама (рис. С1 б) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B закреплена невесомым стержнем. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 10 \text{ кН}$, $P = 25 \text{ кН}$, $M = 100 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $a = 0,5 \text{ м}$.

Определить: реакции в точках A и B , вызываемые действующими нагрузками.

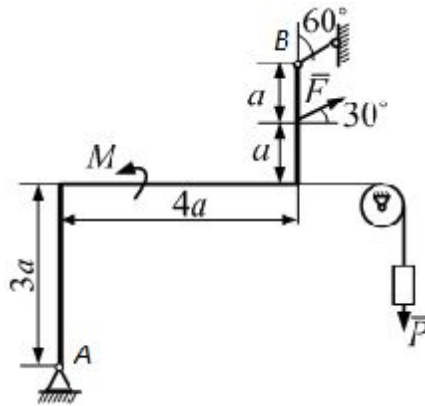


Рис. С1 б

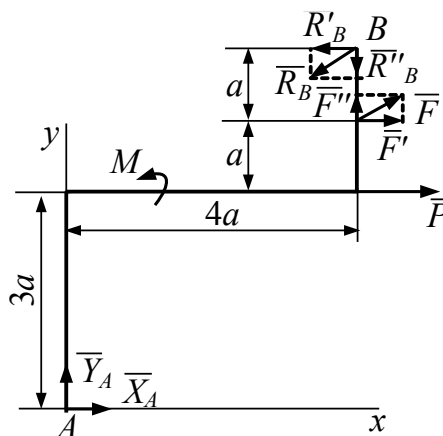


Рис. С1 в

Решение.

1. Рассмотрим равновесие рамы. Проведем координатные оси xu и изобразим действующие на раму силы: силу $\vec{F}$, пару сил с моментом M , натяжение троса $\vec{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакцию стержня изображаем вдоль оси стержня, полагая, что стержень находится под растягивающей нагрузкой) (рис. С1 в).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия.

При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$, $\bar{F}''$ ($F' = F \cos 30^\circ$, $F'' = F \sin 30^\circ$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$.

Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + P + F \cos 30^\circ - R_B \sin 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + F \sin 30^\circ - R_B \cos 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0 \\ M - 3a \cdot P - 4a \cdot F \cos 30^\circ + 4a \cdot F \sin 30^\circ + 5a \cdot R_B \sin 60^\circ - \\ - 4a \cdot R_B \cos 60^\circ &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{Из (3):} \quad R_B = \frac{3aP - M - 4aF(\sin 30^\circ - \cos 30^\circ)}{a(5 \sin 60^\circ - 4 \cos 60^\circ)} = 144,855 \text{ кН},$$

$$\text{Из (1):} \quad X_A = R_B \sin 60^\circ - P - F \cos 30^\circ = 91,784 \text{ кН},$$

$$\text{Из (2):} \quad Y_A = R_B \cos 60^\circ - F \sin 30^\circ = 67,428 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = 91,784 \text{ кН}$; $Y_A = 67,428 \text{ кН}$; $R_B = 144,855 \text{ кН}$. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и $\bar{R}_B$ направлены так как показано на рис. С1 б.

Задача С2

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем 1 (рис. С2.0...С2.7) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. С2.8, С2.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

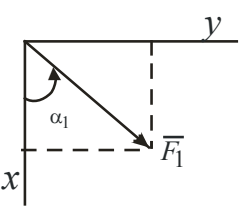
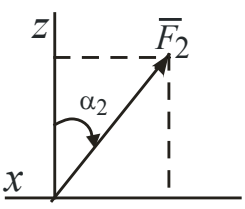
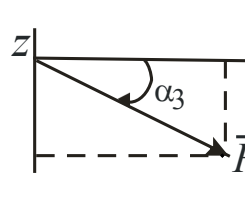
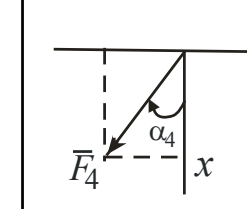
Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1 = 5$ кН, вес меньшей плиты $P_2 = 3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xu – горизонтальная).

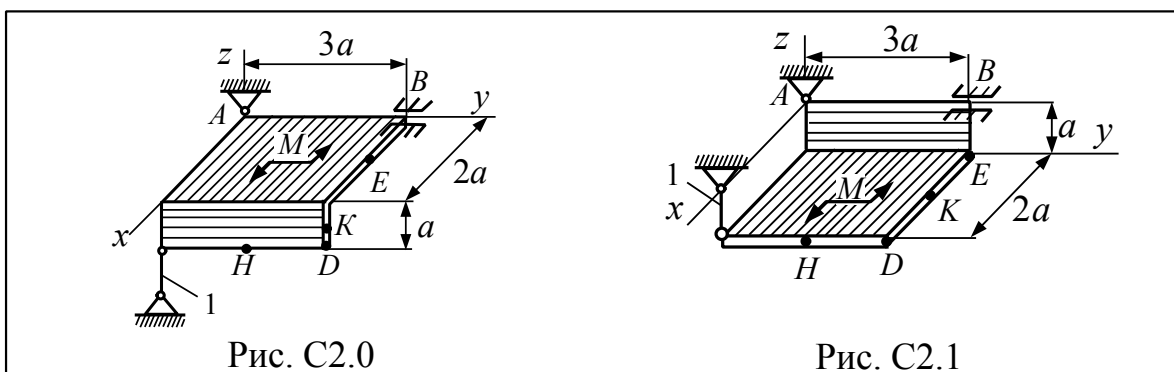
На плиты действует пара сил с моментом $M = 4$ кН•м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С2; при этом силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_4$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости xu , сила $\bar{F}_2$ – в плоскости, параллельной xz , и сила $\bar{F}_3$ – в плоскости, параллельной yz . Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a = 0,6$ м.

Указания. Задача С2 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на две составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\bar{F}) = m_x(\bar{F}') + m_x(\bar{F}'')$ и т.д. $x \ y$

Таблица С2

Силы								
	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
Номер условия	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
0	Е	60	Н	30	-	-	-	-
1	-	-	Д	60	Е	30	-	-
2	-	-	-	-	К	60	Е	30
3	К	30	-	-	Д	0	-	-
4	-	-	Е	30	-	-	Д	60
5	Н	0	К	60	-	-	-	-
6	-	-	Н	90	Д	30	-	-
7	-	-	-	-	Н	60	К	90
8	Д	30	-	-	К	0	-	-
9	-	-	Д	90	-	-	Н	30



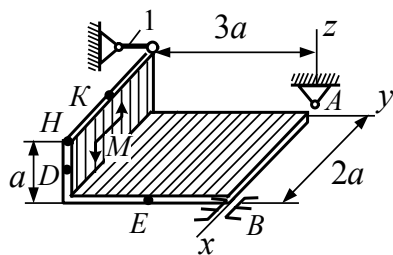


Рис. С2.2

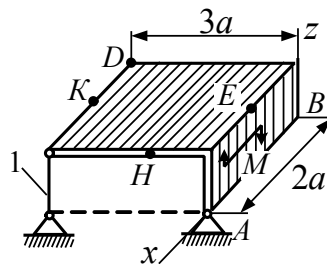


Рис. С2.3

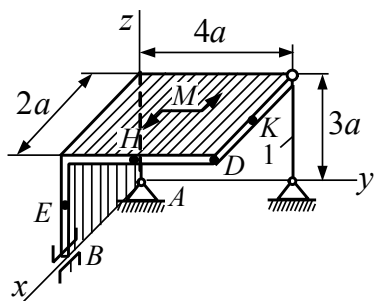


Рис. С2.4

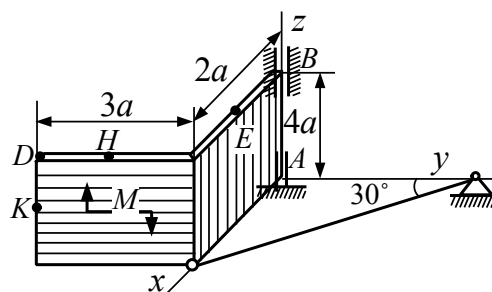


Рис. С2.5

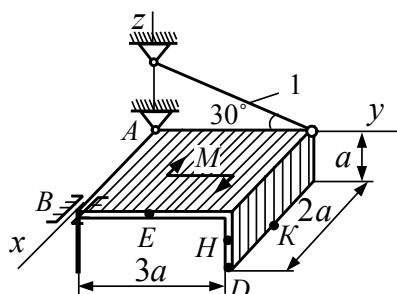


Рис. С2.6

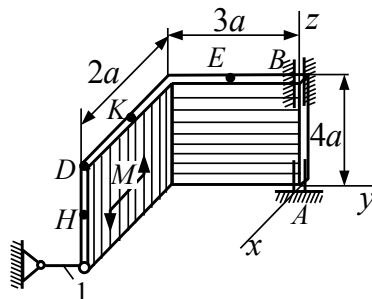


Рис. С2.7

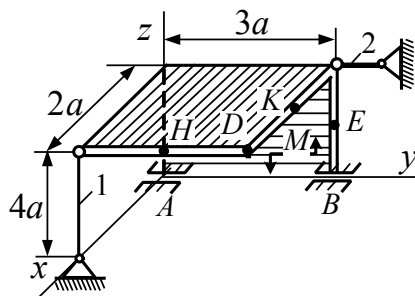


Рис. С2.8

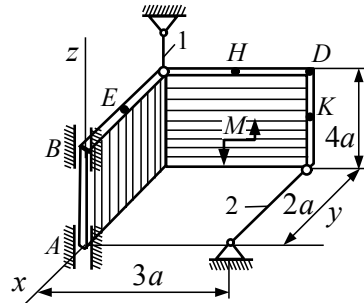


Рис. С2.9

Пример С2 а. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. С2 а) закреплена сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD' . На плиту в плоскости, параллельной xz ,

действует сила $\bar{F}$, а в плоскости, параллельной yz , – пара сил с моментом M .

Дано: $P = 3$ кН; $F = 8$ кН; $M = 4$ кН•м; $\alpha = 60^\circ$, $AC = 0,8$ м; $AB = 1,2$ м; $BE = 0,4$ м; $EH = 0,4$ м.

Определить: реакции опор A , B и стержня DD' .

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}$, $\bar{F}$ и пара с моментом M , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D' , предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

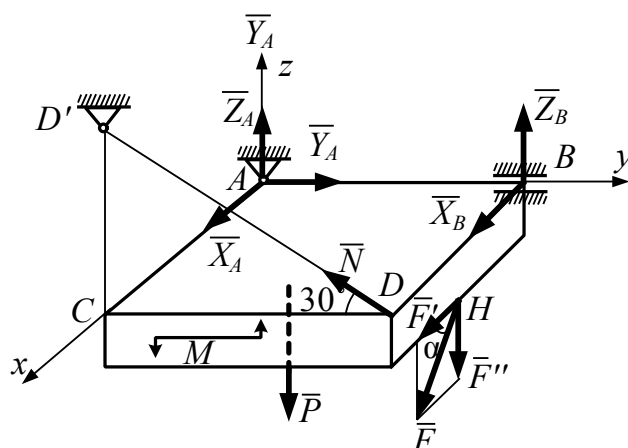


Рис. С2 а

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + F \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - N \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P + N \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0,$$

$$M - P \cdot AB/2 + Z_B \cdot AB - F \sin 60^\circ \cdot AB + T \sin 30^\circ \cdot AB = 0; \quad (4)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0,$$

$$P \cdot AC/2 - N \sin 30^\circ \cdot AC + F \sin 60^\circ \cdot AC/2 - F \cos 60^\circ \cdot BE = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0, \quad -F \cos 60^\circ \cdot AB - N \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. \quad (6)$$

Для определения моментов силы $\bar{F}$ относительно осей разлагаем ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям x и z ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. «Указания»). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции $\bar{N}$.

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = 3,4$ кН; $Y_A = 5,1$ кН; $Z_A = 4,8$ кН; $X_B = -7,4$ кН; $Z_B = 2,1$ кН; $N = 5,9$ кН. Знак минус указывает, что реакция X_B направлена противоположно показанной на рис. С2 а.

Пример_С2_б. Две прямоугольные плиты весом P_1 и P_2 (рис. С2 б) закреплены сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD' . На плиту в плоскости, параллельной xy , действуют силы $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, а в плоскости, параллельной xz , – пара сил с моментом M .

Дано: $P_1 = 5$ кН, $P_2 = 3$ кН, $F_1 = 6$ кН, $F_2 = 10$ кН, $M = 4$ кН·м, $\alpha = 60^\circ$, $a = 0,6$ м.

Определить: реакции опор A , B и стержня DD' .

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ и пара с моментом M , а также реакции связей (рис. С2 б). Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$,

цилиндрического (подшипника) – на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию $\bar{N}$ стержня направляем вдоль стержня от D к D' , предполагая, что он растянут.

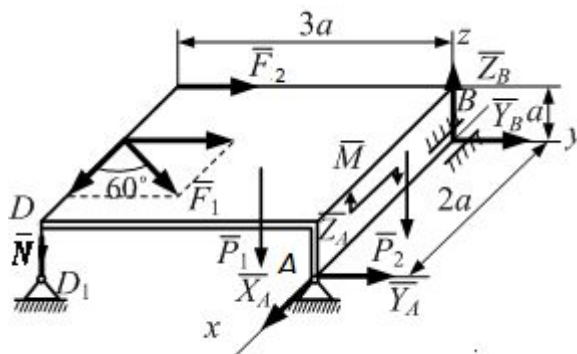


Рис. С2 б

Силу $\bar{F}_1$ разложим на составляющие $F'_1 = F_1 \cos 60^\circ$, $F''_1 = F_1 \sin 60^\circ$ и для определения момента силы $\bar{F}_1$ относительно осей применим теорему Вариньона.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + F_1 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A + Y_B + F_1 \sin 60^\circ + F_2 = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0; Z_A + Z_B - N - P_1 - P_2 = 0;$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0; N \cdot 3a + P_1 \frac{3}{2}a - F_1 \sin 60^\circ \cdot a - F_2 \cdot a = 0;$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0; -M - Z_A \cdot 2a + N \cdot 2a + F_1 \cos 60^\circ \cdot a + (P_1 + P_2)a = 0;$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0; Y_A \cdot 2a + F_1 \sin 60^\circ \cdot a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных

величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

$$X_A = -F_1 \cos 60^\circ = -3 \text{ кН};$$

$$Y_A = -\frac{F_1 \sin 60^\circ}{2} = -2.6 \text{ кН};$$

$$N = \frac{F_1 \sin 60^\circ + F_3 - \frac{3}{2} P_1}{3} = 2.56 \text{ кН};$$

$$Z_A = \frac{N \cdot 2a + F_1 \cos 60^\circ \cdot a + (P_1 + P_2)a - M}{2a} = 4.73 \text{ кН};$$

$$Y_B = -Y_A - F_1 \sin 60^\circ - F_3 = -12.6 \text{ кН};$$

$$Z_B = N - Z_A + P_1 + P_2 = 5.83 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -3 \text{ кН}$; $Y_A = -2.6 \text{ кН}$; $Z_A = 4.73 \text{ кН}$; $Y_B = -12.6 \text{ кН}$; $Z_B = 5.83 \text{ кН}$; $N = 2.56 \text{ кН}$. Знак минус указывает, что реакции X_A , Y_A , Y_B направлены противоположно показанным на рис. С2 б.

Тест по разделу «Статика»

1. Что изучает статика?

Ответ:

- а) способы преобразования систем сил в эквивалентные системы;
- б) условия равновесия сил, приложенных к твердому телу;
- в) то и другое.

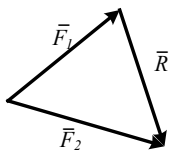
2. Система сходящихся сил – это совокупность сил, в которой:

Ответ:

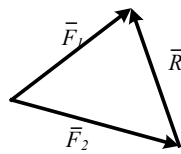
- а) линии действия сил совпадают;
- б) линии действия сил пересекаются в одной точке;
- в) линии действия сил параллельны.

3. На какой схеме $\bar{R}$ является равнодействующей системы сходящихся сил?

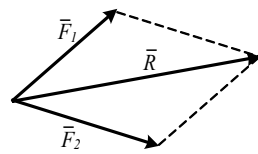
Ответ:



а)



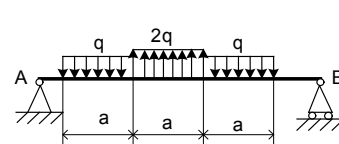
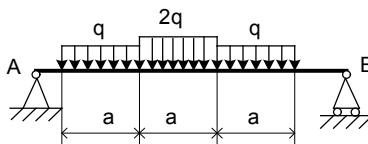
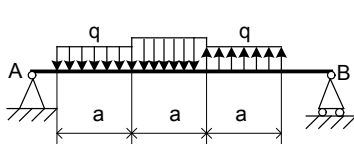
б)



в)

4. На какой схеме система активных сил эквивалентна нулю?

Ответ:



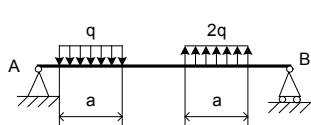
а)

б)

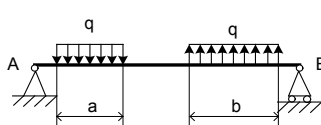
в)

5. На какой схеме система активных сил эквивалентна паре сил?

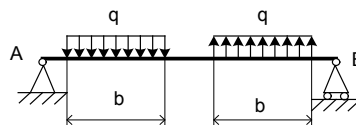
Ответ:



а)



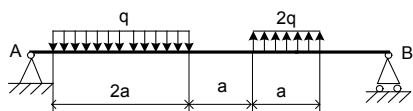
б)



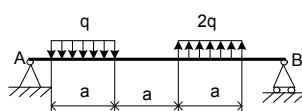
в)

6. На какой схеме система активных сил эквивалентна равнодействующей?

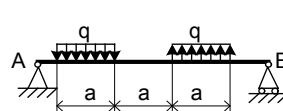
Ответ:



а)



б)



в)

7. Алгебраический момент силы относительно центра считается положительным, если он вызывает вращение:

Ответ:

а) по часовой стрелке;

б) против часовой стрелки;

в) то и другое.

8. В каких видах опор возникает момент реакции?

Ответ:

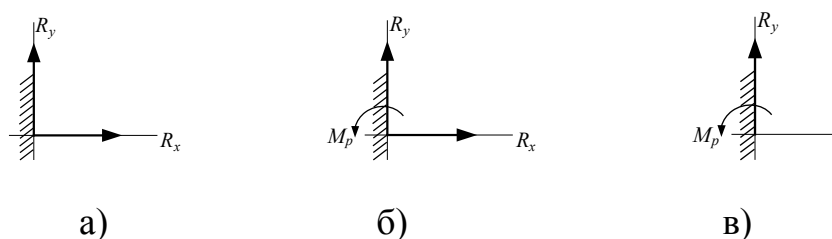
а) в шарнирных опорах;

б) в стержневых опорах;

в) в заделках.

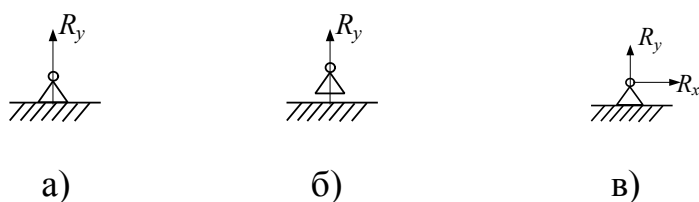
9. На какой схеме правильно изображены реакции жесткой заделки в случае нагружения произвольной плоской системой активных сил?

Ответ:



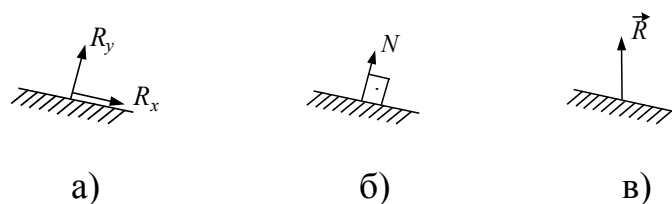
10. Как изображается шарнирно-неподвижная опора и ее реакции в случае нагружения произвольной плоской системой внешних сил:

Ответ:



11. На какой схеме правильно изображена реакция гладкой опорной плоскости?

Ответ:



$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum F_{kx} = 0 ; \quad \sum F_{ky} = 0 ; \quad \sum M_A(\bar{F}_k) = 0 ; \\ 2) \quad & \sum F_{kx} = 0 ; \quad \sum M_A(\bar{F}_k) = 0 ; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0 ; \\ 3) \quad & \sum M_A(\bar{F}_k) = 0 ; \quad \sum M_B(\bar{F}_k) = 0 ; \quad \sum M_C(\bar{F}_k) = 0 \end{aligned}$$

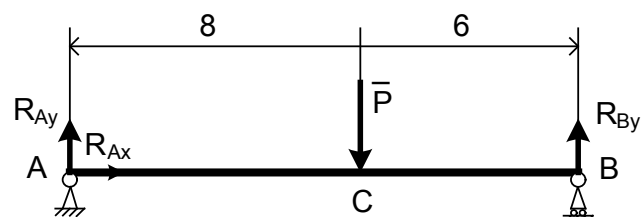
13. Для какой схемы составлены уравнения равновесия?

$$R_{Ax} + P \cos 60^\circ = 0 \quad ;$$

$$R_{Ay} - P \sin 60^\circ + R_{By} = 0.$$

$$-R_{Ay} \cdot h_1 + R_{By} \cdot h_2 = 0$$

14. Какое уравнение моментов составлено относительно точки В?



$$\text{a) } 14R_{By} - 8P = 0; \quad \text{б) } 6P - 14R_{Ay} = 0; \quad \text{в) } 6R_{By} - 8R_{Ay} = 0.$$

15. Что будет происходить с абсолютно твердым телом, находящимся под действием некоторой системы сил, если главный вектор и главный момент этой системы сил не равны нулю, а направления векторов совпадают?

Ответ:

- а) перемещение в направлении главного вектора;
- б) вращение в плоскости действия главного момента;
- в) винтовое движение.

Приложение

Таблица 1 - Основные законы кинематики

<u>1. Кинематика точки</u> 1) векторный способ задания движения: $\vec{r} = \vec{r}(t)$; $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; 2) координатный способ: $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$; $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ 3) естественный способ: $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}, v = \frac{ds}{dt}$, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$; $a_\tau = \ddot{s}$, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$	
<u>2. Вращательное движение а.т.т.:</u> $\varphi = f(t)$ - рад. $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$; $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$; $v = h\omega$; $a_\tau = h\varepsilon$; $a_n = h\omega^2$; $a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.	
<u>3. Плоскопараллельное движение а.т.т.:</u> $v_{MA} = v_A + v_{MA} > v_{MA} = \omega \cdot MA$; $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$ - теорема о проекциях скоростей твердого тела; МЦС: $v_A = \omega \cdot PA$, $v_B = \omega \cdot PB$, $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$; $a_{MA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$, $\bar{a}_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$	

4. Сложное движение а.т.т.: $\bar{v}_a = \bar{v}_{отн} + \bar{v}_{пер}$

$$v_a = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{отн} \cdot v_{пер} \cdot \cos \alpha}$$

Теорема Кориолиса: $\bar{a}_a = \bar{a}_{отн} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$;

$$a_{кор} = 2 | \omega_{пер} \cdot v_{отн} | \sin \alpha .$$

Справочные данные

Таблица 2 - Производные от функций

y	y'	y	y'
$const$	0	a^x	$a^x \ln a$
x	1	$u \pm v$	$u' \pm v'$
x^a	$ax^{a-1} = a \frac{y}{x}$	Cu	Cu'
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$u \cdot v$	$uv' \pm vu'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$
e^x	e^x	$y = f(u)$ $u = \varphi(x)$	$y' = y'_u \cdot u'_x =$ $= f'(u) \cdot \varphi'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = \varphi(y) \end{array} \right\}$	$y'x = \frac{1}{x'y}$
$\lg x$	$\frac{1}{x} \lg e \approx \frac{0,43}{x}$		$f'x = \frac{1}{\varphi'(y)}$, где f и φ взаимно обратные функции
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{Arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{Arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{Arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{Arcth} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

thx	$-\frac{1}{sh^2x}$		
-------	--------------------	--	--

Таблица 3 - Значения тригонометрических функций основных углов

Функ -ция	1-квадрант					2-квадрант			
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
ctg	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Продолжение табл. 3

Функ -ция	3-квадрант				4-квадрант			
	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\sqrt{3}$	0

Таблица 4 - Формулы приведения

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ;$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} ;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha ;$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2(1 - \cos \alpha)} ;$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1/2(1 + \cos \alpha)} ;$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 1/2 [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] ;$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] ;$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = 1/2 [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] ;$$

$$\sin^2 \alpha = 1/2 (1 - \cos 2\alpha) ;$$

$$\cos^2 \alpha = 1/2 (1 + \cos 2\alpha) ;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = -(1 - 2 \cos^2 \alpha)$$

Литература

1. Смогунов В.В. Теоретическая механика для заочников / Под ред. Н.И. Гордиенко. – Пенза: изд-во ПензГУ, 1995.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник для студ. вузов (гриф МО). – 12-е изд., стереотип. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.
3. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1987 г.
4. Теоретическая механика: Методические указания /Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1988.
5. Теоретическая механика: Методические указания /Под ред. С.М. Тарга. – М.: Высшая школа, 1989.