А. И. Аркуша М. И. Фролов

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

для техникумов

издательство
Высшая
Школа

А. И. Аркуша, М. И. Фролов

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Допущено
Министерством высшего
и среднего специального
образования СССР
в качестве учебника
для учащихся
машиностроительных специальностей
техникумов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1983

ББК 30.12
А 82
УДК 531.8

Научный редактор Е. Н. Дубейковский.
Рецензенты: Т. М. Штомпель (Харьковский станкоинструментальный техникум), Е. А. Шорох, В. Н. Загребельный, М. Г. Пинский (Харьковский политехнический институт).

40302

БИБЛИОТЕКА
Свердловского экспериментально-
го завода-техникума

Аркуша А. И., Фролов М. И.

А 82 Техническая механика: Учебник для машиностроит. спец. техникумов.— М.: Высш. шк., 1983.— 447 с., ил.

В пер.: 1 р.

В учебнике изложен учебный материал по программе «Техническая механика» для машиностроительных специальностей техникумов. Он может использоваться также в группах учащихся немашиностроительных специальностей, связанных с эксплуатацией промышленного оборудования.

Применение основных законов, теорем, уравнений, расчетных формул иллюстрируется решениями примеров с использованием единиц СИ.

$A\frac{2105000000-429}{001(01)-83}97-83$

ББК 30.12
605

© Издательство «Высшая школа», 1983

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый учебник «Техническая механика» содержит три раздела: «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов» и «Детали машин». При изложении учебного материала авторы стремились раскрыть физический смысл рассматриваемых законов, теорем, расчетных формул и по возможности иллюстрировать их применение примерами решения задач, а также примерами расчета элементов конструкций и основных видов передач.

Учебник написан в соответствии с действующими Государственными стандартами СССР, утвержденными до 1982 г., в частности со стандартами на термины, определения, обозначения, расчет геометрии, расчет на прочность зубчатых цилиндрических передач, редукторы общего назначения, ременные передачи, подшипники качения, зубчатые (шлицевые) соединения, механические муфты.

Решение всех примеров, все расчеты в учебнике и вывод расчетных формул в разделе «Детали машин» выполнены в соответствии с требованиями ГОСТ 8. 417—81 «Единицы физических единиц».

Разделы первый и второй учебника написаны А. И. Аркушей при участии Е. Н. Дубейковского, которому принадлежат § 2.31 и глава 9. Третий раздел написан М. И. Фроловым. Авторы выражают искреннюю благодарность В. Н. Загребельному, М. Г. Пинскому, Е. А. Шороху, Т. М. Штомпель, Л. А. Цейтлину, Е. С. Савушкину и Е. Н. Дубейковскому, замечания и советы которых во многом помогли авторам при работе над рукописью.

Авторы обращаются с просьбой к преподавателям и учащимся техникумов направлять свои критические замечания и пожелания в адрес издательства или Научно-методического кабинета по среднему специальному образованию Минвуза СССР (111024, Москва, 3-я Кабельная ул., 1).

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Последовательное наступление научно-технической революции неразрывно связано с непрерывным совершенствованием машиностроения — основы технического перевооружения всех отраслей народного хозяйства. Инженерная техническая деятельность на основе научной мысли расширяет и обновляет номенклатуру конструкционных материалов, внедряет эффективные методы повышения их прочностных свойств. Появляются новые материалы на основе металлических порошков, порошков-сплавов. Порошковая металлургия не только приводит к замене дефицитных черных и цветных металлов более дешевыми материалами, она позволяет получить совершенно новые материалы — «материалы века», которые невозможно получить традиционным путем. Кроме того, изготовление изделий из порошков — практически безотходное производство. Другое направление получения дешевых конструкционных материалов состоит в применении пластмасс, новых покрытий и т. п. Тончайшая пленка из порошковых смесей на поверхности детали, образуемая плазменным напылением, повышает надежность сопрягаемых и трущихся друг о друга деталей машин, защищает их от коррозии и существенно увеличивает их износостойкость.

Развитие машиностроения на современном этапе в соответствии с решением XXVI съезда КПСС характеризуется комплексной механизацией и автоматизацией производства на основе широкого применения автоматических манипуляторов * (промышленных роботов), встроенных систем автоматического управления с использованием микропроцессов и мини-ЭВМ.

При внедрении в промышленность новых машин широко применяется модульный принцип оборудования, т. е., например, станок или несколько станков и манипулятор. На базе этого принципа создаются и вступают в строй не отдельные машины, а их системы — автоматические линии, цехи, заводы, обеспечивающие законченный технологический процесс производства конкретного изделия. Все это, вместе взятое, позволяет при снижении затраты материалов на изготовление и общей стоимости повысить их мощность, качество, производительность и сделать экономными в потреблении энергии.

Успешное развитие современного машиностроения в конечном счете зависит от качества и глубины профессиональной подготовки специалиста с высшим и средним образованием. Приобретение учащимися техникумов всех специальных знаний и навыков базируется на хорошей общетехнической подготовке, в основе которой наряду

---

* От латинского «manus» — рука.

с другими лежат знания и навыки, полученные при изучении предмета «Техническая механика».

Чтобы понять работу какой-либо машины, необходимо знать, из каких частей она состоит и как они между собой взаимодействуют. А чтобы создать такую машину, нужно сконструировать и рассчитать каждую ее деталь. Третий раздел учебника и посвящен частично решению этой задачи — расчету и конструированию деталей машин общего назначения, деталей, без которых не обходится ни одна машина или механизм.

Расчеты деталей машин базируются на знании основ сопротивления материалов — науки о прочности и жесткости механических конструкций и методах их расчета. Безошибочность же всех действий в современной технической практике определяется знанием основных положений теоретической механики, в которой изучаются законы движения механических систем и общие свойства этих движений.

Каждый человек с помощью органов чувств познает разнообразный и бесконечный окружающий мир, существующий независимо от нас. Весь этот объективный мир определяется одним словом «материя». Непрерывная изменчивость материального мира — основная форма его существования — называется движением, понимаемым в самом широком смысле. «В мире нет ничего, кроме движущейся материи, и движущаяся материя не может двигаться иначе, как в пространстве и во времени» *. Действительно, в мире постоянно происходят различные явления, события, процессы, отмечая которые мы стремимся зафиксировать, где и когда они произошли. Следовательно, пространство и время — формы существования материи.

Изучением самой простой формы движения материального мира, изучением перемещения тел относительно друг друга и во взаимодействии друг с другом и занимается теоретическая механика. Перемещение тела относительно другого тела или, иначе говоря, изменение положения одного тела по отношению к другому называется *механическим движением*. Обычно теоретическая механика разделяется на три части: статику, кинематику и динамику. Статика — раздел теоретической механики, занимающийся изучением сил и условий их равновесия. Кинематика занимается изучением механического движения без учета действия сил. Динамика изучает законы механического движения в отношении их причин и следствий.

---

* *Ленин В. И.* Полн. собр. соч., 1961, т. 18, с. 181.

Раздел первый
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИКИ

§ 1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Окружающие нас реальные тела отличаются многими качествами и в том числе формой, размерами, материалом, массой. Объектом изучения теоретической механики служат не реально существующие тела, а наделенные идеальными свойствами их абстрактные образы (модели) — материальная точка и абсолютно твердое тело.

Материальной точкой называют геометрическую точку, обладающую массой. Так, при решении некоторых задач механики формой и размерами реальных тел пренебрегают, считая их материальными точками Например, при изучении движения небесных тел астрономы учитывают только массу этих тел и расстояние между ними, а форму и размеры самих тел не принимают во внимание.

Абсолютно твердым телом называют такое материальное тело, в котором расстояние между любыми двумя точками всегда остается неизменным.

Способность тел сопротивляться изменению их формы и размеров называется жесткостью. Следовательно, тела с абсолютно неизменяемыми размерами и формой следует считать не только абсолютно твердыми, но и абсолютно жесткими. Любое абсолютно твердое тело рассматривают как систему материальных точек, неизменно связанных между собой, т. е. лишенных возможности перемещаться относительно друг друга. Далее абсолютно твердое тело кратко будем называть просто твердым телом.

Материальные тела находятся друг с другом во взаимодействии. Взаимодействие тел Солнечной системы обеспечивает гармонию движения планет со своими спутниками вокруг Солнца; реки приводят в движение моторы гидравлических турбин; во время бури морские волны способны разбить корабль или выбросить его на берег; подъемные краны переносят строительные конструкции, материалы и т. д. Во всех этих примерах наблюдается взаимодействие тел.

Мера механического действия одного материального тела на другое называется силой. Сила — величина векторная, она определяется, во-первых, числовым значением (модулем), во-вторых, точ-

кой приложения (местом контакта взаимодействующих тел) и, в-третьих, направлением действия.

Численно равные силы, но приложенные к телу в разных точках и различным образом направленные, производят на тело не одинаковое по своим последствиям действие. Например, нажимая на стул рукой в верхней части спинки в горизонтальном направлении

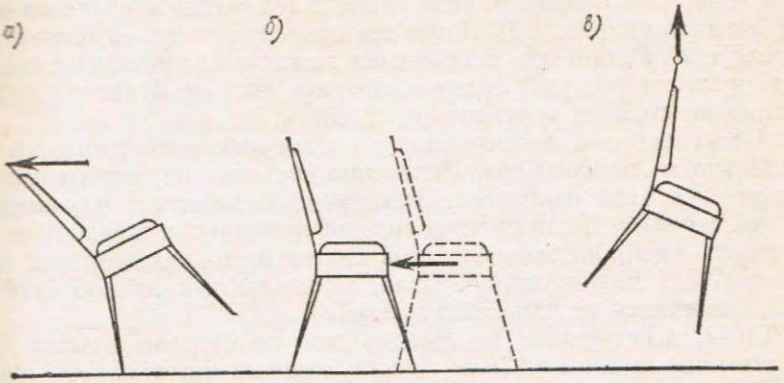


Рис. 1.1

(рис. 1.1, *а*), можно его опрокинуть; если же нажимать на стул в горизонтальном направлении, но в точке на уровне сиденья (рис. 1,1, *б*), то можно сдвинуть стул, а если потянуть стул за спинку вертикально вверх (рис. 1.1, *в*), то стул поднимется.

Из физики известно, что непосредственное измерение числового значения сил производится с помощью различных динамометров.

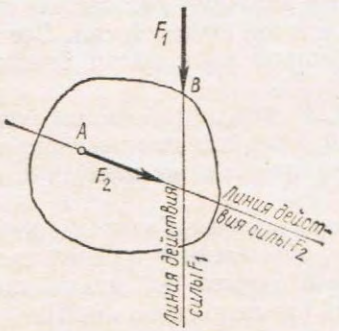


Рис. 1.2

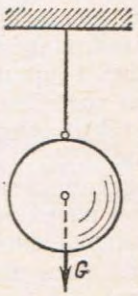


Рис. 1.3

В Международной системе единиц (СИ) сила выражается в ньютонах (сокращенное обозначение Н). 1 Н — небольшая сила, поэтому часто употребляют кратные единицы — килоньютон (1 кН = 10^3 Н) и меганьютон (1 МН = 10^6 Н).

Как всякий вектор, силу можно изобразить графически в виде направленного отрезка (рис. 1.2). Обычно начало или конец век-

тора силы совпадает с точкой приложения силы; прямая, вдоль которой направлен вектор, изображающий силу, называется *линией действия силы;* стрелка на конце вектора показывает, в какую сторону действует сила. Если, например, сказано, что сила действует вертикально, то этим определено положение линии действия и необходимо еще указать, в какую сторону действует сила — вверх или вниз. Так, например, сила тяжести тел всегда направлена вертикально вниз (рис. 1.3). Далее векторы сил условимся обозначать буквами $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{G}$ и др., набранными жирным шрифтом, а их числовые значения (модули) будем обозначать теми же буквами, но набранными светлым курсивом (F, R, G).

Несколько сил, действующих на какое-либо одно твердое тело, называются *системой сил*. Различные системы сил, производящие на твердое тело одинаковое механическое действие, называются *эквивалентными*. Если систему сил, приложенных к твердому телу, заменить иной, но эквивалентной системой, то механическое состояние тела не нарушится. Сила, эквивалентная данной системе сил, называется ее *равнодействующей*.

Силы, действующие на твердое тело со стороны других тел, называются *внешними*. Силы, действующие на материальные точки твердого тела со стороны других точек того же тела, называются *внутренними*.

§ 1.2. АКСИОМЫ СТАТИКИ

Как указывалось выше, статика занимается изучением условий равновесия сил, но, кроме того, статика занимается задачами *сложения сил*, т. е. заменами заданных систем сил более простыми эквивалентными системами, а также задачами *разложения сил*, т. е. заменами заданной силы эквивалентной системой сил. Все теоремы и методы, с помощью которых решаются эти задачи, основываются на нескольких аксиомах.

Аксиома 1 (принцип инерции). *Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.*

Эта аксиома, сформулированная впервые Галилеем, называется принципом инерции потому, что прямолинейное и равномерное движение материальной точки, происходящее без воздействия сил, называется движением по инерции (от латинского «inertia» — бездеятельность).

Состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения точки называют *равновесием*. Так как твердое тело есть неизменяемая система материальных точек, то рассмотренная аксиома справедлива и для него. Если точка или твердое тело под действием системы сил находится в равновесии, то такую систему сил называют *уравновешенной*.

Аксиома 2 (условие равновесия двух сил). *Две силы, приложенные к твердому телу, образуют уравновешенную систему тогда и*

только тогда, когда (рис. 1.4) *они равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны.*

Аксиома 3 (принцип присоединения и исключения уравновешенных сил). *Действие данной системы сил на твердое тело не изменится, если к ней добавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.*

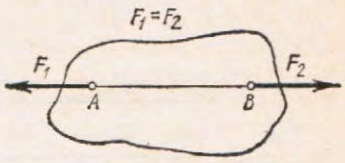


Рис. 1.4

Иначе говоря, если к данной системе сил присоединить уравновешенные силы или из данной системы сил их исключить, то вновь образованная система сил эквивалентна данной.

Следствие 1. *Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии ее действия в любую другую точку, действие силы на тело при этом не нарушится.*

Доказательство. Допустим, что к твердому телу в точке A приложена сила $\boldsymbol{F}$ и требуется перенести эту силу в точку B, лежащую на линии действия силы (рис. 1.5, *а*). Приложим к телу в точке B вдоль линии действия силы $\boldsymbol{F}$ уравновешенные силы $\boldsymbol{F}'$ и $\boldsymbol{F}''$ (рис. 1.5, *б*), численно равные силе $\boldsymbol{F}$. По аксиоме 3 действие силы $\boldsymbol{F}$ при этом не нарушится.

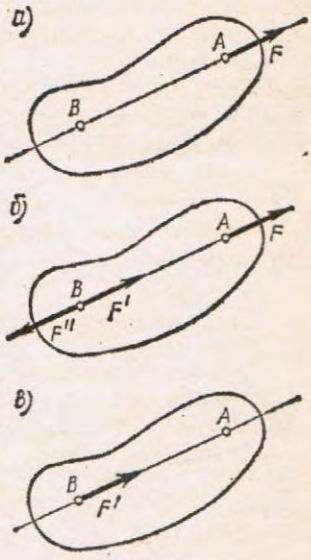


Рис. 1.5

Согласно второй аксиоме, силы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}''$ уравновешивают друг друга, а по третьей аксиоме их можно исключить из получившейся системы сил (рис. 1.5, *в*). Оставшаяся сила $\boldsymbol{F}'$, приложенная в точке B, численно равна силе $\boldsymbol{F}$ ($F=F'$) и направлена вдоль той же прямой, т. е. векторы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ равны ($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'$), а это равносильно тому, что сила $\boldsymbol{F}$ из точки A вдоль линии ее действия перенесена в точку B.

Следствие 1 можно коротко сформулировать так: *сила, приложенная к твердому телу, — скользящий вектор.*

Необходимо заметить, что это свойство вектора силы справедливо только в теоретической механике (механике абсолютно твердого тела). Допустим, к телу AB приложены две численно равные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, как показано на рис. 1.6, *а*; если силу $\boldsymbol{F}_1$ перенести вдоль линии ее действия из точки A в точку B, а силу $\boldsymbol{F}_2$ — из точки B в точку A (рис. 1.6, *б*), то с точки зрения теоретической механики действие сил на тело не изменилось. При действии сил на реальные тела такой перенос может значительно изменить форму и размеры тела, а иногда и вообще невозможен, например в том случае, если тело AB — цепь.

Аксиома 4 (правило параллелограмма). *Две приложенные к*

точке тела силы имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Операцию замены системы сил их равнодействующей называют сложением сил. Таким образом, четвертая аксиома постулирует

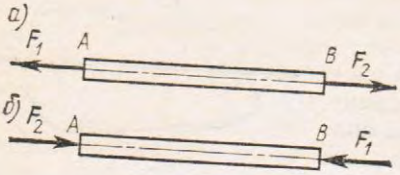


Рис. 1.6

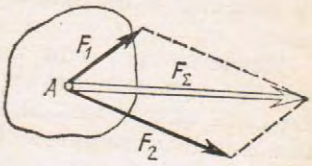


Рис. 1.7

геометрическое сложение двух сил, приложенных к точке тела, где равнодействующая $\boldsymbol{F}_\Sigma$, изображаемая диагональю параллелограмма, построенного на силах $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ (рис. 1.7), иначе называется геометрической *суммой* этих сил.

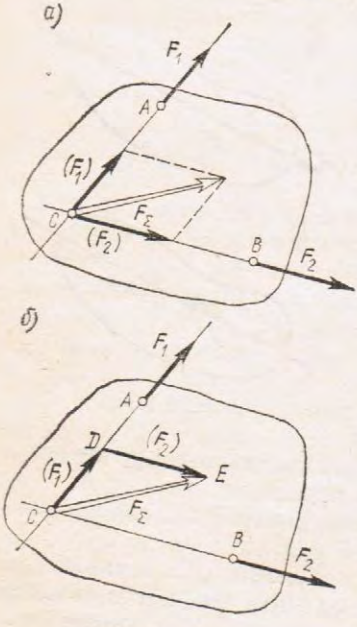


Рис. 1.8

Правило параллелограмма сил (четвертая аксиома) выражается векторным равенством:

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_\Sigma. \qquad (1.1)$$

Если две силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ приложены к разным точкам тела, но линии их действия лежат в одной плоскости, то, имея в виду, что сила — скользящий вектор, можно, как показано на рис. 1.8, *а*, силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ из точек A и B по линиям действия перенести в точку C их пересечения (модули перенесенных векторов указаны в скобках), а затем сложить по правилу параллелограмма.

Из правила параллелограмма может быть получено правило треугольника сложения двух сил, действующих на тело в одной плоскости (рис. 1.8, *б*). Проведя линии действия заданных сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ и определив точку C пересечения этих линий, строим треугольник CDE, в котором $\overrightarrow{CD} = \boldsymbol{F}_1$ и $\overrightarrow{DE} = \boldsymbol{F}_2$, а $\overrightarrow{CE} = \boldsymbol{F}_\Sigma$, причем сторона CE называется замыкающей стороной силового треугольника.

Правило треугольника формулируется так: *равнодействующая двух сил, приложенных к точке тела, равна замыкающей стороне треугольника, две другие стороны которого равны данным силам.*

Основываясь на правиле параллелограмма, можно поставить и обратную задачу — задачу разложения данной силы на две составляющие, приложенные к той же точке. Для решения этой задачи достаточно на заданном векторе силы, как на диагонали, построить параллелограмм, стороны которого и будут искомыми составляющими. Чтобы задачу разложения силы на две составляющие сделать определенной (на заданной диагонали можно построить бесчисленное количество параллелограммов), кроме силы, которую требуется разложить, необходимо задать дополнительные условия, например направления искомых составляющих. В такой постановке задача разложения силы по правилу параллелограмма встречается чаще всего.

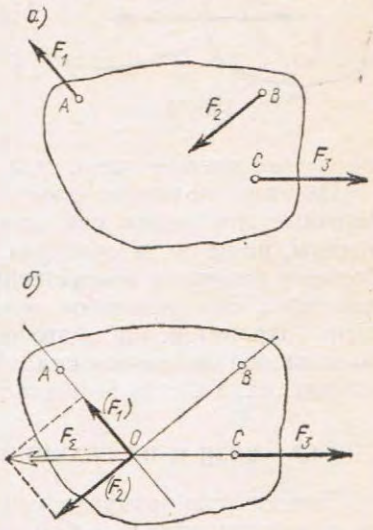


Рис. 1.9

Следствие 2 (теорема о равновесии трех сил). *Если три непараллельные силы, лежащие в одной плоскости, образуют уравновешенную систему, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.*

Доказательство. На твердое тело в точках A, B и C действуют силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ (рис. 1.9, *а*), линии их действия лежат в одной плоскости; силы образуют уравновешенную систему (тело под действием этих сил находится в равновесии).

Так как силы лежат в одной плоскости, то линии действия двух любых из них обязательно пересекутся. Проведем линии действия сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$ до пересечения в точке O, перенесем в нее эти силы (рис. 1.9, *б*) и сложим по правилу параллелограмма. Равнодействующая $\boldsymbol{F}_\Sigma$ эквивалентна силам $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Таким образом, теперь на тело действуют две силы: $\boldsymbol{F}_\Sigma$ и $\boldsymbol{F}_3$, но равновесие тела не нарушилось, значит силы $\boldsymbol{F}_\Sigma$ и $\boldsymbol{F}_3$ уравновешивают друг друга. Согласно аксиоме 2, эти силы действуют вдоль одной прямой; следовательно, линия действия силы $\boldsymbol{F}_3$ проходит также через точку O — точку пересечения линий действия двух других сил. Теорема доказана. Пересечение линий действия трех сил в одной точке — необходимое условие равновесия трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, но не достаточное. Линии действия трех сил могут пересекаться в одной точке, но система сил может и не быть уравновешенной.

Аксиома 5 (закон действия и противодействия). *Силы взаимодействия двух твердых тел друг на друга равны по модулю и направлены в противоположные стороны.*

В физике эта аксиома известна как третий закон Ньютона. Пятая аксиома имеет важное значение в механике. Если тело *1* действует

на тело *2* с силой $\boldsymbol{F}_{12}$ (рис. 1.10), то тело *2* действует на тело *1* с точно такой же по модулю силой $\boldsymbol{F}_{21}$, но направленной в прямопротивоположную сторону. Хотя силы $\boldsymbol{F}_{12}$ и $\boldsymbol{F}_{21}$ равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны, они не уравновешивают друг друга, так как приложены к разным телам.

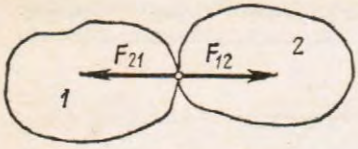


Рис. 1.10

Аксиома 6 (принцип отвердевания). *Если деформируемое тело находится в равновесии, то равновесие этого тела не нарушится, если, не изменяя формы, размеров, положения в пространстве, оно превратится в абсолютно твердое тело, т. е. затвердеет.*

Из этого принципа следует, что условия, необходимые и достаточные для равновесия данного абсолютно твердого тела, необходимы, но не достаточны для равновесия деформируемого тела, по форме и размерам тождественного с данным. Например, если под действием сил резиновое тело находится в равновесии, то равновесие сохранится, когда это тело станет абсолютно твердым. Однако если под действием сил абсолютно твердое тело находилось в равновесии, то, став резиновым, оно теряет равновесное состояние.

§ 1.3. СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Твердое тело называется *свободным*, если оно может перемещаться в пространстве в любом направлении. В качестве примера свободного тела приведем летящий воздушный шар или ракету в космосе. Твердое тело называется *несвободным*, если его перемещение в пространстве ограничено какими-либо другими телами.

Все тела, которые так или иначе ограничивают перемещение данного тела, называются его *связями*. Например, стул, стоящий на полу (см. рис. 1.1),— несвободное тело; перемещение стула ограничивается полом, для стула пол является связью. Движение шара (см. рис. 1.3) ограничивается нитью; следовательно, для шара связью служит нить.

Как отмечалось выше (см. с. 5), в природе нет абсолютного покоя и тела, стремясь под действием внешних сил перемещаться в пространстве, сами действуют на препятствующие этому перемещению связи. Например, стул (см. рис. 1.1), находясь под действием силы тяжести, давит на пол, а шар (см. рис. 1.3) натягивает нить. Согласно пятой аксиоме, одновременно с возникновением действия тела на связь возникает равная по модулю, но направленная в противоположную сторону сила противодействия связи, приложенная к телу. Действие связи на тело называется силой реакции связи или реакцией связи [от латинского «re...» (против) + «actio» (действие), т. е. ответ на внешнее действие].

Таким образом, на несвободное тело действуют две группы внешних сил: *заданные силы* и *реакции связей*. К заданным относятся все силы, кроме реакций связей. Чаще всего заданные силы яв-

ляются *активными*, т. е. силами, которые могут вызвать движения тел, например сила тяжести, сила тяги, сила электрического взаимодействия и т. д.

При решении задач статики активные силы, как правило, бывают наперед заданными, а реакции связей неизвестны и их требуется определить. *Задача определения реакций связей — одна из основных задач статики.* Определяя реакции связей, необходимо иметь в виду, что они приложены к телу в точках соприкосновения тела со связью и направлены в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Направление реакции связи зависит от вида связи, ее расположения относительно тела и характера соприкосновения или соединения связи с телом.

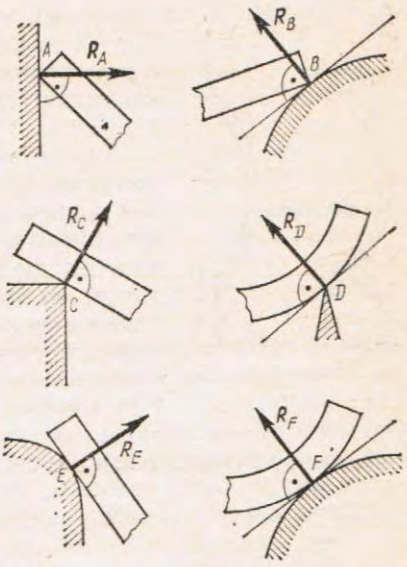


Рис. 1.11

Рассмотрим некоторые разновидности связей и правила определения их реакций.

Свободное опирание тела о связь. Примеры этой разновидности связи показаны на рис. 1.11, где тело изображено в виде бруска, а связь заштрихована. Поверхности тела и связи в местах их соприкосновения условимся считать абсолютно гладкими. Во всех случаях связь препятствует движению тела в направлении, перпендикулярном опорной поверхности. Поэтому при опирании тела о связь своим ребром реакция связи направлена перпендикулярно плоской (R_A) или криволинейной (R_B) поверхности связи; при опирании тела о ребро связи своей поверхностью (плоской или криволинейной) реакция связи направлена перпендикулярно поверхности тела (R_C и R_D); при опирании поверхности тела о поверхность связи реакция связи направлена перпендикулярно общей касательной обеих поверхностей (R_E и R_F).

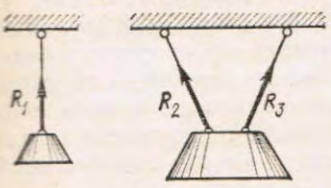


Рис. 1.12

Гибкая связь. Примерами такой связи служат нити или цепи, которые условно считаем абсолютно нерастяжимыми и невесомыми. Гибкая связь препятствует передвижению тела только в натянутом состоянии. Поэтому реакции нитей или цепей всегда направлены вдоль самих связей в сторону от тела к связи (R_1, R_2, R_3 на рис. 1.12)

Стержневая связь. Вместо гибкой связи часто употребляют абсолютно жесткие (недеформируемые) и условно принимаемые не-

весомыми стержни с шарнирными креплениями на концах. Шарнирные крепления позволяют стержню занимать положение, при котором действие на него со стороны удерживаемого тела всегда направлено по прямой, проходящей через оси шарниров (вспомните аксиому 2). Например, груз M, прикрепленный к невесомому криволинейному стержню AB (в точках A и B — цилиндрические шарниры), находится в равновесии в положении, показанном на рис. 1.13, *а*, так как только в этом положении на стержень действует уравновешенная система двух сил: $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ (рис. 1.13, *б*).

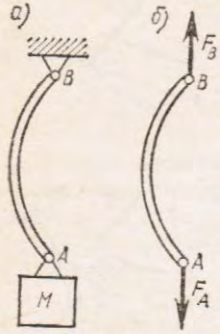


Рис. 1.13

Таким образом, реакции стержневых связей направлены вдоль прямой, проходящей через оси концевых шарниров. Обычно стержни делают прямолинейными и в этих случаях реакции направлены вдоль стержня. Если стержень растянут, то его реакция направлена в сторону от тела к стержню ($\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{R}_E$ на рис. 1.14, *а*, *б*). Если стержень сжат, то его реакция направлена в сторону от стержня к телу ($\boldsymbol{R}_C$, $\boldsymbol{R}_D$ на рис. 1.14, *б*). Как видим, в отличие от гибкой связи прямолинейные стержни могут воспринимать со стороны тела не только растягивающие, но и сжимающие силы.

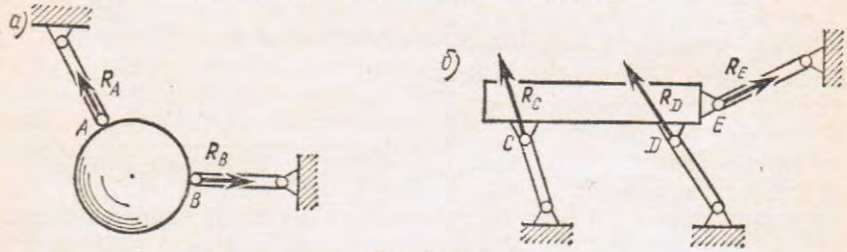


Рис. 1.14

Шарнирно-подвижная опора представляет собой видоизменение свободного опирания. Тело (брус) опирается на опорную поверхность не непосредственно, а через шарнир, поставленный на катки (рис. 1.15, *а*, *б*). Такая опора препятствует перемещению тела только в направлении, перпендикулярном опорной поверхности катков (вдоль опорной поверхности шарнир вместе с прикрепленным к нему телом может перемещаться).

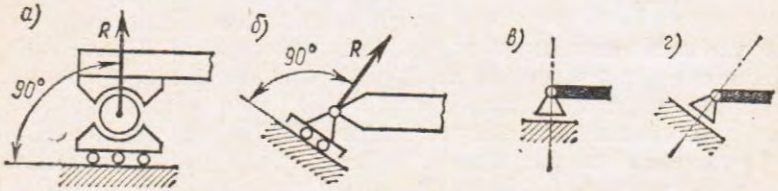


Рис. 1.15

Реакция $\boldsymbol{R}$ шарнирно-подвижной опоры направлена по пересекающей ось шарнира прямой, перпендикулярной его опорной поверхности (рис. 1.15). Условное обозначение шарнирно-подвижной опоры согласно ГОСТ 2.770—68 показано на рис. 1.15, *в*, *г*.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.16) дает возможность телу свободно поворачиваться около шарнира, но препятствует поступательному перемещению тела в любом направлении, перпендикуляр-

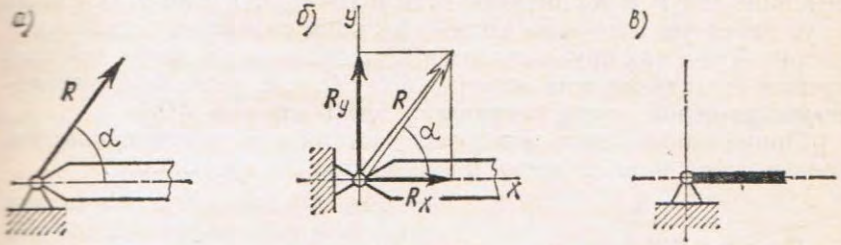


Рис. 1.16

ном оси шарнира. Следовательно, нагруженное тело может действовать на шарнирно-неподвижную опору в любом направлении и направление реакции шарнирно-неподвижной опоры поэтому, как правило, заранее не известно — реакция $\boldsymbol{R}$ (рис. 1.16, *а*) может быть направлена в любом направлении в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Таким образом, при определении реакции шарнирно-неподвижной опоры возникают две неизвестные величины — модуль силы $\boldsymbol{R}$ и ее направление, т. е. угол, образуемый линией действия силы с какой-либо заданной или выбранной линией (осью координат), например угол α на рис. 1.16, *а*. Воспользовавшись тем обстоятельством, что согласно четвертой аксиоме любую силу можно представить в виде двух составляющих, направление которых задано заранее, обычно заменяют искомую реакцию $\boldsymbol{R}$ двумя составляющими $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_y$, перпендикулярными друг другу (рис. 1.16, *б*). По найденным составляющим $\boldsymbol{R}_x$ и $\boldsymbol{R}_y$ легко найти реакцию $\boldsymbol{R}$ (подробно об этом см. в § 1.4). На рис. 1.16, *в* показано условное изображение шарнирно-неподвижной опоры согласно ГОСТ 2.770—68.

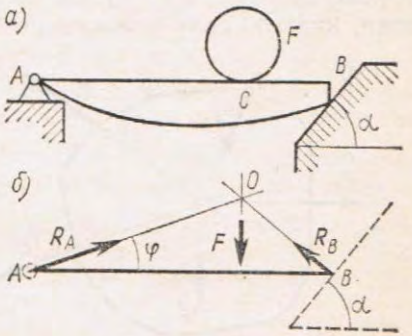


Рис. 1.17

Если же на тело кроме реакции $\boldsymbol{R}$ шарнирно-неподвижной опоры действуют еще две непараллельные силы, то реакция $\boldsymbol{R}$ может быть найдена с помощью теоремы о равновесии трех сил (см. следствие 2 на с. 11).

Представим, что на горизонтально расположенный брус AB, собственной массой которого пренебрегаем, действует вертикальная

нагрузка $\boldsymbol{F}$, приложенная в точке C бруса (рис. 1.17, *а*). Левый конец бруса A прикреплен к опоре шарниром, а правый B опирается на гладкую наклонную плоскость.

Изобразим брус схематично отрезком AB, как на рис. 1.17, *б*, и приложим к нему в точке C вертикальную силу $\boldsymbol{F}$. В точке B со стороны наклонной плоскости к брусу приложена ее реакция $\boldsymbol{R}_B$, направленная перпендикулярно плоскости (см. с. 13); линии действия сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{R}_B$ пересекаются в точке O. Кроме этих сил на брус действует еще одна сила — реакция шарнирно-неподвижной опоры. А так как брус находится в равновесии, то линия действия третьей силы также пройдет через точку O, т. е. реакция $\boldsymbol{R}$ шарнирно-неподвижной опоры направлена вдоль отрезка AO.

Примененный здесь метод рассуждения называется *принципом освобождения тела от связей и замены связей их реакциями.*

Глава 2
ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

§ 1.4. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ В ТОЧКЕ ТЕЛА

Система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называется плоской системой сходящихся сил. Если силы сходящейся системы приложены к разным точкам тела (рис.1.18, *а*), то, по первому следствию из аксиом статики, каждую силу можно перенести в точку O пересечения линий

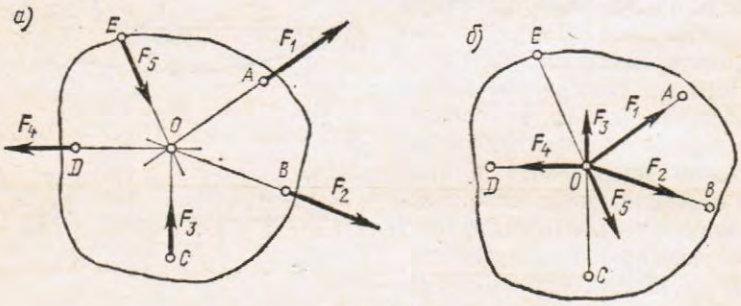


Рис. 1.18

действия и получить эквивалентную систему сил, приложенных к одной точке (рис. 1.18, *б*).

Две силы, приложенные к одной точке тела, образуют простейшую плоскую систему сходящихся сил (две пересекающиеся прямые всегда лежат в одной плоскости). Сложение двух сходящихся сил, или, иначе говоря, определение их геометрической суммы — равнодействующей — производится согласно четвертой аксиоме (см. § 1.2) по правилу параллелограмма.

Задачу сложения двух сходящихся сил можно решить либо графическим методом (построением), либо вычислением.

При графическом решении с помощью масштабной линейки, угольника, циркуля и транспортира строят параллелограмм сил. При построении необходимо соблюдать одинаковую пропорцию между модулями заданных сил и длинами отрезков, с помощью которых эти силы изображаются. Например, если различные силы F_k изображаются отрезками соответствующих длин l_k, то во всех случаях должна соблюдаться зависимость

$$F_k = \mu_F l_k, \qquad (1.2)$$

где μ_F — постоянный для данного построения коэффициент пропорциональности, называемый масштабом сил; он представляет собой число единиц силы в единице длины отрезка и выражается в Н/мм, кН/мм и т. д.

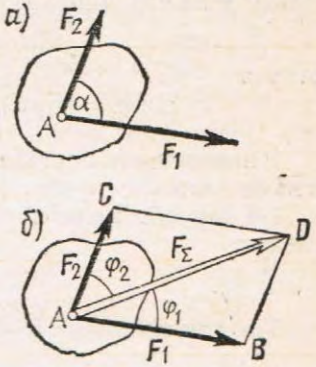


Рис. 1.19

При решении задачи вычислением используют соответствующие геометрические теоремы и тригонометрические зависимости.

Пусть даны приложенные к точке A какого-либо тела две силы F_1 и F_2, линии действия которых пересекаются под углом α (рис. 1.19, *а*), и требуется определить их равнодействующую F_Σ — найти ее модуль и направление.

Графическое решение. Назначив масштаб сил μ_F, определив длины отрезков $l_1 = AB$ и $l_2 = AC$, соответствующие модулям заданных сил F_1 и F_2 ($l_1 = AB = F_1/\mu_F$ и $l_2 = AC = F_2/\mu_F$), строим векторы $F_1 = \overrightarrow{AB}$ и $F_2 = \overrightarrow{AC}$ под углом α, который откладываем по транспортиру (рис. 1.19, *б*). Проводим $CD \parallel AB$ и $BD \parallel AC$. В образовавшемся параллелограмме $ABDC$ диагональ $\overrightarrow{AD} = F_\Sigma$. Измерив длину отрезка AD и умножив на масштаб сил, найдем модуль равнодействующей F_Σ ($F_\Sigma = \mu_F AD$). Направление F_Σ фиксируют углы $\varphi_1 = (\widehat{F_1, F_\Sigma})$ и $\varphi_2 = (\widehat{F_2, F_\Sigma})$, их значения находим с помощью транспортира.

Решение вычислением. Исходя из заданных условий, на векторах F_1 и F_2 без строгого соблюдения масштаба сил строим параллелограмм $ABDC$ с диагональю AD, которая изображает искомую равнодействующую F_Σ (рис. 1.19, *б*). Учитывая, что длины сторон и диагонали параллелограмма пропорциональны модулям сил, из $\triangle ABD$ по теореме косинусов находим

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\widehat{ABD}},$$

где $\cos\widehat{ABD} = \cos(\pi/2 - \alpha) = -\cos\alpha$. Через исходные данные модуль

10302

БИБЛИОТЕКА
Специально экспериментальный
завод-техникум

равнодействующей

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \qquad (1.3)$$

Направление равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$, т. е. углы $\varphi_1 = (\widehat{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_\Sigma})$ и $\varphi_2 = (\widehat{\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_\Sigma})$ определяются по теореме синусов из того же ΔABD. Ввиду того что $\widehat{ADB} = \varphi_2$ и $\sin \widehat{ABD} = \sin(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$,

$$F_1/\sin\varphi_2 = F_2/\sin\varphi_1 = F_\Sigma/\sin\alpha,$$

откуда

$$\sin\varphi_1 = (F_2/F_\Sigma)\sin\alpha \text{ и } \sin\varphi_2 = (F_1/F_\Sigma)\sin\alpha. \qquad (1.4)$$

В зависимости от некоторых значений угла $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2})$ возникают четыре частных случая.

1-й случай. Если $\alpha = 0$, то $\cos\alpha = \cos 0 = 1$ и из формулы (1.3) следует

$$F_\Sigma = F_1 + F_2. \qquad (1.5)$$

Так как $\sin\alpha = \sin 0 = 0$, то из формулы (1.4) находим

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Таким образом, *равнодействующая двух сил, направленных вдоль одной прямой и в одну сторону, действует в ту же сторону и ее модуль равен сумме модулей составляющих сил.*

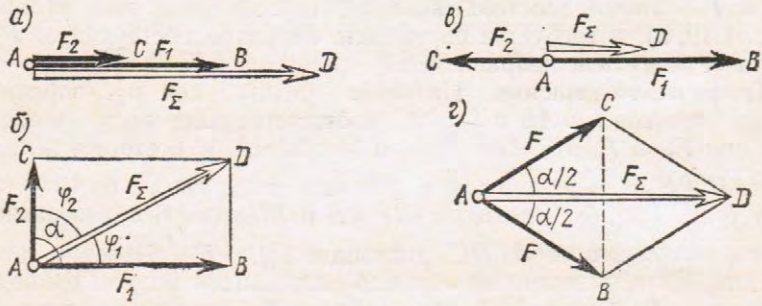


Рис. 1.20

Полученные результаты просто получить и непосредственно из рис. 1.20, *а*.

2-й случай. Если $\alpha = \pi/2 = 90°$, то $\cos\alpha = \cos(\pi/2) = 0$, $\sin\alpha = \sin\pi/2 = 1$ и формула (1.3) приобретает вид

$$F_\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \qquad (1.6)$$

а формула (1.4) — вид

$$\sin\varphi_1 = F_2/F_\Sigma \text{ и } \sin\varphi_2 = F_1/F_\Sigma. \qquad (1.7)$$

Формулы (1.6) и (1.7) могут быть получены и непосредственно из рис. 1.20, *б*.

3-й случай. Если $\alpha=\pi=180°$, то $\cos\alpha=\cos\pi=-1$, $\sin\alpha=\sin\pi=0$ и из формулы (1.3) следует

$$F_\Sigma=F_1-F_2, \tag{1.8}$$

а из формул (1.4) находим $\varphi_1=0$ и $\varphi_2=\pi=180°$.

Значит, *равнодействующая двух сил, направленных вдоль одной прямой, но в противоположные стороны, действует в сторону большей силы и ее модуль равен разности модулей составляющих сил.*

Непосредственно из рис. 1.20, *в* получаем тот же результат.

4-й случай. Он возникает при сложении двух равных по модулю сил. Допустим, что $F_1=F_2=F$, тогда формула (1.3) примет вид

$$F_\Sigma=F\sqrt{2+2\cos\alpha}$$

или окончательно (исходя из известной зависимости $\cos(\alpha/2)=\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}$)

$$F_\Sigma=2F\cos(\alpha/2). \tag{1.9}$$

Из формулы (1.4) с учетом выражения (1.9), а также зависимости $\sin\alpha=2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ получим

$$\sin\varphi_1=\sin\varphi_2=\sin(\alpha/2),$$

откуда следует, что $\varphi_1=\varphi_2=\alpha/2$.

Легко видеть, что при сложении двух равных по модулю сил, приложенных к точке под углом α друг к другу, образуется ромб (рис. 1.20, *г*) и полученные выше результаты вытекают непосредственно из его геометрических свойств.

§ 1.5. СЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим систему сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{F}_5$, приложенных в точке A (рис. 1.21, *а*). Требуется найти их равнодействующую.

Применив правило силового треугольника, сложим силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Для этого из конца вектора $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{F}_1$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{F}_2$ и, соединив точки A и C, получим геометрическую сумму (равнодействующую) сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$:

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{F}_{1-2}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

Теперь сложим силу $\boldsymbol{F}_{1-2}$ с силой $\boldsymbol{F}_3$. Для этого из конца вектора $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{F}_2$ отложим вектор $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{F}_3$ и, соединив точки A и D, получим равнодействующую трех сил:

$$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{F}_{1-3}=\boldsymbol{F}_{1-2}+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3.$$

Далее, отложив $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{F}_4$ и соединив точки A и E, получим равнодействующую четырех сил:

$$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{F}_{1-4}=\boldsymbol{F}_{1-3}+\boldsymbol{F}_4=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4.$$

Наконец, отложив $\overrightarrow{EK}=\boldsymbol{F}_5$ и соединив точки A и K, получим искомую равнодействующую:

$$\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{F}_\Sigma=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4+\boldsymbol{F}_5.$$

Из рис. 1.21, *а* видим, что для получения этого окончательного результата не обязательно определять промежуточные равнодействующие $\boldsymbol{F}_{1-2}$, $\boldsymbol{F}_{1-3}$ и т. д., а достаточно из конца вектора $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{F}_1$ отложить вектор $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{F}_2$, из конца вектора $\overrightarrow{BC}$ отложить вектор $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{F}_3$ и т. д., а затем «замкнуть» получившийся *силовой многоугольник* вектором $\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{F}_\Sigma$. При этом вектор равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$ имеет начало в начале первой силы и конец — в конце последней силы.

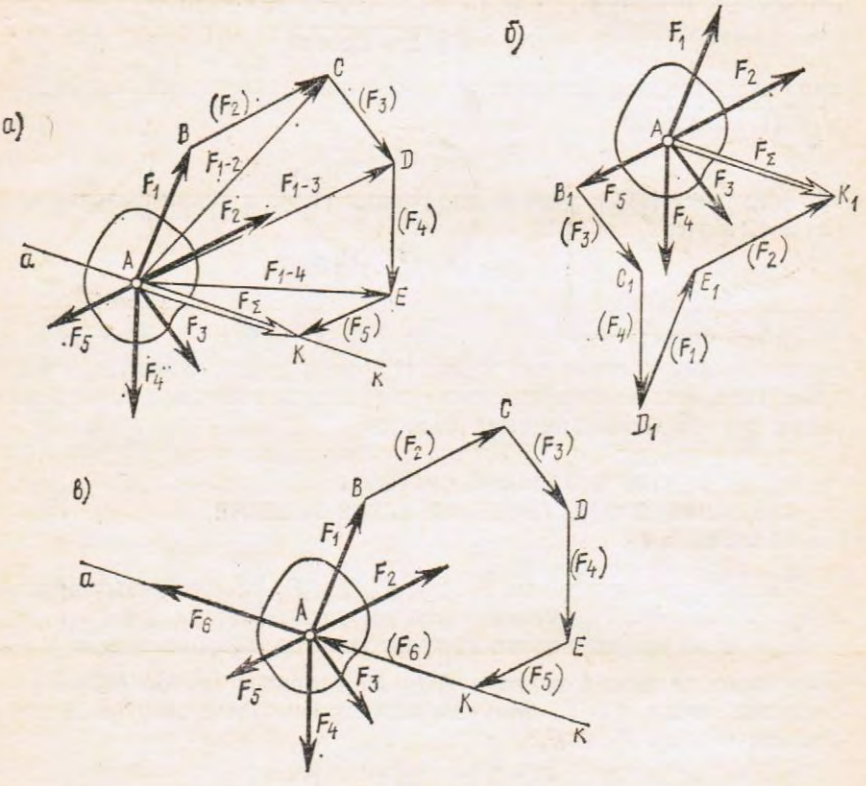


Рис. 1.21

Заметим, что порядок построения сторон силового многоугольника не влияет на окончательный результат. Например, на рис. 1.21, *б* силовой многоугольник $AB_1C_1D_1E_1K_1$ замыкается век-

тором $\overrightarrow{AK_1}=\overrightarrow{AK}$, хотя порядок сложения векторов здесь иной:

$$\overrightarrow{AK_1}=\boldsymbol{F}_\Sigma=\boldsymbol{F}_5+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4+\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

Определение равнодействующей системы сходящихся сил — необходимый этап также и для решения задачи уравновешивания заданной системы. Чтобы уравновесить систему сил, достаточно к ней добавить еще одну силу, численно равную равнодействующей, но направленную в противоположную сторону. Например, требуется уравновесить систему пяти сил (рис. 1.21, *а*). Для этого, построив силовой многоугольник *ABCDEK*, вдоль линии *ak* добавим силу $\boldsymbol{F}_6$, численно равную равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$, но противоположно направленную (рис. 1.21, *в*). Образовавшаяся система сходящихся сил ($\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$, $\boldsymbol{F}_5$, $\boldsymbol{F}_6$) уравновешена. В такой

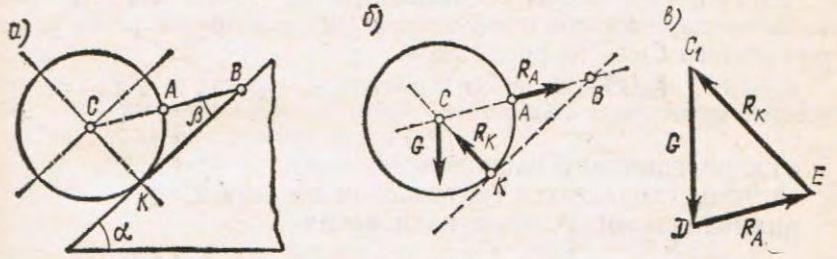


Рис. 1.22

уравновешенной системе любая из сил оказывается уравновешивающей по отношению к остальным.

Таким образом, если построить силовой многоугольник уравновешенной системы сил (рис. 1.21, *в*), то он получится замкнутым, т. е. замыкающий вектор $\boldsymbol{F}_\Sigma=0$, так как конец последнего слагаемого вектора совпадает с началом первого.

Следовательно, замкнутый силовой многоугольник выражает в геометрической форме необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил: *система сходящихся сил уравновешена тогда и только тогда, когда силовой многоугольник замкнут.*

Геометрическое условие равновесия (замкнутый силовой многоугольник) широко используется при решении задач статики.

Пусть, например, требуется определить реакции связей шара, удерживаемого нитью *AB* на наклонной плоскости с углом подъема α (рис. 1.22, *а*). Нить образует с наклонной плоскостью угол β.

На шар кроме силы тяжести $\boldsymbol{G}$, приложенной в центре шара, действуют еще две силы: $\boldsymbol{R}_K$ — реакция наклонной плоскости, направленная ей перпендикулярно, и $\boldsymbol{R}_A$ — реакция нити, направленная вдоль нее, т. е. по линии *AB*. Под действием трех сил шар неподвижен, значит система сил уравновешена и линии действия этих трех сил пересекаются в одной точке *C* — центре шара.

Изобразив силу тяжести шара в виде вектора $\boldsymbol{G}$ и освободив шар от связей, заменим связи их реакциями (рис. 1.22, *б*). Как было

установлено, три силы ($\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_K$) образуют уравновешенную систему, поэтому силовой многоугольник (в данном случае — треугольник) должен быть замкнутым. Из произвольной точки C_1 (рис. 1.22, *в*) построим вектор $\overrightarrow{C_1D}=\boldsymbol{G}$. Направление сил $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_K$ известно, поэтому проведем из точки C_1 луч, перпендикулярный наклонной плоскости, а из точки D — луч, параллельный нити AB; лучи пересекутся в точке E, и мы получим замкнутый треугольник C_1DE, в котором $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{R}_A$ — реакция нити, а $\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{R}_K$ — реакция наклонной плоскости.

Если углы α и β на рис. 1.22, *а* построены по транспортиру, а треугольник C_1DE — после выбора масштаба сил для вектора $\overrightarrow{C_1D}=\boldsymbol{G}$, то задача решена графически.

Задачу легко решить и вычислением по теореме синусов, так как по значениям углов α и β на рис. 1.22, *а* нетрудно найти углы треугольника C_1DE на рис. 1.22, *в*.

Пример 1.1. Если $\alpha=45°$, $\beta=30°$ и $G=60$ Н, то $R_K=66{,}9$ Н, а $R_A=49{,}0$ Н. Проверьте правильность этих ответов.

§ 1.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ МЕТОДОМ ПРОЕКЦИЙ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

Вместо построения силового многоугольника равнодействующую систему сходящихся сил более точно и значительно быстрее находят вычислением с помощью метода проекций, который обычно называется аналитическим.

Проекцией вектора $\boldsymbol{F}$ на ось называется длина направленного отрезка оси, заключенного между двумя перпендикулярами, опу-

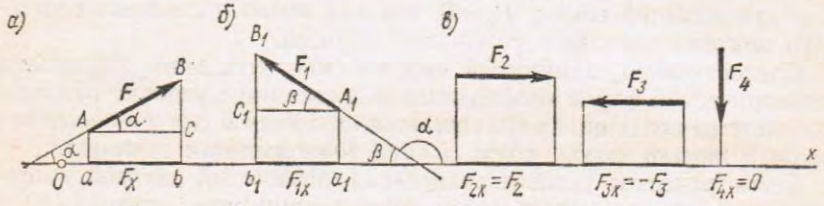


Рис. 1.23

щенными из начала и конца вектора $\boldsymbol{F}$. Договоримся обозначать буквой O начало отсчета величин по оси, а буквами x, y, z — наименования осей; положительный отсчет вести по направлению от O к x (к y или к z), а отрицательный отсчет — в противоположную сторону.

Пусть заданы сила $\boldsymbol{F}$ и ось Ox (рис. 1.23, *а*). Проекция силы $\boldsymbol{F}$ на ось Ox выражена длиной отрезка ab, где, как видно из рисунка, a — проекция точки A начала вектора $\boldsymbol{F}=\overrightarrow{AB}$ и b — проекция точки B конца вектора на ось. Отсчет длины проекции (от a к b) в данном

случае совпадает с положительным направлением оси, значит проекция ab положительна.

Проекцию силы $\boldsymbol{F}$ на ось условимся обозначать той же буквой F с добавлением индекса, обозначающего наименование оси, на которую сила проецируется, т. е. проекцию силы $\boldsymbol{F}$ на ось x обозначим F_x. Если обозначение силы имеет какой-нибудь индекс, то и у обозначения проекции этот индекс сохраняется; например, проекции силы $\boldsymbol{F}_1$ или $\boldsymbol{F}_2$ обозначаются соответственно F_{1x} или F_{2x}.

Из рис. 1.23, *а* видно, что $F_x=ab$, но $ab=AC$, а из $\Delta\, ACB$ следует, что $AC=F\cos\alpha$. Таким образом,

$$F_x = F\cos\alpha, \tag{1.10}$$

т. е. *проекция силы на ось равна произведению модуля этой силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.*

Выражение (1.10) проекции силы через ее модуль является общим для какого угодно расположения силы относительно оси. Например, сила $\boldsymbol{F}_1$ образует (рис. 1.23, *б*) с положительным направлением оси угол α, который $\pi/2<\alpha<\pi$. Следовательно,

$$F_{1x}=F_1\cos\alpha=F_1\cos(\pi-\beta)=$$
$$=-F_1\cos\beta.$$

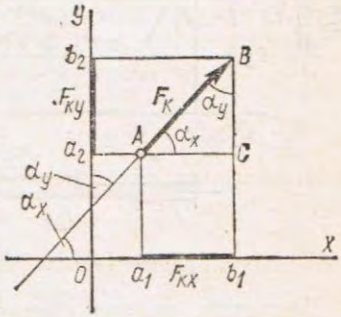


Рис. 1.24

Итак, проекция F_{1x} отрицательна, если отсчет длины проекции от точки a_1 к точке b_1 противоположен положительному направлению оси.

Если $\alpha=0$ (рис. 1.23, *в*), т. е. сила параллельна оси и направлена в сторону положительного отсчета оси, то $\cos 0=1$ и поэтому $F_{2x}=F_2\cos 0=F_2$;
если угол $\alpha=\pi$, т. е. сила параллельна оси, но направлена противоположно положительному отсчету оси, то $\cos\pi=-1$ и $F_{3x}=F_3\cos\pi=-F_3$;
если угол $\alpha=\pi/2$, т. е. сила перпендикулярна оси, то $\cos(\pi/2)=0$ и $F_{4x}=F_4\cos(\pi/2)=0$.

При решении задач, в которых фигурирует плоская система сходящихся сил, как правило, необходимо определять проекции сил на две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy. Все сказанное о проекциях на ось Ox справедливо и для проекций сил на ось Oy.

Так, если сила $\boldsymbol{F}_k$ (рис. 1.24) образует с положительным направлением осей x и y соответственно углы $\alpha_x=(\widehat{\boldsymbol{F}_k, x})$ и $\alpha_y=(\widehat{\boldsymbol{F}_k, y})$, то

$$F_{kx}=F_k\cos\alpha_x \quad\text{и}\quad F_{ky}=F_k\cos\alpha_y. \tag{1.11}$$

По заданным проекциям силы на оси может быть определен и сам вектор силы (ее модуль и направление).

Допустим, проекции F_{kx} и F_{ky} силы известны, то из ΔACB (рис. 1.24) видно, что модуль силы

$$F_k = \sqrt{F_{kx}^2 + F_{ky}^2}. \qquad (1.12)$$

Чтобы найти углы $(\widehat{F_k, x}) = \alpha_x$ и $(\widehat{F_k, y}) = \alpha_y$, образуемые направлением вектора F_k с осями x и y, определим сначала значения

$$\cos\alpha_x = F_{kx}/F_k \text{ и } \cos\alpha_y = F_{ky}/F_k, \qquad (1.13)$$

а затем по таблицам, с помощью счетной логарифмической линейки или электронного микрокалькулятора определим углы α_x и α_y. Заметим, что при определении углов α_x и α_y на счетной логарифмической линейке удобнее находить не косинусы этих углов, а их синусы:

$$\sin\alpha_x = F_{ky}/F_k \text{ и } \sin\alpha_y = F_{kx}/F_k.$$

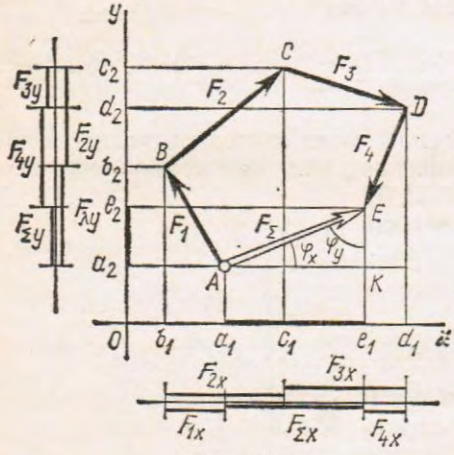


Рис. 1.25

Пример 1.2. Если для силы F проекции $F_x = 12$ Н и $F_y = -16$ Н, то $F = 20$ Н, а $\alpha_x = (\widehat{F, x}) = 53°8'$ и $\alpha_y = (\widehat{F, y}) = 143°8'$. Проверьте правильность ответа, выполнив необходимые построения и вычисления.

Рассмотрим теперь определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций.

Допустим, задана система сходящихся сил и мы построили многоугольник $ABCDE$, в котором замыкающий вектор $\overrightarrow{AE} = F_\Sigma$ — искомая равнодействующая данной системы (рис. 1.25). Поместим силовой многоугольник в системе координатных осей x и y и спроецируем его на эти оси.

Проекции сил на ось x:

$$\text{пр}_x(F_1) = a_1b_1 = F_{1x};\ \text{пр}_x(F_2) = b_1c_1 = F_{2x},$$
$$\text{пр}_x(F_3) = c_1d_1 = F_{3x} \text{ и } \text{пр}_x(F_4) = d_1e_1 = F_{4x}.$$

Проекции сил на ось y:

$$\text{пр}_y(F_1) = a_2b_2 = F_{1y};\ \text{пр}_y(F_2) = b_2c_2 = F_{2y},$$
$$\text{пр}_y(F_3) = c_2d_2 = F_{3y} \text{ и } \text{пр}_y(F_4) = d_2e_2 = F_{4y}.$$

Для наглядности проекции на рис. 1.25 показаны рядом с осями, несколько смещенными относительно них, причем положительные проекции вынесены выше (проекции F_{kx}) или правей (проекции F_{ky}), а отрицательные соответственно ниже или левей.

Одновременно с проецированием сторон силового многоугольника, равных заданным силам, получены и проекции равнодейству-

ющей:

$$\text{пр}_x(\boldsymbol{F}_\Sigma) = a_1e_1 = F_{\Sigma x} \text{ и } \text{пр}_y(\boldsymbol{F}_\Sigma) = a_2e_2 = F_{\Sigma y}.$$

Из рис. 1.25 видно, что

$$a_1e_1 = -a_1b_1 + b_1c_1 + c_1d_1 - d_1e_1$$

и

$$a_2e_2 = a_2b_2 + b_2c_2 - c_2d_2 - d_2e_2,$$

или

$$\left.\begin{aligned} F_{\Sigma x} &= -F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} - F_{4x}, \\ F_{\Sigma y} &= F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} - F_{4y}. \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Равенства (1.14) короче записывают так:

$$F_{\Sigma x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad F_{\Sigma y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \tag{1.15}$$

где Σ — знак суммы, а индекс k принимает последовательно значения от 1 до n по числу сходящихся сил, равнодействующую которых определяем.

Выше отмечалось, что по проекциям силы могут быть найдены ее модуль и направление. Следовательно, модуль равнодействующей

$$F_\Sigma = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \text{ или } F_\Sigma = \sqrt{(\Sigma F_{kx})^2 + (\Sigma F_{ky})^2}. \tag{1.16}$$

Направление равнодействующей, т. е. углы $\varphi_x = (\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma, x})$ и $\varphi_y = (\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma, y})$, образуемые вектором $\boldsymbol{F}_\Sigma$ с осями, находим из формул

$$\cos\varphi_x = F_{\Sigma x}/F_\Sigma \text{ и } \cos\varphi_y = F_{\Sigma y}/F_\Sigma. \tag{1.17}$$

Таким образом, проекция равнодействующей системы сходящихся сил на каждую из осей координат равна алгебраической сумме проекций составляющих сил на ту же ось — уравнения (1.15); модуль равнодействующей системы сходящихся сил равен корню квадратному из суммы квадратов ее проекций на две взаимно перпендикулярных оси — формула (1.16); направление равнодействующей определяется с помощью так называемых направляющих косинусов — уравнения (1.17); причем косинус угла, образуемого вектором равнодействующей с положительным направлением оси, равен отношению проекции равнодействующей на эту ось к модулю самой равнодействующей.

Из выражений (1.15) и (1.16) непосредственно вытекает условие равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме.

Из § 1.6 известно, что равнодействующая уравновешенной системы сходящихся сил $\boldsymbol{F}_\Sigma = 0$. Если $\boldsymbol{F}_\Sigma = 0$, то ее проекции на оси $F_{\Sigma x} = 0$ и $F_{\Sigma y} = 0$; следовательно, равенства (1.15) в этом случае примут вид

$$\Sigma F_{kx} = 0 \quad \text{и} \quad \Sigma F_{ky} = 0. \tag{1.18}$$

К этому же выводу придем и исходя из формулы (1.16): при $F_\Sigma = 0$ $\sqrt{(\Sigma F_{kx})^2 + (\Sigma F_{ky})^2} = 0$ только в том случае, если каждое

слагаемое под знаком корня порознь равно нулю (поскольку каждое из этих слагаемых — число положительное), т. е.

$$(\Sigma F_{kx})^2 = 0 \text{ и } (\Sigma F_{ky})^2 = 0,$$

а отсюда и получаем уравнения (1.18), выражающие в аналитической форме **условие равновесия** плоской системы сходящихся сил: *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на каждую из двух осей координат были равны нулю.*

Любое из двух уравнений, взятое отдельно от другого, является лишь необходимым условием равновесия, но не достаточным (представьте себе, что равнодействующая оказалась направленной перпендикулярно одной из осей), а оба уравнения вместе — уже достаточное условие того, что $\boldsymbol{F}_\Sigma = 0$ и система уравновешена.

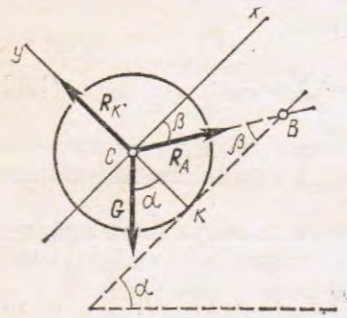


Рис. 1.26

Обычно заранее известно, что заданная система сходящихся сил уравновешена, так как тело под действием этой системы сохраняет состояние покоя. Но среди сил имеются неизвестные, которые необходимо определить. Чаще всего этими неизвестными силами является реакция связей. Заметим, что, для того чтобы задачу с помощью уравнений равновесия (1.18) возможно было решить, число неизвестных не должно превышать двух, т. е. числа уравнений равновесия.

В § 1.6 рассмотрен пример с шаром на наклонной плоскости (см. рис. 1.22). На шар действуют три силы: заданная сила тяжести и численно неизвестные реакции связей $\boldsymbol{R}_к$ (направленная перпендикулярно наклонной плоскости) и $\boldsymbol{R}_A$ (направленная вдоль нити AB). Линии действия этих трех сил пересекаются в центре C шара; следовательно, три силы, приложенные к различным точкам шара, можно заменить эквивалентной системой сил, приложенных к одной точке C (рис. 1.26).

За начало координат примем точку C (центр шара), ось x проведем параллельно наклонной плоскости, а ось y к ней — перпендикулярно, определим проекции сил на оси и составим уравнения (1.18).

Уравнение $\Sigma F_{kx} = 0$ примет в данном случае вид

$$R_A \cos\beta - G\cos(90° - \alpha) = 0,$$

а уравнение $\Sigma F_{ky} = 0$ — вид

$$R_к - R_A \cos(90° - \beta) - G\cos\alpha = 0.$$

Благодаря рациональному выбору положения осей первое уравнение содержит только одно неизвестное R_A, так как проекция силы $\boldsymbol{R}_к$ на ось x получилась равной нулю. Решив уравнения, легко найти значения R_A и $R_к$.

Пример 1.3. Как известно (см. с. 22), при $\alpha=45°$, $\beta=30°$ и $G=60$ Н $R_к=66{,}9$ Н, а $R_A=49$ Н. Подставьте заданные величины в уравнения, решите их и проверьте правильность ответов.

Глава 3
ТЕОРИЯ ПАР СИЛ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1.7. ПАРА СИЛ

Система двух параллельных сил, равных по модулю и направленных в противоположные стороны (рис. 1.27), *называется парой сил (или просто парой)* *.

Известно, что две равные по модулю силы, приложенные к телу вдоль одной прямой и направленные в противоположные стороны, образуют уравновешенную систему (аксиома 2, с. 8). Две прило-

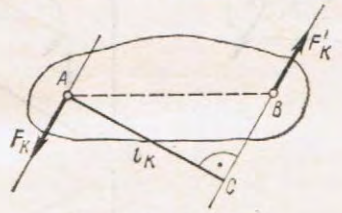


Рис. 1.27

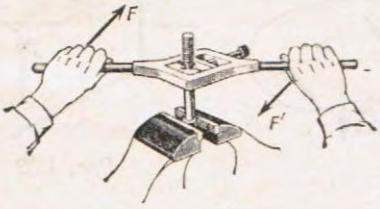


Рис. 1.29

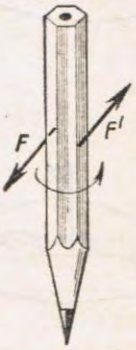


Рис. 1.28

женные к телу равные по модулю силы, направленные в любую сторону вдоль не параллельных, но лежащих в одной плоскости линий действия, можно сложить по правилу параллелограмма и тем самым заменить одной силой — равнодействующей (аксиома 4, с. 9).

Пара сил — и не уравновешенная система и не имеет равнодействующей. Пара сил производит на тело вращательное действие.

Например, зажав карандаш между большим и указательным пальцами, мы можем его вращать, двигая пальцами в противоположные стороны, т.е. прикладывая к карандашу пару сил (рис. 1.28). При нарезании резьбы на болтах ручным способом (рис. 1.29) со стороны рук на клупп также действует пара сил.

Из § 1.13 мы узнаем, что любую плоскую систему сил можно заменить либо одной эквивалентной ей силой (равнодействующей),

* Понятие о паре сил ввел в механику французский ученый Луи Пуансо (1777—1859).

либо одной эквивалентной ей парой сил. Таким образом, наравне с силой *пара сил — простейший элемент статики*.

Условимся обозначать пару сил символом $(\boldsymbol{F}_k, \boldsymbol{F}_k')$. Плоскость, в которой расположены силы, образующие пару сил, называется *плоскостью действия пары сил*.

Как отмечалось выше, пара сил производит на тело вращательное действие, причем если смотреть на плоскость действия пары с какой-либо одной стороны, то пара может поворачивать тело либо против хода часовой стрелки (см. рис. 1.27 и 1.28), либо по ходу часовой стрелки. Количественная мера воздействия пары сил на тело зависит от модуля F_k сил пары и кратчайшего расстояния (см.

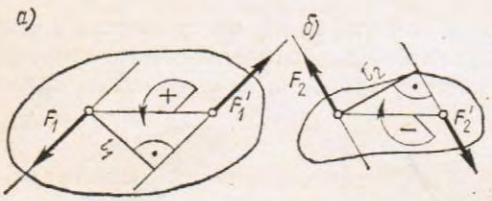


Рис. 1.30

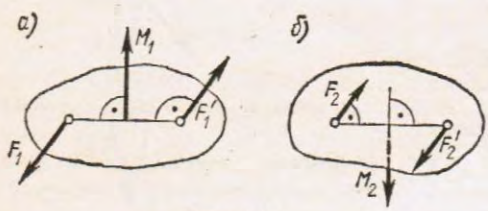


Рис. 1.31

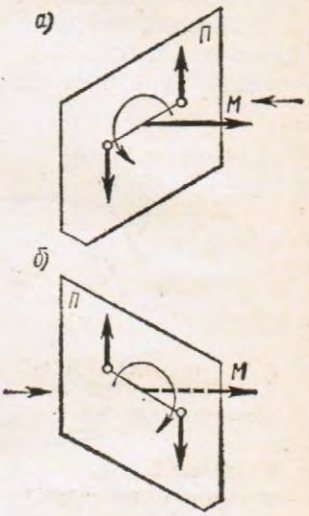


Рис. 1.32

рис. 1.27) между линиями их действия, называемого плечом пары. Чем больше модули F_k сил пары и чем больше длина плеча l_k, тем больший вращательный эффект производит пара на тело.

Вращательный эффект пары измеряется взятым со знаком плюс или минус произведением модуля одной из сил пары на ее плечо. Эта алгебраическая величина называется *моментом пары* и обозначается M, т. е.

$$M = \pm Fl. \tag{1.19}$$

Знак плюс ставится перед числовым значением момента в том случае, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и знак минус, если пара стремится повернуть тело по ходу часовой стрелки. Например, на рис. 1.30, *а* на тело действует пара $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1')$ с моментом $M_1 = F_1 l_1$, а на рис. 1.30, *б* — пара $(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2')$ с моментом $M_2 = -F_2 l_2$.

В Международной системе единиц (СИ) моменты пар выражаются в Н·м или кН·м.

Итак, мы установили, что вращательное действие пары сил на тело зависит от числового значения ее момента, но оно зависит еще и от положения плоскости действия пары. Поэтому момент пары можно рассматривать как векторную величину. Вектор момента пары перпендикулярен плоскости пары, причем если пара стремится повернуть плоскость против хода часовой стрелки, то вектор момента направлен к нам (рис. 1.31, *а*), если же пара поворачивает плоскость по часовой стрелке (рис. 1.31, *б*), то вектор момента пары направлен от нас. Если же на плоскость действия пары смотрят два человека с разных сторон, то оба они построят один и тот же вектор момента. Расположим плоскость $П$ действия пары вертикально и допустим, что один из нас смотрит на эту плоскость справа (рис. 1.32, *а*), а второй — слева (рис. 1.32, *б*). Легко убедиться, что мы оба видим один и тот же вектор момента.

Короче говоря, вектор момента следует восставить с той стороны плоскости, с которой пара представляется поворачивающей эту плоскость против хода часовой стрелки.

Правило определения направления вектора момента называется еще и правилом винта (шурупа) с правой нарезкой. Действительно, если вкручивать такой шуруп в доску (т. е. от нас), мы должны поворачивать отверткой головку шурупа по ходу часовой стрелки; если же хотим выкрутить шуруп из доски (т. е. к нам), но должны поворачивать головку шурупа против хода часовой стрелки.

§ 1.8. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПАР СИЛ

Рассмотрим две теоремы, характеризующие важные свойства пар сил.

Теорема 1. *Пару сил в плоскости ее действия можно переносить в любое новое положение, действие пары на тело при этом не изменится.*

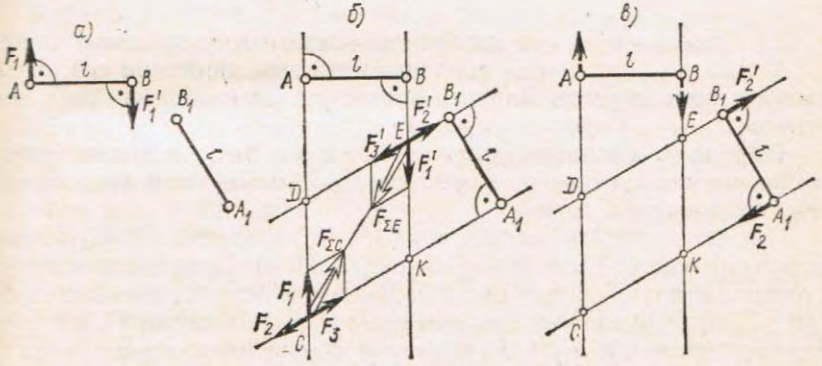


Рис. 1.33

Пусть дана пара ($\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_1'$) с плечом AB и требуется перенести ее так, чтобы плечо AB заняло произвольно выбранное положение A_1B_1 (рис. 1.33, *а*).

Через точки A и B, а также A_1 и B_1 проведем прямые, перпендикулярные соответственно AB и A_1B_1 (рис. 1.33, *б*). Две первые параллельные линии пересекаются с двумя вторыми параллельными и образуют ромб $CDEK$ (так как дано $AB=A_1B_1=l_1$, а параллелограмм, у которого две высоты, проведенные из одной вершины, равны,— ромб). Силу $\boldsymbol{F}_1$ из точки A перенесем вдоль линии действия в точку C, а силу $\boldsymbol{F}_1'$ — из точки B в точку E. В точке C вдоль прямой CA_1 приложим уравновешенную систему сил $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$, равных по модулю F_1; в точке E вдоль прямой DB_1 также приложим уравновешенную системы сил $\boldsymbol{F}_3'$ и $\boldsymbol{F}_2'$, равных по модулю $\boldsymbol{F}_1'$; таким образом, $F_1=F_2=F_3=F_1'=F_2'=F_3'$.

Определим равнодействующую $\boldsymbol{F}_{\Sigma C}$ сил $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_3$, приложенных к точке C, и равнодействующую $\boldsymbol{F}_{\Sigma E}$ сил $\boldsymbol{F}_3'$, $\boldsymbol{F}_1'$, приложенных к точке E. Легко видеть, что силы $\boldsymbol{F}_{\Sigma C}$ и $\boldsymbol{F}_{\Sigma E}$ уравновешивают друг друга, так как они равны между собой по модулю и действуют по диагонали CE ромба $CDEK$ в противоположные стороны. Следовательно, силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_3'$ и $\boldsymbol{F}_1'$, образовавшие уравновешенную систему, можно исключить из рассмотрения. Остаются две силы — сила $\boldsymbol{F}_2$, которую из точки C вдоль линии действия перенесем в точку A_1 (рис. 1.33, *в*), и сила $\boldsymbol{F}_2'$, которую из точки E перенесем в точку B_1. Так как модули F_1, F_1', F_2, F_2' и плечи AB и A_1B_1 равны, то получаем пару F_2, F_2' в положении A_1B_1, эквивалентную паре F_1, F_1' в положении AB. Теорема доказана.

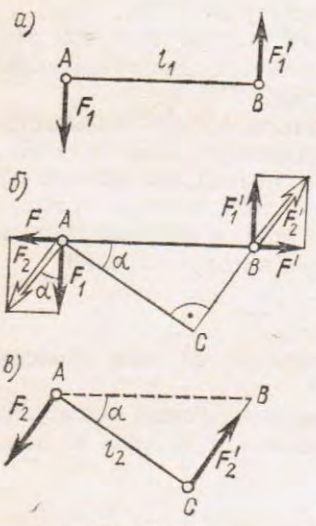


Рис. 1.34

Перенося пару сил в любое положение в плоскости ее действия, мы тем самым переносим и точку приложения вектора момента пары, не меняя его ориентации в пространстве. Значит, *вектор момента пары — свободный вектор*.

Теорема 2. *Две пары, расположенные в одной плоскости, производят на тело одинаковое вращательное действие в том случае, если их моменты равны.*

Предположим, что задана пара (F_1, F_1') с плечом $AB=l_1$. Следовательно, момент пары $M_1=F_1l_1$ (рис. 1.34, *а*). Присоединим к паре уравновешенную систему сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$, действующих вдоль плеча AB (рис. 1.34, *б*), и сложим попарно силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}$, а также $\boldsymbol{F}_1'$ и $\boldsymbol{F}'$. Их равнодействующие $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_2'$ образуют новую пару сил с плечом l_2 (рис. 1.34, *в*). Все произведенные выше преобразования сделаны на основе аксиом статики и не нарушают состояния, в котором находилось тело, т. е. пара $(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2')$ производит на тело такое же действие, как и пара (F_1, F_1'). Остается доказать равенство моментов этих пар сил:

момент пары $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1')$ $M_1 = F_1 l_1$,
момент пары $(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2')$ $M_2 = F_2 l_2$.

Из построений на рис. 1.34, *б* видно, что $l_2 = l_1 \cos\alpha$, $F_2 = F_1 / \cos\alpha$; следовательно, $M_2 = F_2 l_2 = (F_1/\cos\alpha) l_1 \cos\alpha = F_1 l_1$, т. е. $M_2 = M_1$.

Теорема доказана.

Действующие в одной плоскости пары сил, моменты которых равны друг другу, называются статически эквивалентными.

Из доказанных теорем следует, что вращательное действие расположенной в данной плоскости пары зависит только от ее момента, поэтому для задания пары сил достаточно указать числовое значение ее момента, а затем по данному или выбранному плечу можно определить силы пары или по силам подобрать необходимое плечо. Исходя из этого, на рисунках и схемах пары сил изображают иногда просто круговой стрелкой, характеризующей лишь направления вращающего действия. Например, пары $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1')$ и $(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2')$, приложенные к брусу (рис. 1.35, *а*), можно условно изобразить круговыми стрелками, обозначив их M_1 и M_2 (рис. 1.35, *б*).

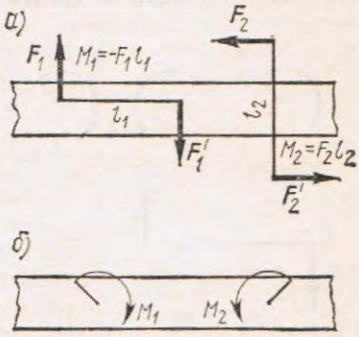


Рис. 1.35

§ 1.9. СЛОЖЕНИЕ ПАР СИЛ. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ПАР

Теорема. *Система пар, действующих на тело в одной плоскости, эквивалентна паре сил с моментом, равным алгебраической сумме моментов пар системы.* Допустим, на тело действуют три пары (рис. 1.36, *а*), моменты которых M_1, M_2 и M_3 известны. Каждую из заданных пар заменим эквивалентной парой соответственно $(\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_1')$, $(\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_2')$, $(\boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_3')$, но с одинаковыми плечами $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = l$, т. е. $M_1 = F_1 l$, $M_2 = -F_2 l$, $M_3 = F_3 l$, и расположим эти пары так, чтобы их силы действовали вдоль двух параллельных прямых (рис. 1.36, *б*).

Как известно (см. с. 18—19), равнодействующая сил, действующих вдоль одной прямой, направлена по той же прямой и модуль ее равен алгебраической сумме составляющих сил. Поэтому, сложив силы, приложенные к точкам A_1, A_2, A_3 и к точкам B_1, B_2, B_3, получим равнодействующую пару $(\boldsymbol{F}_\Sigma, \boldsymbol{F}_\Sigma')$, эквивалентную трем заданным парам (рис. 1.36, *в*). При этом $F_\Sigma = F_1 - F_2 + F_3$.

Момент равнодействующей пары $(\boldsymbol{F}_\Sigma, \boldsymbol{F}_\Sigma')$

$$M_\Sigma = F_\Sigma l,$$

а так как $F_\Sigma = F_1 - F_2 + F_3$, то

$$M_\Sigma = (F_1 - F_2 + F_3)\, l = F_1 l - F_2 l + F_3 l$$

или

$$M_\Sigma = M_1 + M_2 + M_3. \qquad (1.20)$$

Теорема доказана.

Распространяя равенство (1.20) на любое число пар, действующих на тело, можем записать

$$M_\Sigma = \Sigma M_k. \qquad (1.21)$$

Следовательно, для того чтобы сложить любое число пар, действующих на тело в одной плоскости, достаточно алгебраически сложить моменты этих пар. Полученный в результате сложения момент и определяет равнодействующую пару сил.

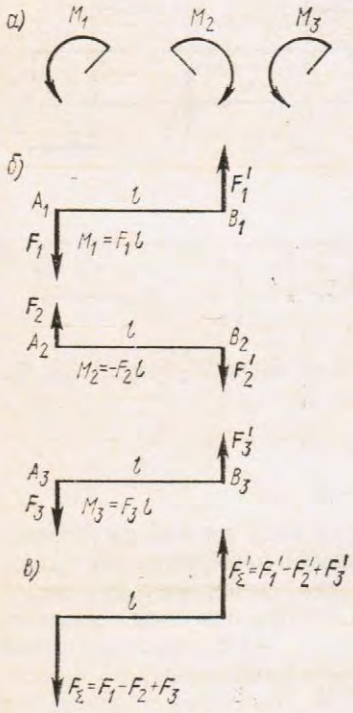


Рис. 1.36

Если в результате сложения пар $M_\Sigma = 0$, то действующие на тело пары сил образуют уравновешенную систему. Следовательно, необходимое и достаточное условие равновесия системы пар выражается одним уравнением

$$\Sigma M_k = 0, \qquad (1.22)$$

т. е. для равновесия системы пар сил, действующих на тело в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма их моментов была равна нулю.

Значит, систему пар или одну пару можно уравновесить только парой.

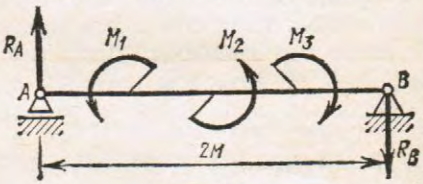


Рис. 1.37

Пример 1.4. Брус AB с левой шарнирно-подвижной опорой и правой шарнирно-неподвижной нагружен тремя парами сил (рис. 1.37), моменты которых $M_1 = 24$ кН·м, $M_2 = 36$ кН·м, $M_3 = -50$ кН·м. Определить реакции опор.

Решение 1. На брус действуют пары сил; следовательно, и уравновесить их можно только парой, т. е. в точках A и B со стороны опор на брус должны действовать реакции опор, образующие пару сил. В точке A у бруса шарнирно-подвижная опора, значит ее реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности, т. е. в данном случае перпендикулярно брусу. Обозначим эту реакцию R_A и направим ее вверх. Тогда в точке B со стороны шарнирно-неподвижной опоры действует также вертикальная сила R_B, но вниз.

2. Исходя из выбранного направления сил пары (R_A, R_B) ее момент $M_O = -R_A \cdot AB$ (или $M_O = -R_B BA$).

3. Составим уравнение равновесия пар сил:

$$\sum M_k = M_1 + M_2 + M_3 + M_O = 0.$$

Подставив в это уравнение значения моментов, получим

$$24 + 36 - 50 - R_A \cdot 2 = 0.$$

Отсюда $R_A = 5$ кН. Так как силы R_A и R_B образуют пару, то $R_B = R_A = 5$ кН.

§ 1.10. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Задолго до появления понятия о паре сил и ее моменте в механике возникло понятие о моменте силы относительно точки *.

Моментом силы относительно точки называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на кратчайшее расстояние от точки до линии действия силы (рис. 1.38), т.е.

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm Fl. \qquad (1.23)$$

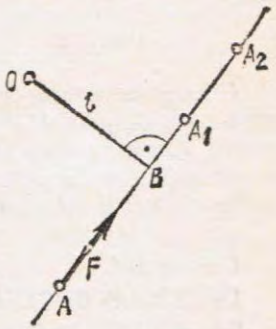


Рис. 1.38

Точка O, относительно которой берется момент силы, называется *центром* момента; $OB = l$ — кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы — называется *плечом силы* относительно данной точки; знак плюс ставится в случае, если сила $\boldsymbol{F}$ стремится повернуть плечо l против хода часовой стрелки, а знак минус — в противоположном случае (правило знаков то же, что и у моментов пар сил). Момент силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O на рис. 1.38 положительный.

Из равенства (1.23) следует, что при $l = 0$, т. е. когда центр моментов O расположен на линии действия силы $\boldsymbol{F}$, $M_O(\boldsymbol{F}) = 0$.

Как известно, сила — скользящий вектор, поэтому при переносе силы $\boldsymbol{F}$ по линиям действия из точки A в любую другую точку A_1, A_2 и т. д. (рис. 1.38) длина плеча не изменится, а значит не изменится и значение момента силы относительно точки.

Между моментом пары и моментами сил пары относительно любой точки существует такая важная зависимость: *алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любой точки — величина постоянная для данной пары и равна ее моменту.*

Возьмем любую пару сил ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$) с плечом l (рис. 1.39), момент этой пары $M = Fl$. Выберем в плоскости пары произвольную точку O и восставим из нее перпендикуляры OB и OA к линиям действия сил $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{F}'$ пары. Определим моменты сил пары относительно точки O:

$$M_O(\boldsymbol{F}) = F \cdot OA \text{ и } M_O(\boldsymbol{F}') = -F' \cdot OB.$$

* Первый, кто обратил внимание на важную роль в механике момента силы относительно точки, был Леонардо да Винчи (1452—1519). Современную трактовку понятия момента силы относительно точки дал П. Вариньон (1654—1722).

Сложим эти моменты сил:

$$M_O(\boldsymbol{F})+M_O(\boldsymbol{F}')=F\cdot OA-F'\cdot OB=F(OA-OB)=Fl,$$

так как $F=F'$ и $OA-OB=l$ — плечу пары.

Таким образом,

$$M_O(\boldsymbol{F})+M_O(\boldsymbol{F}')=M. \qquad (1.24)$$

Так же как и момент пары сил, момент силы относительно точки можно рассматривать как величину векторную.

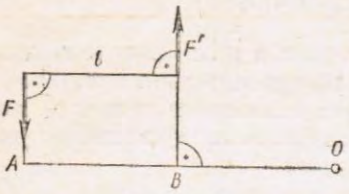


Рис. 1.39

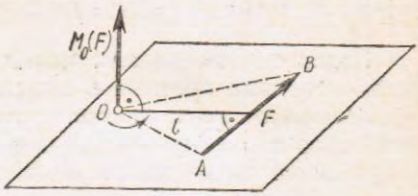


Рис. 1.40

Вектор момента силы $\boldsymbol{F}$ *относительно точки O приложен в той же точке O* (рис. 1.40), *направлен перпендикулярно плоскости действия момента в ту сторону, откуда сила представляется поворачивающей плечо l против хода часовой стрелки, и равен произведению модуля этой силы на плечо.*

Глава 4
ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

§ 1.11. ПРИВЕДЕНИЕ СИЛЫ К ТОЧКЕ

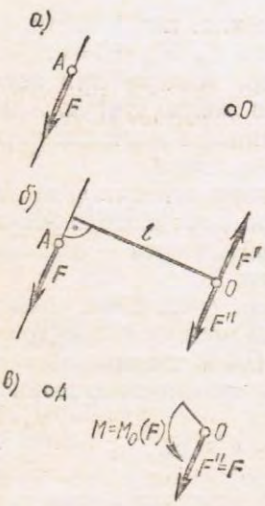


Рис. 1.41

В начале прошлого века Л. Пуансо доказал теорему о параллельном переносе силы в любую заданную или выбранную точку.

Пусть дана сила $\boldsymbol{F}$, приложенная к точке A твердого тела, и ее требуется перенести в точку O (рис. 1.41, *а*). Приложим к телу в точке O (рис. 1.41, *б*) уравновешенную систему сил $\boldsymbol{F}'$ и $\boldsymbol{F}''$, параллельных $\boldsymbol{F}$ и равных ей по модулю (т. е. $F'=F''=F$). Теперь кроме силы F'', приложенной к точке O, образовалась пара сил $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ с моментом $M=Fl$, но и момент данной силы $\boldsymbol{F}$ относительно точки O $M_O(\boldsymbol{F})=Fl$, т. е. $M=M_O(\boldsymbol{F})$.

Таким образом, *всякую силу* $\boldsymbol{F}$, *приложенную к телу в точке A, можно переносить параллельно линии действия в любую точку O, присоединив пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно новой точки ее приложения.*

Операция такого переноса силы называется приведением силы к точке, а появляющаяся при этом пара $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}')$ с моментом $M = M_O(\boldsymbol{F})$ называется *присоединенной парой* (рис. 1.41, *в*). Операция приведения силы к точке имеет глубокий физический смысл.

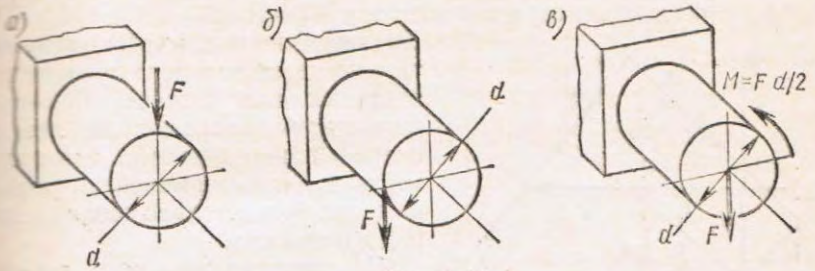


Рис. 1.42

Представим себе заделанный в стену прямой брус (рис. 1.42). Если к концу бруса приложить силу $\boldsymbol{F}$ так, чтобы линия ее действия пересекала ось бруса (рис. 1.42, *а*), то, как показывает опыт, брус можно только изогнуть. Если же к брусу приложить силу $\boldsymbol{F}$, как на рис. 1.42, *б*, то брус можно не только изогнуть, но и скрутить, так как в последнем случае сила $\boldsymbol{F}$ эквивалентна силе $\boldsymbol{F}$ и паре сил с моментом $M = F(d/2)$ (рис. 1.42, *в*) *.

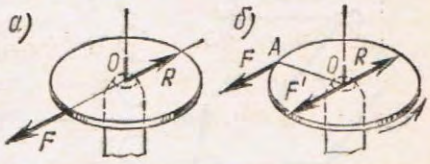


Рис. 1.43

Известно, что колесо невозможно повернуть вокруг оси, если линия действия приложенной силы пересекает ось колеса (рис. 1.43, *а*), так как в этом случае колесо только давит на ось и действующая на колесо сила $\boldsymbol{F}$ уравновешивается реакцией оси $\boldsymbol{R}$. Если же к колесу приложить силу $\boldsymbol{F}$, как показано на рис. 1.43, *б*, то колесо повернется, так как теперь кроме силы давления на ось $\boldsymbol{F}'$ возникает пара сил $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R})$ с вращающим моментом $M = F(d/2)$.

Таким образом, момент силы $\boldsymbol{F}$, приложенной к точке A, относительно точки O (рис. 1.43, *б*) есть не что иное, как скрытый или замаскированный момент присоединенной пары.

§ 1.12. ПРИВЕДЕНИЕ К ТОЧКЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Пусть задана система четырех сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ и $\boldsymbol{F}_4$ (рис. 1.44, *а*), расположенных в плоскости как угодно, т. е. они не параллельны друг другу и линии их действия не пересекаются в одной точке.

* Подробно об этом сказано во втором разделе учебника.

Выберем произвольную точку O — центр приведения — и приведем к нему силу $\boldsymbol{F}_1$, т. е. перенесем силу $\boldsymbol{F}_1$ в точку O (рис. 1.44, *б*) присоединим пару сил с моментом $M_1 = M_O(\boldsymbol{F}_1)$ *. Затем приведем к точке O силу $\boldsymbol{F}_2$: перенесем ее в эту точку и присоединим пару с моментом $M_2 = M_O(\boldsymbol{F}_2)$. Так же поступим и с остальными силами $\boldsymbol{F}_3$ и $\boldsymbol{F}_4$, присоединив пары с моментами $M_3 = M_O(\boldsymbol{F}_3)$ и $M_4 = M_O(\boldsymbol{F}_4)$.

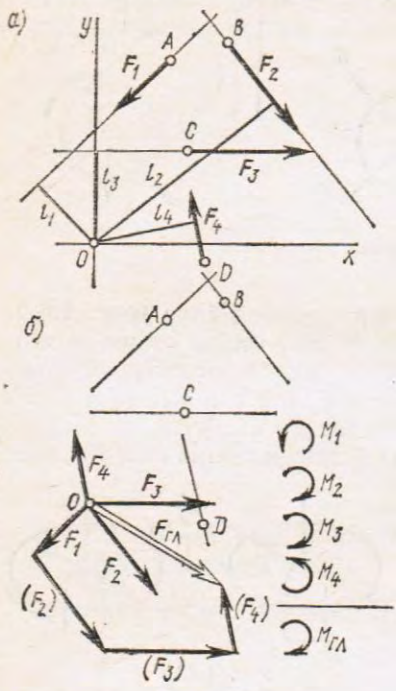


Рис. 1.44

Как видно из рис. 1.44, *б*, в результате последовательного приведения заданных сил к точке образовались система сходящихся сил и система присоединенных пар с моментами, равными моментам заданных сил относительно точки (центра) приведения.

С помощью силового многоугольника (см. § 1.5) находим силу $\boldsymbol{F}_{гл}$, эквивалентную системе приведенных сил (рис. 1.44, *б*). Сложив алгебраические моменты присоединенных пар, найдем момент одной эквивалентной им пары:

$$M_{гл} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4,$$

или, так как моменты присоединенных пар равны моментам данных сил относительно центра приведения,

$$M_{гл} = M_O(\boldsymbol{F}_1) + M_O(\boldsymbol{F}_2) + M_O(\boldsymbol{F}_3) + M_O(\boldsymbol{F}_4).$$

Сила $\boldsymbol{F}_{гл}$, равная геометрической сумме заданных сил, называется *главным вектором* системы, а момент $M_{гл}$, равный алгебраической сумме моментов присоединенных пар, или алгебраической сумме моментов заданных сил относительно данного центра, называется *главным моментом* системы.

Очевидно, в заданную систему сил может входить не четыре, а любое число сил. Значит, в общем виде можно записать:

$$\boldsymbol{F}_{гл} = \Sigma \boldsymbol{F}_k \qquad (1.25)$$

и

$$M_{гл} = \Sigma M_O(\boldsymbol{F}_k). \qquad (1.26)$$

Таким образом, *произвольная плоская система сил эквивалентна одной силе — главному вектору и одной паре, момент которой равен главному моменту.*

* На рис. 1.44,*б* присоединенные пары изображены круговыми стрелками, направленными в сторону поворота силами $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ и $\boldsymbol{F}_4$ соответствующих плеч l_1, l_2, l_3 и l_4 (см. рис. 1,44,*а*).

Ввиду того что модуль и направление главного вектора $\boldsymbol{F}_{гл}$ соответствуют замыкающей стороне силового многоугольника со сторонами, равными векторам заданных сил, для его определения используют метод проекций, изложенный в § 1.6. Начало осей координат в этом случае целесообразно поместить в центре приведения, как, например, показано на рис. 1.44, *а*. Тогда модуль главного вектора определяют по формуле (1.16):

$$F_{гл}=\sqrt{(\Sigma F_{kx})^2+(\Sigma F_{ky})^2}, \qquad (1.27)$$

где F_{kx} и F_{ky} — проекции заданных сил соответственно на оси x и y; направление главного вектора, т. е. углы φ_x и φ_y, образуемые линией действия главного вектора с осями координат, определяются по формулам (1.17):

$$\cos\varphi_x=F_{гл\,x}/F_{гл} \text{ и } \cos\varphi_y=F_{гл\,y}/F_{гл}, \qquad (1.28)$$

где $F_{гл\,x}=\Sigma F_{kx}$ — проекция главного вектора на ось x и $F_{гл\,y}=\Sigma F_{ky}$ — проекция главного вектора на ось y.

Следует заметить, что модуль и направление главного вектора не зависят от выбора центра приведения (где бы ни была выбрана точка O и в каком бы порядке ни строили силовой многоугольник, его замыкающая сторона никак не изменится). Значение же главного момента $M_{гл}$ зависит от выбора центра приведения (при изменении положения точки O изменяется длина плеч l_k, см. рис. 1.44, *а*).

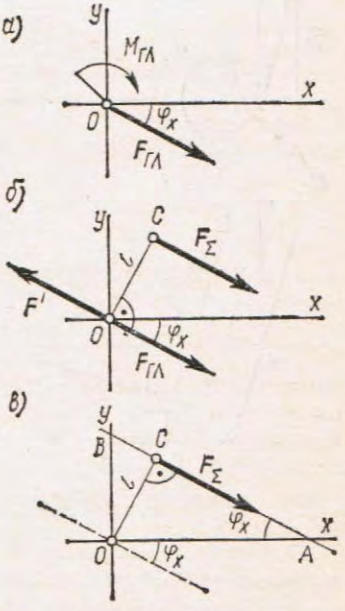


Рис. 1.45

Рассмотренное выше приведение плоской системы сил к силе и паре — необходимый этап задачи определения равнодействующей этой системы. Действительно, в общем случае *, когда $\boldsymbol{F}_{гл}\neq 0$ и $M_{гл}\neq 0$, главный вектор и определяемую главным моментом пару сил можно заменить одной эквивалентной им силой, т. е. определить равнодействующую произвольной плоской системы сил.

Допустим, что, приведя плоскую систему сил к точке, мы получили главный вектор $\boldsymbol{F}_{гл}$ и пару сил с моментом $M_{гл}$ (рис. 1.45, *а*). Представим главный момент в виде пары сил ($\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{F}_\Sigma$), численно равных главному вектору ($F_\Sigma=F'=F_{гл}$), и с плечом $l=M_{гл}/F_{гл}$. Расположим эту пару таким образом, чтобы одна из сил оказалась направленной вдоль линии действия главного век-

* Частные случаи приведения системы сил к силе и паре рассмотрены в § 1.14.

тора, но в противоположную сторону (рис. 1.45, *б*). Тогда силы F' и $F_{гл}$ можно исключить как взаимно уравновешенные, а оставшаяся сила F_Σ и есть искомая равнодействующая рассматриваемой системы сил (рис. 1.45, *в*). Расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей

$$OC = l = M_{гл}/F_\Sigma. \qquad (1.29)$$

Следовательно, *равнодействующая произвольной плоской системы сил равна главному вектору и расстояние от центра приведения до линии действия равнодействующей равно частному от деления главного момента на модуль главного вектора или равнодействующей.*

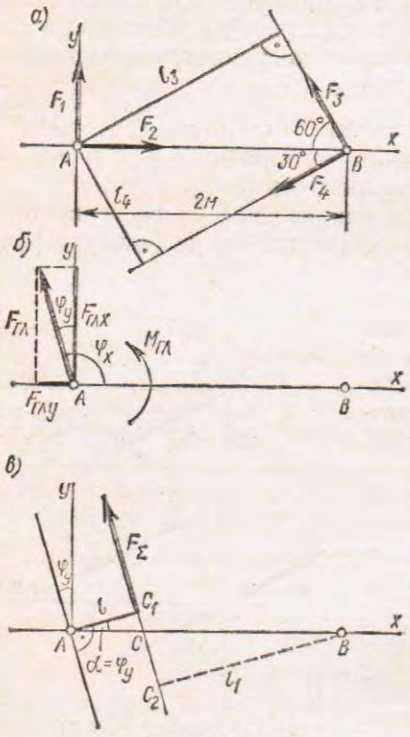


Рис. 1.46

Иногда важно знать, какой длины отрезки OA и OB отсекает линия действия равнодействующей от осей координат (рис. 1.45, *в*). Эти отрезки легко найти из прямоугольных треугольников OAC или OBC, в которых известны катет $OC=l$ и один из острых углов.

Пример 1.5. К двум точкам тела приложены четыре силы $F_1=F_2=F_3=F_4=5$ Н, как показано на рис. 1.46, *а*. Привести эти силы к точке A, а затем найти их равнодействующую.

Решение. 1. Центр приведения (точка A) задан. Поэтому примем точку A за начало координат и проведем ось x вдоль отрезка AB, а ось y — по линии действия силы F_1 (рис. 1.46, *а*).

2. Определим проекции сил на ось x: $F_{1x}=0$; $F_{2x}=F_2=5$ Н; $F_{3x}=-F_3\sin 30°=5\sin 30°=-2{,}5$ Н; $F_{4x}=-F_4\sin 60°=-5\sin 60°=-4{,}33$ Н.

Отсюда проекция на ось x главного вектора

$$F_{гл\,x}=\sum F_{kx}=5-2{,}50-4{,}33\text{ Н}=-1{,}83\text{ Н}.$$

3. Определим проекции сил на ось y: $F_{1y}=F_1=5$ Н; $F_{2y}=0$; $F_{3y}=F_3\sin 60°=5\sin 60°=4{,}33$ Н; $F_{4y}=-F_4\sin 30°=-5\sin 30°=-2{,}50$ Н.

Отсюда проекция на ось y главного вектора

$$F_{гл.\,y}=\sum F_{ky}=5+4{,}33-2{,}50\text{ Н}=6{,}83\text{ Н}.$$

Для большей наглядности и облегчения дальнейшего решения задачи целесообразно найденные проекции $F_{гл\,x}$ и $F_{гл\,y}$ главного вектора отложить вдоль осей координат (рис. 1.46, *б*).

4. Из формулы (1.27) определим модуль главного вектора:

$$F_{гл.\,y}=\sqrt{F^2_{гл\,x}+F^2_{гл\,y}}=\sqrt{1{,}83^2+6{,}83^2}=7{,}07\text{ Н}.$$

5. Находим угол $\varphi_y=(\widehat{F_{гл}, y})$:

$$\cos\varphi_y=F_{гл\,y}/F_{гл}=6{,}83/7{,}07=0{,}966.$$

По таблицам или с помощью счетной логарифмической линейки определяем

$$\varphi_y=14°.$$

Из рис. 1.46, *б* следует, что $\varphi_x=90°+14°=104°$.

6. Определяем главный момент, как алгебраическую сумму моментов данных сил относительно точки A [см. формулу (1.26)] $M_A(F_1)=0$ и $M_A(F_2)=0$, так как линия действия сил F_1 и F_2 проходит через точку A (центр приведения); $M_A(F_3)=F_3l_3=5\cdot2\sin60°=8{,}66$ Н·м; $M_A(F_4)=-F_4l_4=-5\cdot2\sin30°=-5$ Н·м (из рис. 1.46, *а* видно, что $l_3=AB\sin60°$ и $l_4=AB\sin30°$):

$$M_{гл}=\sum M_A(F_k)=8{,}66-5\text{ Н·м}=3{,}66\text{ Н·м}.$$

Главный момент $M_{гл}>0$, значит он действует против хода часовой стрелки (рис. 1.46, *б*).

7. Равнодействующая $F_\Sigma=F_{гл}$ и линия ее действия, параллельная главному вектору, проходит от центра приведения A на расстоянии

$$AC_1=l=M_{гл}/F_\Sigma=3{,}66/7{,}07=0{,}518\text{ м}\approx52\text{ см}$$

(рис. 1.46, *в*).

Линия действия равнодействующей пересекает ось x в точке C и отсекает от AB отрезок

$$AC=l/\cos\varphi_y=0{,}518/\cos14°=0{,}536\text{ м}\approx54\text{ см}.$$

Таким образом, равнодействующая заданной на рис. 1.46, *а* системы сил $F_\Sigma=7{,}07$ Н, линия ее действия образует с выбранными осями координат углы $\varphi_x=104°$, $\varphi_y=14°$ и пересекает отрезок AB в точке C на расстоянии $AC\approx54$ см.

Тот же результат был бы получен при выборе за центр приведения точки B, но в этом случае получилось бы $BC_2=l_1=1{,}42$ м и $BC\approx146$ см (рис. 1.46, *в*). Проверьте: так ли это?

§ 1.13. ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Непосредственно из равенства (1.29) вытекает важная зависимость между моментом равнодействующей и моментами составляющих сил, известная в механике как теорема Вариньона.

Перепишем равенство (1.29) в таком виде:

$$F_\Sigma l=M_{гл}.$$

Из рис. 1.45, *в* следует, что $F_\Sigma l=M_O(\boldsymbol{F}_\Sigma)$ — момент равнодействующей относительно любой точки, а по формуле (1.26) $M_{гл}=\Sigma M_O(\boldsymbol{F}_k)$. Поэтому последнее равенство можно переписать в виде

$$M_O(\boldsymbol{F}_\Sigma)=\Sigma M_O(\boldsymbol{F}_k), \tag{1.30}$$

т. е. *момент равнодействующей произвольной плоской системы сил относительно любой точки равен алгебраической сумме моментов сил системы, взятых относительно той же точки.*

С помощью теоремы Вариньона решаются многие задачи механики. В частности, легко определяется равнодействующая системы параллельных сил. Как это делается, покажем на примере.

Пример 1.6. Определить равнодействующую пяти параллельных сил $F_1=6$ Н, $F_2=8$ Н, $F_3=10$ Н, $F_4=15$ Н и $F_5=3$ Н, приложенных к телу, как показано на рис. 1.47, *а*.

Решение. 1. Находим модуль равнодействующей. Как известно,

$$F_\Sigma = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}.$$

Но если ось x расположить перпендикулярно силам, а ось y — параллельно (рис. 1.47, *а*), направив ее положительный отсчет вниз, то проекции каждой из сил на ось x равны нулю и, значит,

$$\sum F_{kx} = 0,$$

а проекции сил на ось y равны их модулям с соответствующими знаками: $F_{1y} = F_1 = 6$ Н; $F_{2y} = -F_2 = -8$ Н; $F_{3y} = F_3 = 10$ Н; $F_{4y} = F_4 = 15$ Н и $F_{5y} = -F_5 = -3$ Н.

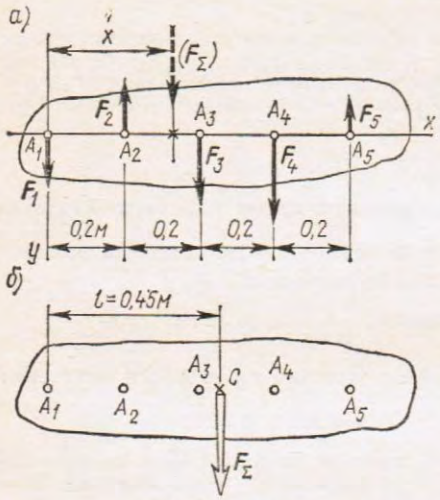


Рис. 1.47

Таким образом, модуль равнодействующей системы параллельных сил

$$F_\Sigma = \sum F_{ky} = \sum F_k.$$

Вектор равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$ направлен параллельно составляющим силам в сторону положительного отсчета оси y, если $\Sigma F_{ky} > 0$, и в сторону отрицательного отсчета, если $\Sigma F_{ky} < 0$. В данном случае $F_\Sigma = \Sigma F_k = 6 - 8 + 10 + 15 - 3$ Н $= 20$ Н, т. е. равнодействующая равна 20 Н и направлена вниз.

2. Изобразим эту равнодействующую условно штриховой линией на некотором расстоянии x от начала координат (рис. 1.47, *а*) и запишем моменты всех сил относительно точки A_1:

$$M_{A_1}(\boldsymbol{F}_\Sigma) = -F_\Sigma x;\ M_{A_1}(\boldsymbol{F}_1) = 0;$$
$$M_{A_1}(\boldsymbol{F}_2) = F_2 A_1 A_2;\ M_{A_1}(\boldsymbol{F}_3) = -F_3 \cdot A_1 A_3;\ M_{A_1}(\boldsymbol{F}_4) = -F_4 \cdot A_1 A_4$$
$$\text{и } M_{A_1}(\boldsymbol{F}_5) = F_5 A_1 A_5.$$

И согласно теореме Вариньона, т. е. по уравнению (1.30), получим $-F_\Sigma x = F_2 \cdot A_1 A_2 - F_3 \cdot A_1 A_3 - F_4 A_1 A_4 + F_5 A_1 A_5$.

Отсюда после подстановки известных числовых значений сил и плеч $-20x = 8 \cdot 0{,}2 - 10 \cdot 0{,}4 - 15 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}8$, получим

$$x = l = 0{,}45 \text{ м}.$$

Следовательно, $F_\Sigma = 20$ Н, а ее линия действия, параллельная составляющим силам, проходит от точки A_1 на расстоянии $l = 0{,}45$ м (рис. 1.47, *б*).

Известные из физики зависимости, возникающие при сложении двух параллельных сил, можно получить из теоремы Вариньона.

Даны приложенные к телу параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, направленные в одну сторону (рис. 1.48, *а*). Согласно равенству $F_\Sigma = \Sigma F_k$, полученному в примере 1.3, ясно, что в данном случае

$$F_\Sigma = F_1 + F_2,$$

а вектор равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$, приложенный в некоторой точке C, направлен параллельно силам в ту же сторону.

Возьмем сумму моментов сил относительно точки C (точки, через которую проходит линия действия равнодействующей). Тогда $M_C(\boldsymbol{F}_\Sigma)=0$ и, следовательно, $M_C(\boldsymbol{F}_1)+M_C(\boldsymbol{F}_2)=0$, т. е. $F_1AC-F_2BC=0$ или $F_1AC=F_2BC$.

Отсюда получаем известную из физики пропорциональную зависимость:

$$F_1/BC=F_2/AC, \tag{1.31}$$

т. е. расстояния от линии действия двух параллельных сил до линии действия равнодействующей обратно пропорциональны силам.

Легко доказать (проделайте это самостоятельно), что такую же зависимость получим и при определении равнодействующей двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны, хотя в этом случае модуль равнодействующей $F_\Sigma=F_1-F_2$. Направлена она в сторону большей по модулю силы, и линия ее действия расположена не между слагаемыми силами, а за большей из них (рис. 1.48, *б*).

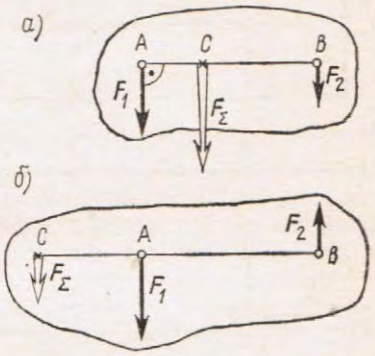


Рис. 1.48

Воспользовавшись известным из математики свойством пропорции (или свойством ряда равных отношений), выражение (1.31) можно записать так:

$$F_1/BC=F_2/AC=(F_1+F_2)/(BC+AC),$$

но $F_1+F_2=F_\Sigma$ и $BC+AC=AC$, поэтому

$$F_1/BC=F_2/AC=F_\Sigma/AB. \tag{1.32}$$

С помощью равенства (1.32) обычно решаются задачи сложения двух параллельных сил, а также задачи разложения силы на две параллельные составляющие.

§ 1.14. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИВЕДЕНИЯ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ТОЧКЕ. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

В § 1.12 доказано, что произвольную плоскую систему сил всегда можно привести к главному вектору $\boldsymbol{F}_{гл}$ и к паре, определяемой главным моментом $M_{гл}$. Но возможны и частные случаи, если в результате приведения главный вектор или главный момент или оба они получатся равными нулю.

Первый случай. $\boldsymbol{F}_{гл}\neq 0$, $M_{гл}=0$, плоская система сил сразу привелась к равнодействующей.

Действительно, если $M_{гл}=0$, то это означает, что система присоединенных пар уравновесилась потому, что выбранный центр приведения лежит на линии действия равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma=\boldsymbol{F}_{гл}$.

Второй случай. $F_{гл}=0$, $M_{гл}\neq 0$, плоская система сил равнодействующей не имеет, она эквивалентна паре сил с моментом $M_{гл}$.

Действительно, если $F_{гл}=0$, то это означает, что силовой многоугольник, построенный из заданных сил, получился замкнутым (или, что то же самое, алгебраические суммы проекций всех сил на оси x и y оказались равны нулю), а при сложении присоединенных пар образовалась одна эквивалентная им пара сил.

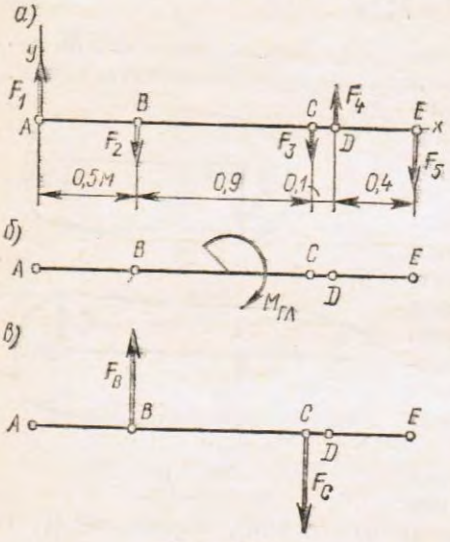


Рис. 1.49

В качестве иллюстрации подобного случая можно привести плоскую систему параллельных сил, направленных в разные стороны, у которой алгебраическая сумма проекций сил на ось, параллельную силам, равна нулю. Такая система, как правило, приводится к паре сил.

Пример 1.7. На тело действует система пяти параллельных сил $F_1=12$ Н, $F_2=5$ Н, $F_3=4$ Н, $F_4=6$ Н, $F_5=9$ Н, как показано на рис. 1.49, *а*. Определить главный вектор и главный момент этой системы.

Решение. 1. За центр приведения примем точку A и проведем оси x и y, как на рис. 1.49, *а*.

2. Определим проекции главного вектора на оси: $F_{гл\,x}=\Sigma F_{kx}=0$ и $F_{гл\,y}=\Sigma F_{ky}=F_1-F_2-F_3+F_4-F_5=12-5-4+6-9=0$.

Отсюда следует, что $F_{гл}=0$.

Этот же результат можно получить, построив из пяти заданных сил силовой многоугольник.

3. Определим главный момент:

$$M_{гл}=\sum M_A(F_k)=M_A(F_1)+M_A(F_2)+ +M_A(F_3)+M_A(F_4)+M_A(F_5).$$

Отсюда $M_{гл}=0-F_2AB-F_3AC+F_4AD-F_5AE$.

Подставив числовые значения и сложив, получим

$$M_{гл}=-16{,}2\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

Следовательно, данная система сил эквивалентна паре с моментом $-16{,}2$ Н·м, т. е. паре, действующей по ходу часовой стрелки (рис. 1.49, *б*).

4. Так как система сил эквивалентна паре, значение главного момента в этом случае не зависит от выбора центра приведения.

5. Пару, эквивалентную данной системе параллельных сил, можно получить, сложив сначала силы F_1 и F_4 (направленные вверх), а затем силы F_2, F_3 и F_5 (направленные вниз). В первом случае мы получим силу $F_B=18$ Н, приложенную в точке B, а во втором — силу $F_C=18$ Н, приложенную в точке C (рис. 1.49, *в*). Проверьте: так ли это? Легко также проверить, что момент образовавшейся пары (F_B, F_C) равен найденному выше главному моменту.

Третий случай. $F_{гл}=0$ и $M_{гл}=0$, плоская система уравновешена.

Действительно, если $F_{гл}=0$, то силовой многоугольник из при-

веденных сил замкнут, т. е. приведенные в точке силы уравновешены, а если $M_{гл}=0$, то система присоединенных пар уравновешена, значит и заданная система сил также уравновешена.

Следовательно, *необходимое и достаточное условие равновесия произвольной плоской системы сил состоит в том, чтобы главный вектор этой системы и ее главный момент были равны нулю:*

$$\boldsymbol{F}_{гл}=0, \quad M_{гл}=0. \tag{1.33}$$

Каждое из двух этих равенств выражает необходимое условие равновесия, но одного из них недостаточно для равновесия системы (см. первый и второй частные случаи приведения).

§ 1.15. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ИХ РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ

При решении задач статики обычно исходят из того, что рассматриваемое в задаче тело находится в покое и, значит, согласно первой аксиоме на него действует уравновешенная система внешних сил. Приступая к решению такой задачи, где на тело действует произвольная плоская система сил, мы заранее знаем, что условие равновесия, выраженное равенствами (1.33), выполняется, т. е. если произвольная плоская система сил уравновешена, то ее главный вектор равен нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки также равна нулю.

Как отмечалось выше (см. § 1.6), при решении задач статики задаются нагрузками, а по ним определяют реакции опор. Сами задачи решаются с применением алгебраических методов с помощью систем уравнений, которые получают из условий равновесия.

Рассмотрим три формы уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил.

Первая форма уравнений равновесия вытекает непосредственно из равенств (1.33), определяющих необходимое и достаточное условие равновесия плоской системы сил.

Главный вектор плоской системы сил может быть равным нулю лишь в том случае, если его проекции на две взаимно перпендикулярные оси равны нулю, т. е. из равенства $\boldsymbol{F}_{гл}=0$ следует

$$F_{гл\,x}=\sum F_{kx}=0 \quad \text{и} \quad F_{гл\,y}=\sum F_{ky}=0^{*}.$$

Главный момент равен нулю только в том случае, если

$$M_{гл}=\sum M_O(\boldsymbol{F}_k)=0.$$

Таким образом, первая форма уравнений равновесия плоской системы сил имеет вид

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum M_O(\boldsymbol{F}_k)=0. \tag{1.34}$$

Следовательно, *если плоская система сил уравновешена, то алгебраическая сумма проекций всех сил на оси x и y равна нулю, а также*

* К этому же выводу можно прийти, приравняв нулю выражение (1.27) модуля главного вектора.

равна нулю алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки,

Как видим, уравнений равновесия три, т. е. в произвольной плоской уравновешенной системе число неизвестных сил не должно превышать трех.

Вторая форма уравнений равновесия получается, если вместо одного уравнения моментов составить два, например

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_k)=0 \text{ и } \sum M_B(\boldsymbol{F}_k)=0,$$

и к ним добавить одно уравнение проекций на любую ось, кроме перпендикулярной прямой, проходящей через центры моментов A и B в первых двух уравнениях. В противном случае система уравнений не соответствует условию равновесия. Представим, что система сил не уравновешена, точки A и B лежат на линии действия равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$ (рис. 1.50). В этом случае равны нулю и суммы моментов сил относительно точек A и B, и алгебраическая сумма проекций сил на ось y, перпендикулярную AB.

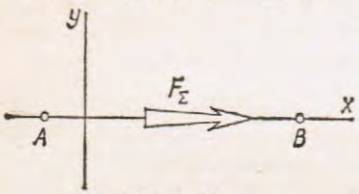


Рис. 1.50

Таким образом, если точки A и B для моментов сил взяты на оси x, то алгебраическую сумму проекций целесообразно брать на эту же ось и вторая форма уравнений равновесия примет вид

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_k)=0,\ \sum M_B(\boldsymbol{F}_k)=0,\ \sum F_{kx}=0. \qquad (1.35)$$

Следовательно, *если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно двух любых точек, а также алгебраическая сумма проекций сил на ось, не перпендикулярную прямой, проходящей через эти точки, равны нулю.*

Третью форму уравнений равновесия получим, если вместо уравнения проекций к двум уравнениям моментов относительно двух произвольно взятых точек A и B добавить третье уравнение моментов сил относительно какой-либо точки C, не лежащей на прямой AB:

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_k)=0,\quad \sum M_B(\boldsymbol{F}_k)=0,\quad \sum M_C(\boldsymbol{F}_k)=0, \qquad (1.36)$$

т. е. *если произвольная плоская система сил уравновешена, то алгебраические суммы моментов сил относительно любых трех точек, не лежащих на одной прямой, равны нулю.*

В частном случае к телу может быть приложена уравновешенная система параллельных сил и тогда, рационально расположив оси координат (например, ось x — перпендикулярно силам, а ось y — параллельно им), из уравнений (1.34) и, учитывая, что $\Sigma F_{ky}=\Sigma F_k$, получим два уравнения равновесия *:

$$\sum F_k=0,\ \sum M_O(\boldsymbol{F}_k)=0. \qquad (1.37)$$

---

* Уравнение $\Sigma F_{kx}=0$ в этом случае обратится в тождество $0=0$.

Если плоская система **параллельных** *сил уравновешена, то алгебраическая сумма проекций сил на ось, параллельную силам, и алгебраическая сумма моментов сил относительно любой точки равны нулю.*

Расположив центры моментов A и B на прямой, перпендикулярной направлениям сил, из уравнения (1.35) получим вторую форму уравнений равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_k)=0,\ \sum M_B(\boldsymbol{F}_k)=0. \qquad (1.38)$$

Этот же результат получим, если, исходя из уравнений (1.36), два центра моментов из трех, например точки B и C, выберем на прямой, параллельной силам, так как тогда уравнения моментов сил относительно этих точек получаются идентичными.

Таким образом, *если плоская система* **параллельных** *сил уравновешена, то равны нулю алгебраические суммы моментов сил относительно двух любых точек, лежащих на прямой, не параллельной линиям действия сил.*

Обратим внимание на то, что для плоской системы параллельных сил получаем два уравнения равновесия, т. е. для того, чтобы задача могла быть решенной, число неизвестных сил должно быть не больше двух. Вообще говоря, все задачи на равновесие системы сил, в которых число неизвестных не превосходит числа уравнений статики для этой системы, называются *статически определимыми*. Если же число неизвестных сил превышает число уравнений статики, которые возможно составить для данной системы, то задача называется *статически неопределимой*. Решение подобных задач рассмотрено во втором разделе учебника.

§ 1.16. БАЛОЧНЫЕ СИСТЕМЫ. РАЗНОВИДНОСТИ ОПОР И ВИДЫ НАГРУЗОК

Объектом решения многих задач статики служат так называемые балки или балочные системы. *Балкой* называется конструктивная деталь какого-либо сооружения, выполняемая в большинстве случаев в виде прямого бруса с опорами в двух (или более) точках и несущая вертикальные нагрузки.

Из предыдущего параграфа известно, что условие равновесия произвольной плоской системы сил выражается тремя уравнениями, значит с их помощью можно определить реакции опор только в том случае, если число реакций связи не превышает трех. Таким образом, балка статически определима, если она, например, опирается на три непараллельных шарнирно-прикрепленных стержня (рис. 1.51, *а*); имеет две опоры, из которых одна шарнирно-неподвижная, другая — шарнирно-подвижная (рис. 1.51, *б*); опирается на две гладкие поверхности, из которых одна с упором (рис. 1.51, *в*); опирается в трех точках на гладкие поверхности (рис. 1.51, *г*); жестко заделана в стену или защемлена специальным приспособлением (рис. 1.51, *д*). В первых четырех случаях действие сил на балку уравновешивается тремя реакциями опор (рис. 1.51, *а, б, в, г*).

Жесткая заделка (защемление) в отличие от неподвижного шарнира (см. § 1.3) препятствует не только поступательному перемещению балки, но и ее вращению в любом направлении. Поэтому кроме реакции (силы) R_A (рис. 1.51, *д*), которую, как и в случае шарнирно-неподвижной опоры, можно заменить двумя составляющими R_{Ax} и R_{By}, в заделке возникает реактивная пара с моментом M_A, препятствующим повороту балки.

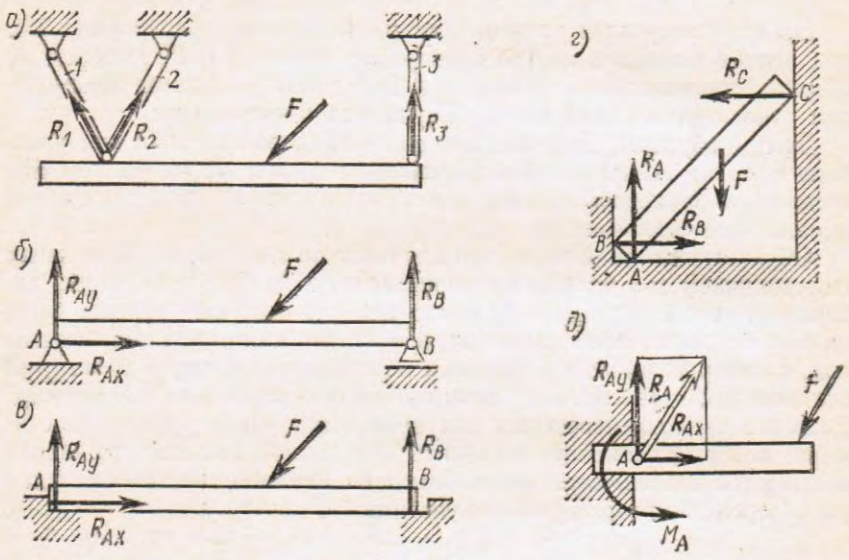


Рис. 1.51

По способу приложения силы условно делятся на *сосредоточенные* и *распределенные*. До сих пор мы рассматривали сосредоточенные силы, предполагая, что нагрузка сосредоточена в точке. Однако, строго говоря, приложить силу в точке невозможно, но во многих случаях такая схематизация допустима. Например, если на балке лежит цилиндрическое тело *1* или на балку опирается стеновая панель *2* (рис. 1.52, *а*), то при определении опорных реакций целесообразно считать, что балка нагружена сосредоточенными силами F_1 и F_2, равными силам тяжести тел *1* и *2* (рис. 1.52, *б*).

Часто невозможно пренебречь тем, что к рассматриваемому телу приложена сплошная нагрузка. При этом различают нагрузку, распределенную по линии, поверхности и объему. Примерами сплошных нагрузок могут служить сила давления воды на плотину, сила давления песка на ленту транспортера и т. д.

Из числа распределенных нагрузок рассмотрим только равномерно распределенные. Такие нагрузки условно изображаются в виде прямоугольника, в котором параллельные стрелки указывают, в какую сторону действует нагрузка (рис. 1.53, *а*). Равномерно

распределенная нагрузка задается двумя параметрами — *интенсивностью* q, т. е. числом единиц силы (Н или кН), приходящихся на единицу длины (м), и *длиной* l. В задачах статики, где рассматриваются абсолютно недеформируемые (твердые) балки, равномерно распределенную нагрузку можно заменять равнодействующей сос-

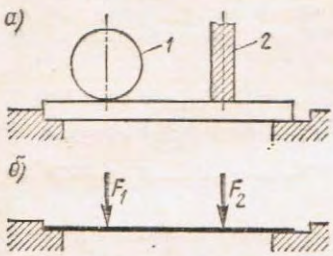


Рис. 1.52

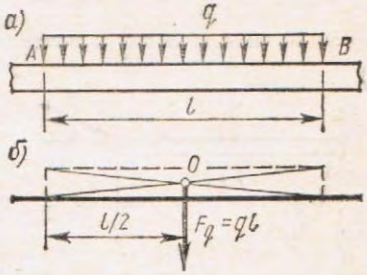


Рис. 1.53

редоточенной силой F_q, численно равной произведению интенсивности q на длину l действия нагрузки, приложенной посередине длины l (рис. 1.53, *б*) и направленной в сторону действия q.

Кроме сил на балку иногда действуют пары сил, например так, как показано на рис. 1.54, *а*. В подобном случае действие пары сил

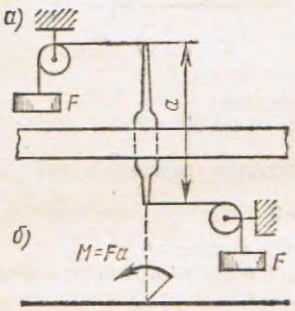


Рис. 1.54

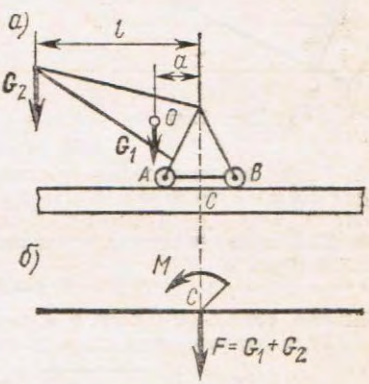


Рис. 1.55

на балку измеряется, как известно, ее моментом $M=Fa$, который условно изображают круговой стрелкой (рис. 1.54, *б*)

Рассмотрим такой случай. Допустим, что балка удерживает на себе передвижной подъемный кран с грузом G_2 (рис. 1.55, *а*), причем сила тяжести самого крана G_1 приложена в точке O. Так как в данном случае действие сил G_1 и G_2 передается на балку через катки A и B, то при решении ряда задач для упрощения схемы нагрузки можно силы G_1 и G_2 привести к точке C, расположенной посередине между катками A и B. В результате приведения получим,

что действие крана с грузом на балку эквивалентно действию силы $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_2$ и момента $M=M_C(\boldsymbol{G}_1)+M_C(\boldsymbol{G}_2)$ (рис. 1.55, *б*).

Пример 1.8. Жестко защемленная балка AB нагружена силой $F=4$ кН, как показано на рис. 1.56, *а*. Определить реакции заделки, если $\alpha=30°$.

Решение. 1. Освободим балку от связи и заменим ее действие на балку силами R_{Ax}, R_{Ay} (составляющими полной реакции) и моментом M_A (рис. 1.56, *б*).

2. Расположив оси координат, как показано на рис. 1.56, *б*, для уравновешенной системы трех сил и момента составим три уравнения вида (1.34) (см. § 1.15):

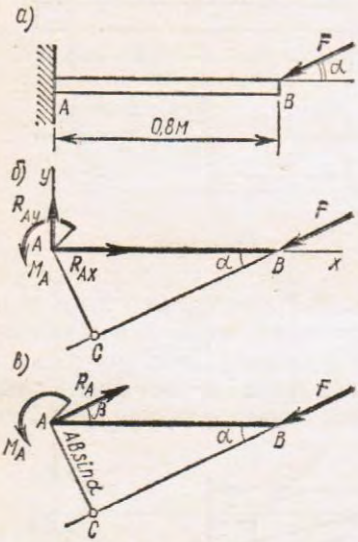


Рис. 1.56

$$\sum F_{kx}=0;\ R_{Ax}-F\cos\alpha=0,$$

$$\sum F_{ky}=0;\ R_{Ay}-F\sin\alpha=0,$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}_k)=0;\ M_A-FAB\sin\alpha=0.$$

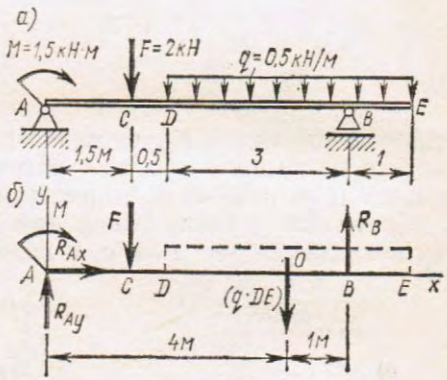


Рис. 1.57

3. Решив последовательно уравнения, определим:
$R_{Ax}=F\cos\alpha=4\cos 30°=3{,}46$ кН; $Y_A=F\sin\alpha=4\sin 30°=2$ кН; $M_A=F\cdot AB\sin\alpha=4\cdot 0{,}8\sin 30°=1{,}6$ кН·м.

4. Для проверки правильности решения составим уравнение моментов относительно точки B

$$M_A-R_{Ay}AB=0$$

и убедимся, что $1{,}6-2\cdot 0{,}8=0$, т. е. задача решена правильно.

5. Если геометрически сложить силы R_{Ax} и R_{Ay}, то в данном случае

$$R_A=\sqrt{R_{Ax}^2+R_{Ay}^2}=\sqrt{(F\cos\alpha)^2+(F\sin\alpha)^2}=$$

$$=\sqrt{F^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=F,$$

$$\beta=\arcsin(R_{Ay}/R_A)=\arcsin(2/4)=\arcsin 0{,}5=30°=\alpha,$$

т. е. нагрузка $\boldsymbol{F}$ и реакция $\boldsymbol{R}_A$ образовали пару $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R}_A)$, которая и уравновешивается реактивной парой с моментом $M_A=F\cdot AB\sin\alpha$ (рис. 1.56, *в*).

Пример 1.9. Балка AE с шарнирными опорами в точках A и B нагружена, как показано на рис. 1.57, *а*, моментом M, сосредоточенной силой $\boldsymbol{F}$ и на участке DE — равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Определить реакции опор.

Решение. 1. Заменим равномерно распределенную нагрузку ее равнодействующей $q\cdot DE$, приложенной посередине отрезка DE ($DE=DB+BE=4$ м) в точке O ($DO=OE=DE/2=2$ м); освободим балку от связей; заменив их реакциями R_{Ax}, R_{Ay} и R_B, получим показанную на рис. 1.57, *б* действующую на балку уравновешенную систему сил.

2. Расположив оси x и y, как показано на рис. 1.57, *б*, составим уравнения равновесия вида (1.35):

$$\sum M_A(F_k)=0;\ -M-F\cdot AC-qDE\cdot AO+R_B\cdot AB=0,$$
$$\sum M_B(F_k)=0;\ -M-R_{Ay}\cdot BA-F\cdot BC+q\cdot DE\cdot BO=0,$$
$$\sum F_{kx}=0;\ R_{Ax}=0.$$

3. Решая уравнения, получаем: из первого

$$R_B=(M+F\cdot AC+qDE\cdot AO)/AB=(1{,}5+2\cdot 1{,}5+0{,}5\cdot 4\cdot 4)/5=2{,}5\ \text{кН},$$

из второго

$$R_{Ay}=(-M+F\cdot BC+q\cdot DE\cdot BO)/BA=(-1{,}5+2\cdot 3{,}5+0{,}5\cdot 4\cdot 1)/5=1{,}5\ \text{кН}.$$

Из третьего уравнения видим, что горизонтальная составляющая шарнирно-неподвижной опоры $R_{Ax}=0$. Следовательно, полная реакция этой опоры перпендикулярна балке и равна R_{Ay}. Это обстоятельство в данном случае объясняется тем, что нагрузки не стремятся сдвинуть балку в горизонтальном направлении.

4. Для проверки составим не использованное при решении уравнение $\Sigma F_k=R_{Ay}-F-q\cdot DE+R_A=0$ и увидим, что $1{,}5-2-0{,}5\cdot 4+2{,}5=0$, т. е. задача решена правильно.

Пример 1.10. Чтобы облегчить открывание тяжелой крышки люка (рис. 1.58, *а*), к средней ее точке прикреплен гибкий трос с грузом F. При закрытом люке трос образует с плоскостью крышки угол 45°. Определить реакции шарнира A и опоры B, если сила тяжести крышки приложена в точке C и равна F.

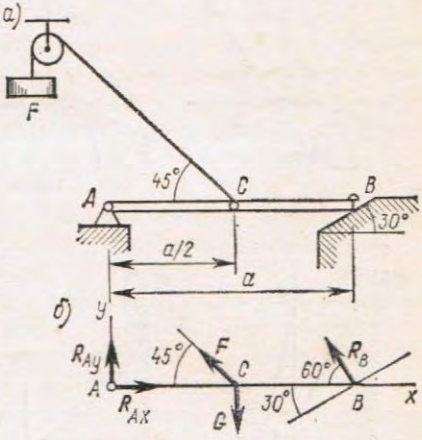


Рис. 1.58

Решение. 1. На крышку люка кроме силы тяжести действует сила F, направленная вдоль троса. Освободив крышку от связи и заменив связи их реакциями, получим уравновешенную систему пяти сил, показанную на рис. 1.58, *б*.

2. Составим уравнения равновесия вида (1.34) (расположение осей x и y показано на рис. 1.58, *б*):

$$\sum F_{kx}=0;\ R_{Ax}-F\cos 45^\circ-R_B\cos 60^\circ=0,$$
$$\sum F_{ky}=0;\ R_{Ay}+F\sin 45^\circ-G+R_B\sin 60^\circ=0,$$
$$\sum M_A(F_k)=0;\ F\,(a/2)\sin 45^\circ-G\,(a/2)+R_Ba\sin 60^\circ=0.$$

3. Учитывая, что $G=F$, из третьего уравнения находим:

$$R_B=F\,(1-\cos 45^\circ)/(2\sin 60^\circ)=0{,}169F;$$

из второго уравнения

$$R_{Ay}=F\,(1-\sin 45^\circ-0{,}169\sin 60^\circ)=0{,}147F;$$

из первого уравнения

$$R_{Ax}=F\,(1+0{,}169\cos 60^\circ)=1{,}08F.$$

4. Для проверки решения самостоятельно составьте уравнение моментов сил относительно точки C и убедитесь, что эта сумма равна нулю.

Вычислите самостоятельно, с какой силой нужно потянуть вертикально вверх за рукоятку крышки у точки B, чтобы крышка начала подниматься. (Ответ: $\approx 0{,}15\,F$.)

§ 1.17. РЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ. ТРЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ И ЕГО ЗАКОНЫ

Из физики известно, что при соприкосновении тел друг с другом всегда возникает сила трения, препятствующая передвижению одного тела по поверхности другого. При решении многих задач механики и рассмотрении равновесия тел часто оказывается невозможным пренебрегать действием сил трения. Поэтому кроме рассмотренных ранее идеальных связей (связей без трения) ознакомимся с *реальными связями* (связями с трением).

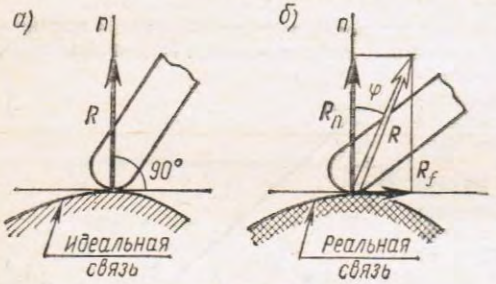


Рис. 1.59

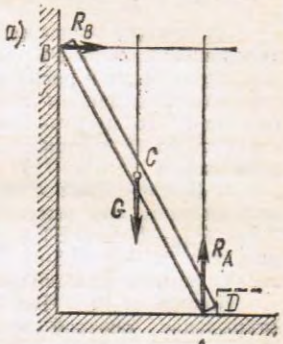


Рис. 1.60

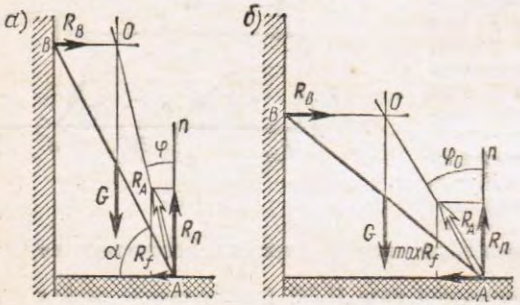
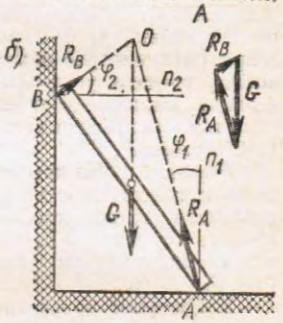


Рис. 1.61



Если связь идеальная, то ее реакция направлена по нормали к поверхности или к кривой, ограничивающей свободу движения тела (рис. 1.59, *а*). Если же тело опирается на поверхность реальной связи *, то ее реакция (рис. 1.59, *б*) отклоняется от нормали на некоторый угол φ. Таким образом, реакцию реальной связи можно рассматривать как геометрическую сумму составляющих — нор-

* Чтобы в дальнейшем удобней было различать на рисунках идеальные и реальные связи, условимся реальные связи отмечать двойной штриховкой, как на рис. 1.59,*б*, а идеальные связи — обычной штриховкой, как на рис. 1.59,*а*.

мальной $\boldsymbol{R}_n$ и касательной $\boldsymbol{R}_f$, которая и есть известная из физики *сила трения*.

Существенное отличие состояния равновесия при наличии только идеальных связей от состояния равновесия при реальных связях можно иллюстрировать такими примерами.

Брус AB, опирающийся на идеально гладкий пол в точке A и на такую же стену в точке B (рис. 1.60, *а*), не может находиться в равновесии, так как для трех действующих на него сил: силы тяжести $\boldsymbol{G}$ и двух реакций R_A и R_B, перпендикулярных соответственно полу и стене,— не выполняется необходимое условие равновесия — линии действия этих сил не пересекаются в одной точке (см. § 1.2, следствие 2). Чтобы брус AB находился в равновесии, нужно наложить еще одну связь, например упереть брус у пола в выступ D (на рис. 1.60, *а* показан штриховой линией).

Из повседневного жизненного опыта известно, что брус AB (например, лестница), опираясь на реальные пол и стену, может оставаться в покое. В этом случае равновесие бруса объясняется тем, что реакции $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ реальных связей отклоняются от нормалей An_1 и Bn_2 к их поверхностям соответственно на некоторые углы φ_1 и φ_2 и линии действия трех сил ($\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$) пересекаются в точке O (рис. 1.60, *б*). Известно и то, что брус AB теряет равновесие и соскальзывает на пол, если его прислонить к стене недостаточно круто. Для упрощения представим, что брус AB опирается в точке A на шероховатый пол (реальная связь), а в точке B — на гладкую стену (идеальная связь) и находится в равновесии, образуя с плоскостью пола некоторый угол α (рис. 1.61, *а*). Значит, линии действия трех сил $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$, приложенных к брусу, пересекаются в точке O, положение которой определяется следующим образом. Направление сил $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{R}_B$ известно (сила тяжести всегда направлена по вертикали, а реакция $\boldsymbol{R}_B$ идеальной связи перпендикулярна ее поверхности), и точка O лежит на пересечении линий действия этих сил. Соединив точку A — точку приложения реакции реальной связи — с точкой O, определим направление реакции $\boldsymbol{R}_A$ и увидим, что сила $\boldsymbol{R}_A$ отклонилась от нормали An к поверхности реальной связи на некоторый угол φ.

Разложим реакцию $\boldsymbol{R}_A$ реальной связи на нормальную составляющую $\boldsymbol{R}_n$, численно равную силе нормального давления бруса на пол, и касательную составляющую $\boldsymbol{R}_f$— силу трения *. Легко заметить, что при увеличении угла α, образуемого брусом с поверхностью пола, угол φ уменьшается, а вместе с ним уменьшается сила трения и брус сохраняет равновесие. Если же угол α уменьшить, то φ — угол отклонения реакции $\boldsymbol{R}_A$ от нормали An — увеличится, а вместе с ним увеличится и сила трения. При некотором наклоне бруса (определенном для материалов тел, соприкасающихся в точке A, и состояния их поверхности) он начинает скользить. Это озна-

---

* Если теперь, задавшись силой тяжести G и углом α, определить значения сил R_n, R_f и R_B, то увидим, что брус AB находится в равновесии под действием двух пар: $(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{R}_n)$ и $(\boldsymbol{R}_B, \boldsymbol{R}_f)$.

чает, что сила трения отклонилась от нормали An на максимальный угол $\varphi=\varphi_0$ (рис. 1.61, *б*) и дальше отклоняться не может; следовательно, при дальнейшем уменьшении наклона бруса линия действия реакции реальной связи $\boldsymbol{R}_A$ не будет проходить через точку O (точку пересечения двух других сил: $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{R}_B$).

Угол φ_0— максимальный угол, на который от нормали к поверхности реальной связи отклоняется ее реакция, называется *углом трения*. При отклонении реакций $\boldsymbol{R}_A$ на этот угол ее касательная составляющая достигает максимального значения $\max \boldsymbol{R}_f$, которая, как известно из физики, называется *статической силой трения* или силой трения покоя. Значение угла трения φ_0 зависит от материала соприкасающихся тел и состояния их поверхностей.

Из прямоугольника сил на рис. 1.61, *б* следует, что

$$\max R_f/R_n = \operatorname{tg} \varphi_0. \tag{1.39}$$

Постоянное для двух соприкасающихся тел значение $\operatorname{tg} \varphi_0=f_0$ называется *статическим коэффициентом трения* * или коэффициентом трения покоя и из уравнения (1.39) следует равенство, выражающее известный из физики закон трения

$$\max R_f = f_0 R_n, \tag{1.40}$$

установленный Амонтоном опытным путем в 1699 г.** В менее общей форме закономерности, происходящие при трении, установлены и сформулированы гениальным итальянским ученым эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519). В 1781 г. экспериментальное исследование явления трения при относительном скольжении тел провел Кулон, и в 1851 г. результаты этих исследований уточнил Морен ***.

Основные законы трения, установленные Амонтоном, Кулоном и Мореном, таковы:

1. *Сила трения действует в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и при движении направлена против относительного скольжения тела.*

2. *Статическая сила трения пропорциональна нормальной реакции* [см. равенство (1.40)].

3. *Статическая сила трения не зависит от размеров трущихся поверхностей.*

4. *Статический коэффициент трения зависит от материала соприкасающихся тел, физического состояния (влажности, температуры, степени загрязнения* и т. д.) *и качества обработки* ****.

---

* Значения коэффициентов трения приводятся в различных физических или технических справочниках.

** Гильом Амонтон (1663—1705) — член Парижской Академии наук.

*** Шарль Огюстон Кулон (1736—1806), Артур Жюль Морен (1795—1880) — члены Парижской Академии наук.

**** Законы трения относятся к числу не очень точных. Обычно наблюдаются значительные отклонения от этих законов. Например, при увеличении продолжительности неподвижного контакта соприкасающихся тел статический коэффициент трения возрастает. Объясняется это тем, что в месте контакта постепенно происходит пластическое изменение поверхностей обоих тел и площади их сопри-

После начала скольжения тела коэффициент трения несколько уменьшается и принимает значение *динамического коэффициента трения* f. Следовательно,

$$f < f_0. \tag{1.41}$$

Если в формулу (1.40) вместо f_0 подставить значение f, то

$$R_f = f R_n, \tag{1.42}$$

где R_f — *сила трения скольжения.*

При небольших скоростях скольжения сила трения скольжения R_f очень близка к max R_f; кроме того, f почти не изменяется с изменением скорости скольжения. Поэтому при решении задач механики обычно используют формулу (1.42).

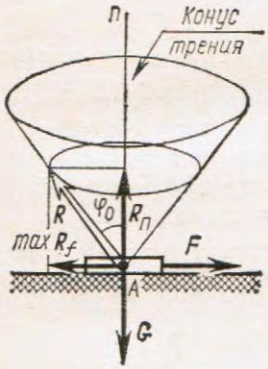


Рис. 1.62

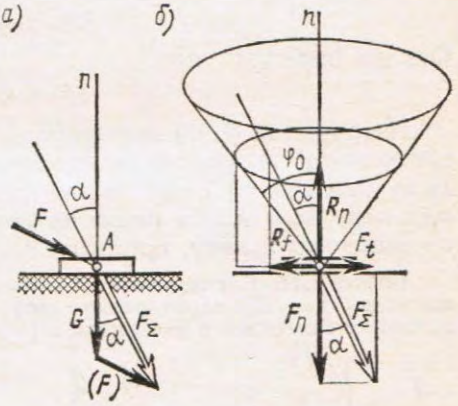


Рис. 1.63

Если тело, опирающееся на шероховатую (реальную) поверхность, под действием внешних сил находится в покое, то такое равновесие объясняется тем, что внешние силы не могут преодолеть силы трения, т. е. наблюдается самоторможение. Рассмотрим условие, лежащее в основе этого явления.

Как мы уже знаем, при действии на тело некоторой сдвигающей силы $\boldsymbol{F}$ реакция $\boldsymbol{R}$ реальной связи может отклониться от вертикали к плоскости связи лишь на некоторый определенный угол φ_0 (угол трения), причем $\operatorname{tg}\varphi_0 = f_0$. Так как сдвигающая сила $\boldsymbol{F}$ может действовать параллельно плоскости связи в любую сторону, то представим себе, что мы поворачиваем силу $\boldsymbol{F}$ вокруг нормали An (рис. 1.62). Тогда отклонившаяся на постоянный угол φ_0 реакция $\boldsymbol{R}$, оставаясь все время в плоскости нормали и вектора $\boldsymbol{F}$, образует конус, который определяет любое из возможных положений реакции $\boldsymbol{R}$ реальной связи. Этот конус называется *конусом трения.*

косновения увеличиваются. Следовательно, размеры трущихся поверхностей влияют на статический коэффициент трения, а значит и на силу трения.

Теперь представим, что тело лежит на шероховатой плоскости и на него кроме силы тяжести $\boldsymbol{G}$ действует сила $\boldsymbol{F}$ (рис. 1.63, *а*), стремящаяся сдвинуть тело по плоскости. Определим равнодействующую $\boldsymbol{F}_\Sigma$ сил $\boldsymbol{F}$ и G, сложив их по правилу треугольника, и пусть линия действия равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$ образует с нормалью An угол α.

Разложим силу $\boldsymbol{F}_\Sigma$ на две составляющие: сдвигающую силу $\boldsymbol{F}_t$ и силу нормального давления $\boldsymbol{F}_n$ (рис. 1.63, *б*). В этом случае $R_f = F_t = F \sin\alpha$ и $R_n = F_n = F\cos\alpha$. Статическая сила трения $\max R_f = f_0 R_n = \operatorname{tg}\varphi_0 \, F\cos\alpha$.

Тело остается в покое до тех пор, пока

$$R_f < \max R_f,$$

т. е. пока

$$F\sin\alpha < \operatorname{tg}\varphi_0 F\cos\alpha.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi_0$ или

$$\alpha < \varphi_0. \qquad (1.43)$$

Неравенство (1.43) выражает условие самоторможения тела на шероховатой (реальной) поверхности, которое формулируется так: *тело, лежащее на шероховатой поверхности, остается в покое до тех пор, пока линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к нему, проходит внутри конуса трения.*

Пример 1.11. К шероховатой вертикальной стене на нити AB подвешен однородный шар. При каком значении коэффициента трения между стеной и шаром он сможет находиться в равновесии в положении, показанном на рис. 1.64, *а*?

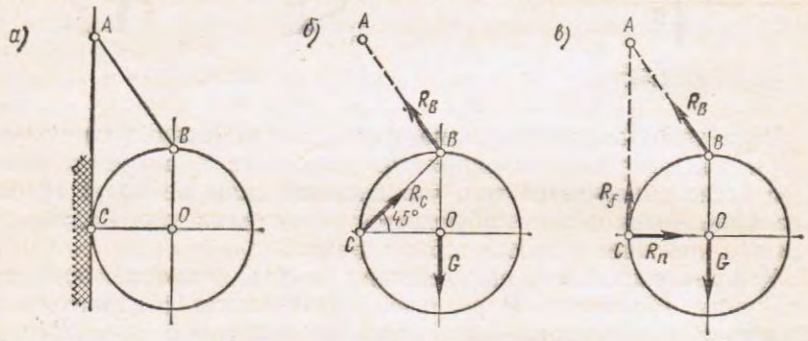


Рис. 1.64

Решение. 1. В положении, показанном на рис. 1.64, *а*, на шар действуют три силы: $\boldsymbol{G}$ — сила тяжести, $\boldsymbol{R}_B$ — реакция нити AB и $\boldsymbol{R}_C$ — реакция вертикальной шероховатой стены (рис. 1.64, *б*). При равновесии шара линии действия этих трех сил пересекаются в одной точке (см. § 1.2, теорема о равновесии трех сил). Так как линии действия сил $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{R}_B$ пересекаются в точке B, то и реакция $\boldsymbol{R}_C$ должна действовать на шар вдоль отрезка CB. Следовательно, реакция реальной связи в данном случае отклоняется на угол $\widehat{OCB} = \varphi = 45°$. Таким образом, равновесие шара в положении, показанном на рис. 1.64, *а*, возможно при коэффициенте трения

$$f \geqslant \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Подобный коэффициент трения можно получить, например, при опирании на стенку, покрытую сукном, подвешенного на нити теннисного мяча.

2. Значения реакций R_B и R_C зависят от силы тяжести шара и и длины нити AB. Если заданы G и длина AB, то значения R_B и R_C можно определить из геометрического (см. § 1.5) либо аналитического (1.18) условия равновесия системы сходящихся сил, либо уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил (см. § 1.15). Реакцию R_C можно представить в виде двух составляющих: R_f и R_n (рис. 1.64, *в*).

Например, при $AB=2r$, где r — радиус шара, $R_B=0{,}732\,G$ и $R_C=0{,}518\,G$ ($R_f=R_n=0{,}366G$). Проверьте правильность ответов.

Пример 1.12. Тело A поставлено на негладкую пластину BC, которую можно поворачивать около оси шарнира B (рис. 1.65, *а*). При каких значениях угла α тело A остается на пластине в покое?

Решение. 1. Если пластина образует с горизонтальной плоскостью угол α, то на тело A действуют три силы (рис. 1.65, *б*): G — сила тяжести, R_n — нормальная реакция пластины и сила трения, направленная вдоль пластины от A к C, причем эта сила может увеличиться только до некоторого значения $\max R_f$, зависимого от коэффициента трения.

2. Тело A находится в покое до тех пор, пока равнодействующая сил G и R_n, направленная вдоль пластины, остается меньше статической силы трения, т. е. пока

$$F_\Sigma < \max R_f = f_0 R_n.$$

Но $F_\Sigma = R_n \operatorname{tg}\alpha$ и $f_0 = \operatorname{tg}\varphi_0$, где φ_0 — угол трения.

Поэтому

$$R_n \operatorname{tg}\alpha < R_n \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi_0$ или $\alpha < \varphi_0$.

Тело A находится в покое до тех пор, пока угол наклона пластины меньше угла трения.

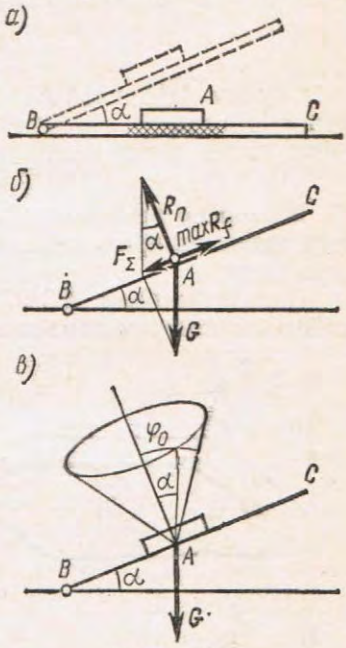


Рис. 1.65

Наклонная плоскость называется самотормозящей, если поставленное на нее тело не скользит под действием силы тяжести.

Легко заметить, что условие самоторможения тела на наклонной плоскости не противоречит неравенству (1.43), значит и в этом случае линия действия силы тяжести (единственной активной силы, приложенной к телу A) проходит внутри конуса трения (рис. 1.65, *в*).

Глава 5
ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

§ 1.18. СЛОЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

Система сил, линии действия которых расположены как угодно в пространстве, называется пространственной.

Если к приложенным к точке A силам F_1 и F_2 добавить силу F_3, не лежащую в плоскости Π действия двух первых сил, то полу-

чим простейшую (в количественном отношении) пространственную систему сходящихся сил (рис. 1.66, *а*). Определим равнодействующую этих сил. Сначала построим параллелограмм $ABEC$ на силах $\boldsymbol{F}_1=\overrightarrow{AB}$ и $\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{AC}$ (рис. 1.66, *б*), его диагональ

$$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2.$$

Сложим $\overrightarrow{AE}$ с силой $\boldsymbol{F}_3=\overrightarrow{AD}$ и построим параллелограмм $AEKD$, его диагональ

$$\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{F}_\Sigma=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3. \qquad (1.44)$$

Векторное равенство (1.44) выражает *правило параллелепипеда* при сложении приложенных к точке трех сил, не лежащих в одной плоскости.

Параллелограмм $ABEC$ образует одну из граней параллелепипеда, в котором параллелограмм $AEKD$ является диагональным сечением (рис. 1.66, *в*), а заданные силы $\boldsymbol{F}_1=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{F}_3=\overrightarrow{AD}$ — ребрами одного из его трехгранных углов. Таким образом, *равнодействующая пространственной системы трех сил, сходящихся в одной точке, приложена в той же точке и равна по модулю и направлению диагонали параллелепипеда, ребра которого равны и параллельны заданным силам.*

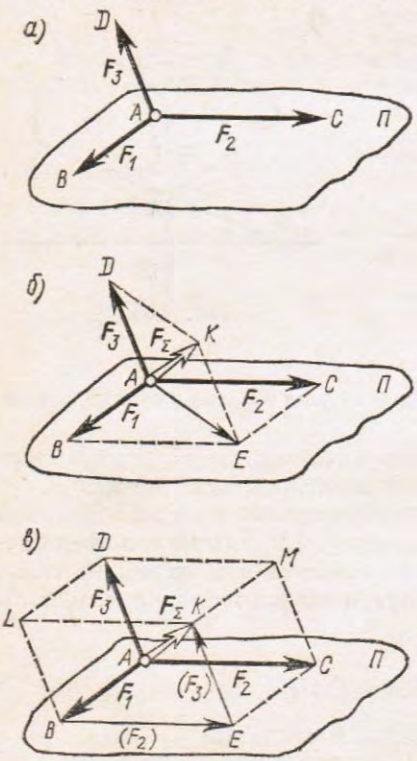


Рис. 1.66

Строить параллелепипед не обязательно, можно ограничиться построением пространственного силового многоугольника. Из рис. 1.66, *в*, например, видно, что модуль и направление $\boldsymbol{F}_\Sigma=\overrightarrow{AK}$ при сложении сил в порядке $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ соответствуют замыкающей стороне многоугольника $ABEK$. Сложению сил в порядке $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_2$ соответствует пространственный многоугольник $ABLK$, в порядке $\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_1$ — многоугольник $ADMK$ и т. д.

В частном случае, имеющем широкое практическое применение, три силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ действуют на точку, образуя друг с другом прямые углы (рис. 1.67). Тогда при их сложении образуется пря-

моугольный параллелепипед. Используя известную из геометрии теорему о зависимости длины диагонали прямоугольного параллелепипеда от трех его измерений и помня, что при построении векторов $\boldsymbol{F}_1=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{F}_2=\overrightarrow{AC}$ и $\boldsymbol{F}_3=\overrightarrow{AD}$ их модули пропорциональны длинам изображающих их отрезков, можно записать:

$$F_\Sigma=\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}, \qquad (1.45)$$

т. е. *модуль равнодействующей трех сходящихся сил, расположенных в пространстве перпендикулярно друг другу, равен корню квадратному из суммы квадратов модулей этих сил.*

Направление равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$ определяется углами (рис. 1.67) $\alpha_1=(\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma \boldsymbol{F}_1})$, $\alpha_2=(\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma, \boldsymbol{F}_2})$ и $\alpha_3=(\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma, \boldsymbol{F}_3})$. Эти углы найдем, рассмотрев последовательно прямоугольные треугольники ABE, ACE и ADE, в каждом из которых диагональ параллелепипеда $\boldsymbol{F}_\Sigma=\overrightarrow{AE}$ является гипотенузой:

$$\cos\alpha_1=F_1/F_\Sigma;\quad \cos\alpha_2=F_2/F_\Sigma \text{ и } \cos\alpha_3=F_3/F_\Sigma. \qquad (1.46)$$

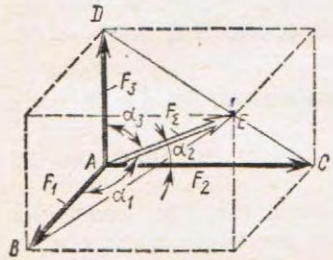


Рис. 1.67

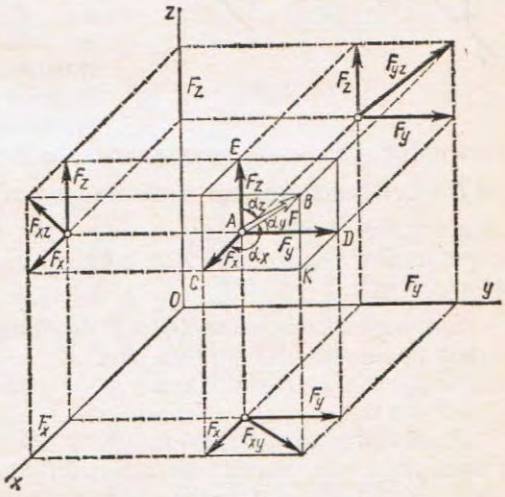


Рис. 1.68

С использованием параллелепипеда сил решается и обратная задача — задача разложения силы на три составляющие по заданным или выбранным направлениям. При решении задач с пространственным относительно друг друга расположением сил обычно оказывается целесообразным разложение силы на три составляющие, направленные параллельно выбранным (заданным) осям координат или непосредственно вдоль осей.

На рис. 1.68 показано разложение силы $\boldsymbol{F}=\overrightarrow{AB}$ на три составляющие силы при условии, что заданы углы α_x, α_y и α_z, образуемые силой $\boldsymbol{F}$ с направлениями составляющих, параллельных осям x, y и z. Приняв вектор $F=\overrightarrow{AB}$ за диагональ, построим на нем прямоугольный параллелепипед с расположением граней параллельно координатным плоскостям xOy, xOz, yOz и получим искомые сос-

тавляющие $\boldsymbol{F}_x=\overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{F}_y=\overrightarrow{AD}$ и $\boldsymbol{F}_z=\overrightarrow{AE}$*, модули которых

$$F_x=F\cos\alpha_x,\quad F_y=F\cos\alpha_y \text{ и } F_z=F\cos\alpha_z. \qquad (1.47)$$

Спроецировав параллелепипед сил на координатные плоскости, получим проекции $\boldsymbol{F}_{xy}$, $\boldsymbol{F}_{xz}$ и $\boldsymbol{F}_{yz}$ силы $\boldsymbol{F}$ на каждую из плоскостей; затем легко определить и проекции F_x, F_y и F_z силы $\boldsymbol{F}$ на соответствующие оси координат (рис. 1.68), которые при заданных углах α_x, α_y и α_z находим так же, как и модули составляющих сил, т. е. по формулам (1.47).

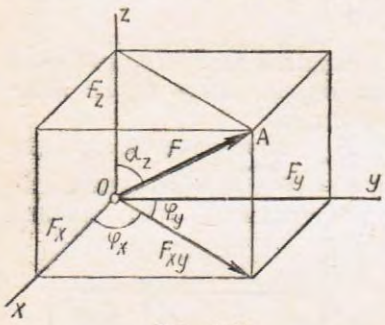


Рис. 1.69

Если проекция силы F на ось — величина алгебраическая (скалярная), то проекция силы на плоскость — вектор (поэтому проекции $\boldsymbol{F}_{xy}$, $\boldsymbol{F}_{xz}$ и $\boldsymbol{F}_{yz}$ на рис. 1.68 имеют на концах стрелки), так как расположение каждой проекции на плоскости зависит от положения диагонального сечения параллелепипеда относительно двух других осей. Поэтому положение вектора $\boldsymbol{F}=\overrightarrow{OA}$ относительно осей координат может быть задано, например (рис. 1.69), углом $\alpha_z=(\widehat{\boldsymbol{F}, z})$ и одним из углов φ_x или φ_y, образуемых плоскостью AOz с одной из координатных плоскостей: xOy или yOz.

Спроецировав вектор $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{F}$ сначала на плоскость xOy, найдем затем проекции силы $\boldsymbol{F}$ на оси:
$F_x=F_{xy}\cos\varphi_x=F\sin\alpha_z\cos\varphi_x$; $F_y=F_{xy}\cos\varphi_y=F\sin\alpha_z\cos\varphi_y$; $F_z=F\cos\alpha_z$.

Равнодействующая любого числа сходящихся сил, расположенных в пространстве, равна замыкающей стороне многоугольника, стороны которого равны и параллельны заданным силам (правило силового многоугольника).

Например, на рис. 1.70, *а* изображено геометрическое сложение пяти сил: равнодействующая $\boldsymbol{F}_\Sigma=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_4+\boldsymbol{F}_5$ по модулю и направлению соответствует замыкающей стороне $\overrightarrow{AE}$ силового многоугольника $OABCDE$, в котором $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{F}_1$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{F}_2$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{F}_3$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{F}_4$ и $\overrightarrow{DE}=\boldsymbol{F}_5$.

Равнодействующую пространственной системы сходящихся сил, так же как и при действии их в одной плоскости, проще и точнее определять аналитически — методом проекций. Отличие состоит в том, что теперь силы проецируются на три оси координат. Сложив алгебраически проекции сил на каждую из осей координат, получим

* Подробные описания порядка построения параллелепипеда и дальнейшие построения здесь не приводятся, так как предполагается, что читатель владеет необходимыми навыками проекционного черчения.

проекции искомой равнодействующей

$$F_{\Sigma x}=\sum F_{kx};\quad F_{\Sigma y}=\sum F_{ky};\quad F_{\Sigma z}=\sum F_{kz}, \tag{1.48}$$

которые изображают ребра прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.70, *б*) с диагональю $\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{F}_\Sigma$. Поэтому модуль равнодействующей

$$F_\Sigma=\sqrt{F_{\Sigma x}^2+F_{\Sigma y}^2+F_{\Sigma z}^2}. \tag{1.49}$$

Направление $\boldsymbol{F}_\Sigma$, т. е. углы $\alpha_x=(\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma, x})$, $\alpha_y=(\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma, y})$ и $\alpha_z=(\widehat{\boldsymbol{F}_\Sigma, z})$, находим по формулам

$$\cos\alpha_x=F_{\Sigma x}/F_\Sigma,\quad \cos\alpha_y=F_{\Sigma y}/F_\Sigma \text{ и } \cos\alpha_z=F_{\Sigma z}/F_\Sigma. \tag{1.50}$$

Если $\boldsymbol{F}_\Sigma=0$, то сходящаяся система сил уравновешена и многоугольник сил замкнут (геометрическое условие равновесия). Но

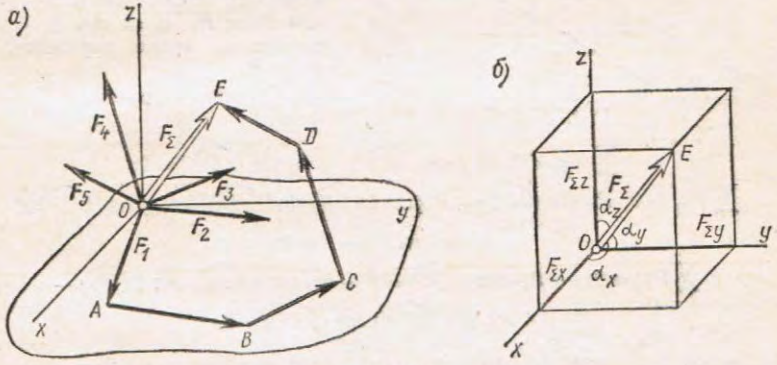


Рис. 1.70

при этом должна быть равна нулю каждая из трех проекций равнодействующей. Таким образом, *аналитическое условие равновесия пространственной системы сходящихся сил выражается тремя уравнениями:*

$$\sum F_{kx}=0,\quad \sum F_{ky}=0 \text{ и } \sum F_k=0, \tag{1.51}$$

т. е. *для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на каждую из трех осей координат были равны нулю.*

Пример 1.13. Тренога *ABCD* шарнирно опирается на горизонтальную плоскость в точках *A*, *B* и *C* (рис. 1.71, *а*). В точке *D* тренога имеет блок. Через блок перекинут гибкий трос, один конец которого закреплен в точке *E* стены, а к другому прикреплен груз $F=10$ кН. Определить реакции стержней треноги.

Решение. 1. Пренебрегая размерами блока, считаем, что заданные нагрузки и искомые реакции стержней приложены к точке *D* — вершине трехгранной пирамиды, образуемой треногой. На точку *D* действуют вертикально вниз и горизонтально влево натяжения ветвей троса, равные силе тяжести груза *F*, а также три реакции $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$ и $\boldsymbol{R}_C$ стержней треноги.

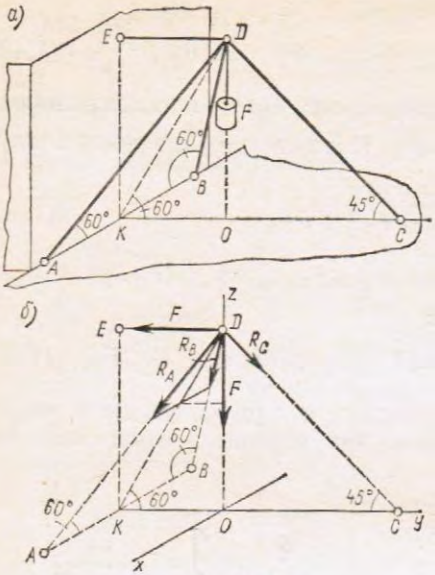


Рис. 1.71

2. Систему пяти сил, действующих на точку D, в выбранных осях координат изобразим на рис. 1.71, *б*; реакции $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$ и $\boldsymbol{R}_C$ стержней направлены вдоль стержней от точки D (из предположения, что все стержни растянуты).

3. Приступая к составлению уравнений равновесия, следует заметить, что силы, лежащие в плоскости перпендикулярной какой-либо оси, проецируются на эту ось в виде точки (т. е. проекции равны нулю). Например, обе силы $\boldsymbol{F}$ (вертикальная и горизонтальная) и сила $\boldsymbol{R}_C$ лежат в плоскости, перпендикулярной оси x. Поэтому на ось x проецируются лишь силы $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$. Рассуждая аналогично, видим, что на ось y проецируются все силы, за исключением вертикальной силы $\boldsymbol{F}$, и на ось z — также все силы, кроме горизонтальной силы $\boldsymbol{F}$.

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx}=0;\ R_A \sin(\widehat{ADK}) - R_B \sin(\widehat{BDK})=0;$$

$$\sum F_{ky}=0;\ R_C \sin(\widehat{ODC}) - R_A \cos(\widehat{ADK}) \sin(\widehat{KDO}) - R_B \cos(\widehat{BDK}) \times$$
$$\times \sin(\widehat{KDO}) - F=0;$$

$$\sum F_{kz}=0;\ -R_C \cos(\widehat{ODC}) - F - R_A \cos(\widehat{ADK}) \cos(\widehat{KDO}) -$$
$$-R_B \cos(\widehat{BDK}) \cos(\widehat{KDO})=0.$$

Так как $\widehat{ADK}=\widehat{BDK}=\widehat{KDO}=30°$ и $\widehat{ODC}=45°$, из первого уравнения находим, что $R_A=R_B$. Второе и третье уравнения запишем теперь в виде

$$R_C \sin 45° - 2R_A \cos 30° \sin 30° - F=0,$$
$$-R_C \cos 45° - F - 2R_A \cos^2 30°=0.$$

Складывая эти уравнения и учитывая, что $\sin 30°=0{,}5$ и $\cos 30°=\sqrt{3}/2$, получаем

$$-(\sqrt{3}/2)\,R_A - (3/2)\,R_A - 2F=0.$$

Отсюда

$$R_A=R_B=-\frac{4F}{\sqrt{3}+3}=-\frac{40}{4{,}73}=-8{,}44 \text{ кН}.$$

(Стержни AD и BD треноги сжаты силой 8,44 кН.)

Теперь, зная R_A, находим

$$R_C=(R_A \cos 30° + F)/\sin 45°=(-8{,}44 \cos 30° + 10)/\sin 45°=3{,}82 \text{ кН}.$$

(Стержень CD растянут силой 3,82 кН.)

§ 1.19. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

Пространственное расположение сил, приложенных к телу или к точке,— распространенное явление, и поэтому во всех задачах механики на рассматриваемые тела действуют пространственные сис-

темы сил. Реально действующая на тело плоская система сил — явление исключительное, но к такой системе, ради упрощения решения задачи, обычно сводят пространственную систему с симметричным расположением сил относительно какой-либо плоскости. Например, задачу с пятью пространственными сходящимися силами, рассмотренными в примере 1.13 (см. § 1.18), можно свести к эквивалентной системе из четырех сил, расположенных в плоскости $EKCD$, заменив реакции $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ их равнодействующей, которая благодаря симметричному действию сил направлена по линии DK. (После того как эта равнодействующая определена, легко разложить ее на искомые составляющие $\boldsymbol{R}_A$ и $\boldsymbol{R}_B$ и вычислить их модули.)

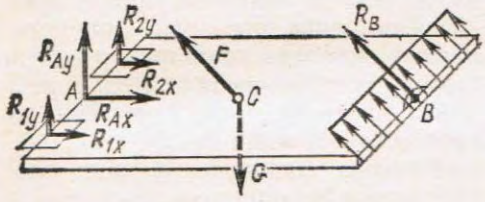


Рис. 1.72

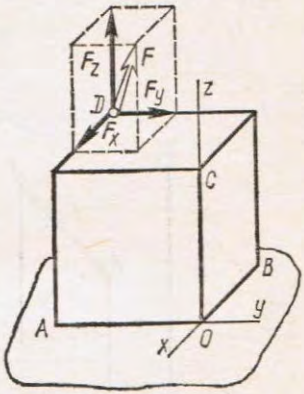


Рис. 1.73

В примере 1.10 (см. § 1.16) рассмотрена плоская система сил, эквивалентная пространственной системе (рис. 1.72), которая и действует на крышку люка; сила $\boldsymbol{R}_B$ есть не что иное, как равнодействующая равномерно распределенной реакции опоры, действующей на переднее ребро крышки люка по всей его длине, а силы $\boldsymbol{R}_{Ax}$ $\boldsymbol{R}_{Ay}$— равнодействующие соответственно равных по модулю сил $\boldsymbol{R}_{1x}$, $\boldsymbol{R}_{2x}$ и $\boldsymbol{R}_{1y}$, $\boldsymbol{R}_{2y}$— горизонтальных и вертикальных составляющих реакций петель, которыми крышка прикреплена к полу. Если за рукоятку B потянуть крышку вертикально вверх, то она начнет поворачиваться около оси, проходящей через петли, при этом действие силы $\boldsymbol{F}$ помогает поворачивающей силе, а сила тяжести препятствует.

Таким образом, при рассмотрении пространственной системы сил необходимо ввести понятие о моменте силы относительно оси.

Пусть сила $\boldsymbol{F}$ приложена к точке C на верхней грани тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, и направлена не перпендикулярно поверхности этой грани (рис. 1.73). Разложим силу $\boldsymbol{F}$ на три составляющие $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$ и $\boldsymbol{F}_z$, направленные параллельно осям x, y и z, расположенным вдоль ребер параллелепипеда. Из рисунка видно, что сила $\boldsymbol{F}$ производит на тело относительно выбранных осей сложные воздействия: составляющая $\boldsymbol{F}_x$ стремится повернуть тело вокруг ребер OA (ось y) и OC (ось z), составляющая $\boldsymbol{F}_y$ стремится повернуть тело вокруг ребра OB (ось x), а также ре-

бра OC (ось z), но в противоположную сторону, чем составляющая F_x, составляющая F_z стремится повернуть тело вокруг ребер OA (ось y) и OB (ось x).

Значит, вращающий эффект относительно какой-либо оси создает та составляющая силы F, которая лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси. Но составляющая силы F, параллельная плоскости, равна проекции силы F на ту же плоскость (рис. 1.73). Поэтому, обозначив момент силы F относительно осей $M_x(F)$, $M_y(F)$ и $M_z(F)$, можем записать:

$$M_x(F) = \pm F_{yz} l; \quad M_y(F) = \pm F_{xz} l \text{ и } M_z(F) = \pm F_{xy} l, \quad (1.52)$$

где F_{yz}, F_{xz} и F_{xy} — модули проекций сил на плоскости, перпендикулярные той оси, относительно которой определяется момент *; l — плечи, равные длинам перпендикуляров от точки пересечения оси с плоскостью до проекции или ее продолжения; знак плюс или минус ставится в зависимости от того, в какую сторону поворачивается плечо l вектором проекции, если смотреть на плоскость проекции со стороны положительного направления оси; при стремлении вектора проекции повернуть плечо против хода часовой стрелки момент условимся считать положительным, и наоборот.

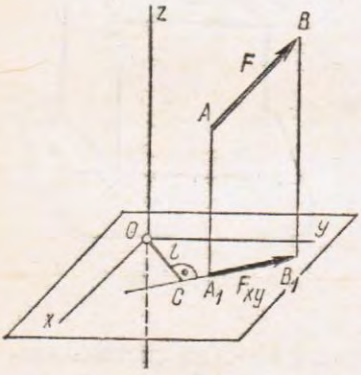


Рис. 1.74

Следовательно, *моментом силы относительно оси называется алгебраическая (скалярная) величина, равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.*

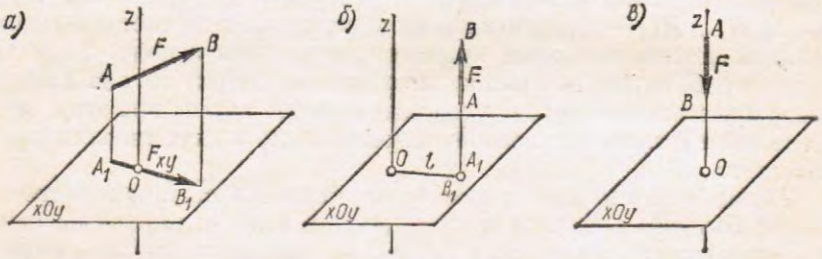


Рис. 1.75

Рис. 1.74 иллюстрирует последовательность определения момента силы F относительно оси z. Если задана сила и выбрана (или задана) ось, то: а) перпендикулярно оси выбирают плоскость, (пло-

* За плоскость проекций не обязательно принимать плоскость, в которой лежат две другие оси. Это может быть любая параллельная ей плоскость.

скость xOy); б) силу $\boldsymbol{F}$ проецируют на эту плоскость и определяют модуль F_{xy} этой проекции; в) из точки O пересечения оси с плоскостью опускают перпендикуляр OC к проекции $\boldsymbol{F}_{xy}$ и определяют плечо $l=OC$; г) глядя на плоскость xOy со стороны положительного направления оси z (т. е. в данном случае сверху), видим, что OC поворачивается вектором $\boldsymbol{F}_{xy}$ против хода стрелки часов, значит

$$M_z(\boldsymbol{F}) = F_{xy}l.$$

Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости (рис. 1.75): а) сила $\boldsymbol{F}$ пересекает ось (в этом случае $l=0$); б) сила $\boldsymbol{F}$ параллельна оси ($F_{xy}=0$); в) сила $\boldsymbol{F}$ действует вдоль оси ($l=0$ и $F_{xy}=0$).

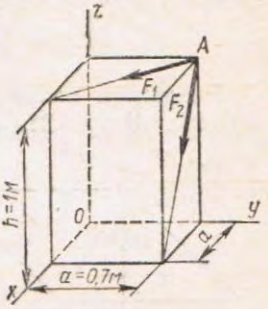


Рис. 1.76

Пример 1.14. К вершине A прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.76) приложены силы $F_1=200$ Н и $F_2=300$ Н. Определить моменты сил относительно каждой из трех осей.

Решение выполните самостоятельно и убедитесь, что $M_x(\boldsymbol{F}_1)=M_y(\boldsymbol{F}_1)=141$ Н·м, $M_z(\boldsymbol{F}_1)=-99$ Н·м; $M_x(\boldsymbol{F}_2)=-172$ Н·м, $M_y(\boldsymbol{F}_2)=172$ Н·м; $M_z(\boldsymbol{F}_2)=-120$ Н·м.

§ 1.20. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ

В § 1.12 подробно изложен процесс приведения сил к точке и доказано, что любая плоская система сил приводится к силе — главному вектору и паре, момент которой называется главным моментом. Причем эквивалентные данной системе сил сила и пара действуют в той же плоскости, что и заданная система. Значит, если главный момент изобразить в виде вектора (см. § 1.7), то главный вектор и главный момент плоской системы сил всегда перпендикулярны друг другу.

Рассуждая аналогично, можно последовательно привести к точке силы пространственной системы. Но теперь главный вектор есть замыкающий вектор пространственного (а не плоского) силового многоугольника; главный момент уже нельзя получить алгебраическим сложением моментов данных сил относительно точки приведения. При приведении к точке пространственной системы сил присоединенные пары действуют в различных плоскостях и их моменты целесообразно представлять в виде векторов и складывать геометрически. Поэтому полученные в результате приведения пространственной системы сил главный вектор (геометрическая сумма сил системы) и главный момент (геометрическая сумма моментов сил относительно точки приведения), вообще говоря, не перпендикулярны друг другу.

Допустим, что заданная произвольная пространственная система сил приведена к точке и получены главный вектор $\boldsymbol{F}_{гл}$ и глав-

ный момент $M_{гл}$ (рис. 1.77). Спроецируем $\boldsymbol{F}_{гл}$ на оси координат, тогда [см. равенство (1.49)] модуль главного вектора

$$F_{гл}=\sqrt{F^2_{гл\,x}+F^2_{гл\,y}+F^2_{гл\,z}}, \qquad (1.53)$$

где каждая из проекций главного вектора на оси равна алгебраической сумме проекций всех сил системы на ту же ось, т. е.

$$F_{гл\,x}=\sum F_{kx}, \quad F_{гл\,y}=\sum F_{ky}, \quad F_{гл\,z}=\sum F_{kz}. \qquad (1.54)$$

Разложим вектор главного момента $\boldsymbol{M}_{гл}$ на три составляющих вектора $\boldsymbol{M}_{гл\,x}$, $\boldsymbol{M}_{гл\,y}$ и $\boldsymbol{M}_{гл\,z}$, модуль каждого из которых равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно соответствующей оси *. Следовательно, модуль главного момента

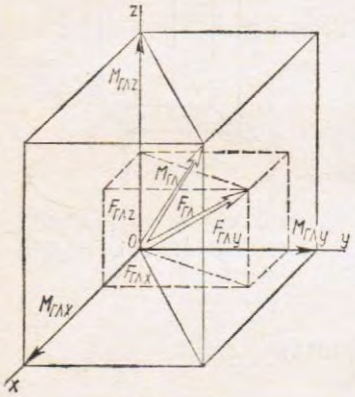


Рис. 1.77

$$M_{гл}=\sqrt{M^2_{гл\,x}+M^2_{гл\,y}+M^2_{гл\,z}}, \qquad (1.55)$$

где, как сказано выше,

$$M_{гл\,x}=\sum M_x(\boldsymbol{F}_k), \; M_{гл\,y}=\sum M_y(\boldsymbol{F}_k), \; M_{гл\,z}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_k). \qquad (1.56)$$

Направления главного вектора и главного момента, т. е. углы, образуемые ими с осями координат, находим с помощью формул, аналогичных (1.50).

Когда пространственная система сил приводится к силе и к паре, возможны четыре окончательных результата:

1) $\boldsymbol{F}_{гл}$ и $M_{гл}$ перпендикулярны друг другу (рис. 1.78). В этом случае система сил приводится к равнодействующей силе $\boldsymbol{F}_{\Sigma}$, равной главному вектору $\boldsymbol{F}_{гл}$, причем линия действия этой равнодействующей проходит через точку C, лежащую на прямой, перпендикулярной плоскости, в которой расположены векторы $\boldsymbol{F}_{гл}$ и $\boldsymbol{M}_{гл}$ на расстоянии от точки O $OC=M_{гл}/F_{\Sigma}$**.

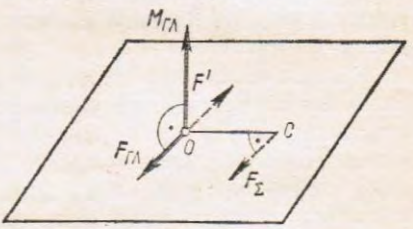


Рис. 1.78

2. $\boldsymbol{F}_{гл}$ и $\boldsymbol{M}_{гл}$ не перпендикулярны друг другу (рис. 1.79, *а*). В этом случае система сил не приводится к равнодействующей. Действительно, разложим вектор $\boldsymbol{M}_{гл}$ на два составляющих вектора $\boldsymbol{M}_{гл\,1}$ и $\boldsymbol{M}_{гл\,2}$ (рис. 1.79, *б*). Вектор $\boldsymbol{M}_{гл\,2}$, перпендикулярный $\boldsymbol{F}_{гл}$, эквивалентен паре, действующей в плоскости главного вектора,

* Доказательства справедливости этого утверждения можно отыскать в [6, 15, 26].

** К этому же результату приходили, если $\boldsymbol{F}_{гл}\neq 0$ и $\boldsymbol{M}_{гл}=0$.

поэтому, изобразив момент $M_{гл\,2}$ парой ($F'_{гл}$, $F_{гл}$) с плечом $OC = M_{гл\,2}/F_{гл}$ (рис. 1.79, *в*), видим, что силы $F_{гл}$ и $F'_{гл}$, действующие по прямой, проходящей через точку O, взаимно уравновешиваются.

Остаются пара с моментом $M_{гл\,1}$ и главный вектор, действующий вдоль проходящей через точку C прямой, которая называется

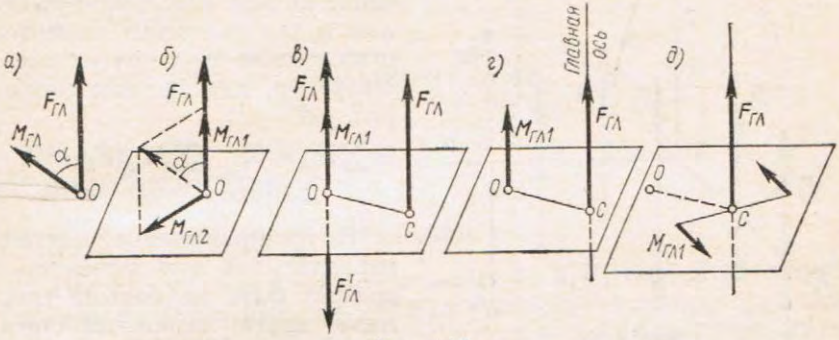


Рис. 1.79

главной осью данной системы сил (рис. 1.79, *г*). Изобразив теперь момент $M_{гл\,1}$ в виде пары, как на рис. 1.79, *д*, получим систему силы и пары, которая называется *динамическим винтом*.

3. $F_{гл}=0$, $M_{гл}\neq 0$ — система сил эквивалентна паре сил.
4. $F_{гл}=0$, $M_{гл}=0$ — система сил уравновешена.

Векторные равенства

$$F_{гл}=0 \text{ и } M_{гл}=0 \qquad (1.57)$$

выражают *необходимое и достаточное условие равновесия произвольной пространственной системы сил*.

Если главный вектор равен нулю, то его проекции на три взаимно перпендикулярные оси также равны нулю; если главный момент равен нулю, то равны нулю и три его составляющие на те же оси. Поэтому из уравнений (1.54) и (1.56) имеем

$$\left.\begin{array}{ll} \sum F_{kx}=0, & \sum M_x(F_k)=0; \\ \sum F_{ky}=0, & \sum M_y(F_k)=0; \\ \sum F_{kz}=0, & \sum M_z(F_k)=0. \end{array}\right\} \qquad (1.58)$$

Значит, произвольная плоская система сил статически определима лишь в том случае, когда число неизвестных не превышает шести.

Среди задач статики часто встречаются такие, в которых на тело действует пространственная система параллельных друг другу сил (рис. 1.80). Тогда, расположив оси координат так, чтобы одна из них была направлена параллельно силам, видим: а) проекции сил на оси, лежащие в плоскости, перпендикулярной силам, равны нулю и, значит, два уравнения проекций на эти оси превращаются в тождества вида $0=0$; б) проекции сил на ось, им параллельную, равны модулям сил, взятым либо со знаком плюс, либо со знаком

минус; в) моменты сил относительно оси, параллельной силам, равны нулю, и уравнения моментов относительно этой оси превращаются в тождество вида $0=0$.

Следовательно, для пространственной системы параллельных сил можно составить только три уравнения — одно уравнение проекций на ось, параллельную силам, и два уравнения моментов относительно двух других осей. Например, для системы сил на рис. 1.80

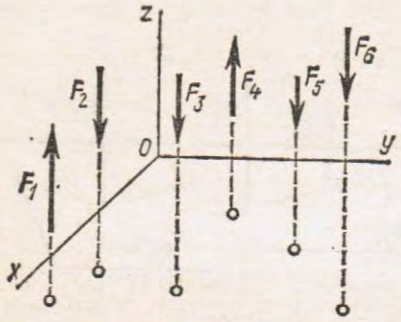


Рис. 1.80

$$\sum F_{kz}=0, \quad \sum M_x(F_k)=0, \quad \sum M_y(F_k)=0. \qquad (1.59)$$

В пространственной системе параллельных сил неизвестных должно быть не больше трех, иначе задача становится статически неопределимой.

Пример 1.15. Жестко заделанная балка длиной $l=1{,}4$ м и квадратным поперечным сечением со стороной $a=0{,}2$ м нагружена, как показано на рис. 1.81, *а*, горизонтальной силой $F=2$ кН и вертикальной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=1$ кН/м. Определить реакции заделки.

Решение. 1. Освободим балку от заделки. Известно, что со стороны заделки на балку действуют реактивные сила и пара сил. Реактивную силу представим в виде трех составляющих R_{Ox}, R_{Oy}, R_{Oz} (рис. 1.81, *б*), действующих вдоль осей координат, а реактивный момент — в виде моментов пар M_{Ox}, M_{Oy} и M_{Oz}, действующих в плоскостях, перпендикулярных осям (эти моменты изображены на рис. 1.81, *б* круговыми стрелками, огибающими оси против хода стрелки часов, если смотреть со стороны положительного направления оси).

2. Равномерно распределенную нагрузку заменим сосредоточенной силой $F_q=ql=1\cdot1{,}4$ кН$=1{,}4$ кН.

3. Составим уравнения равновесия:

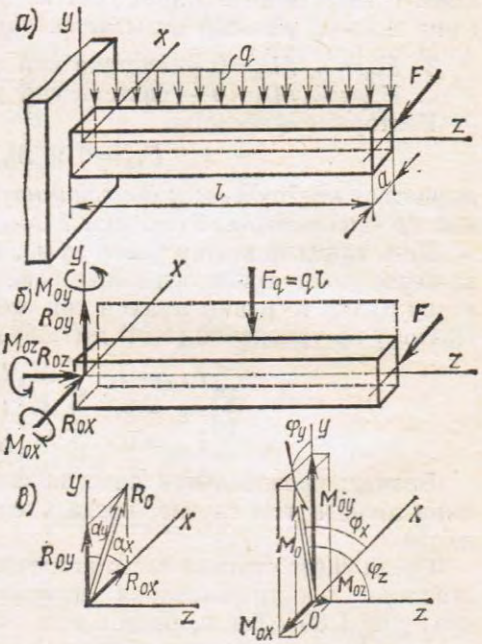


Рис. 1.81

$$\sum F_{kx}=0;\ R_{Ox}-F=0;\ \sum M_x(F_k)=0;\ M_{Ox}+F_q l/2=0;$$
$$\sum F_{ky}=0;\ R_{Oy}-F_q=0;\ \sum M_y(F_k)=0;\ M_{Oy}-Fl=0;$$
$$\sum F_{kz}=0;\ R_{Oz}=0;\ \sum M_z(F_k)=0;\ M_{Oz}-F_q a/2=0.$$

4. Решив уравнения, найдем:

$$R_{Ox}=2\text{ кН},\ R_{Oy}=1{,}4\text{ кН},\ R_{Oz}=0;$$
$$M_{Ox}=-0{,}98\text{ кН}\cdot\text{м},\ M_{Oy}=2{,}8\text{ кН}\cdot\text{м},\ M_{Oz}=0{,}14\text{ кН}\cdot\text{м}.$$

5. По найденным модулям составляющих реактивной силы R_O и момента реактивной пары M_O (они показаны на рис. 1.81, *в* раздельно) можно определить их модули R_O и M_O и направление действия. Эту часть задачи решите самостоятельно и убедитесь, что

$$R=2{,}44\text{ кН};\ \alpha_x\approx 35°,\ \alpha_y\approx 55°,\ \alpha_z=90°;$$
$$M_O=2{,}83\text{ кН}\cdot\text{м},\ \varphi_x=110°\,20',\ \varphi_y=12°\,40',\ \varphi_z=87°\,10'.$$

Глава 6
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

§ 1.21. ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

Представим, что к трем точкам A_1, A_2 и A_3 твердого тела приложены параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$, образующие пространственную систему (рис. 1.82, *а*). Как известно из § 1.13, равнодействующая двух параллельных сил равна по модулю сумме их модулей, а линия действия делит расстояние между точками приложения слагаемых сил на отрезки, обратно пропорциональные силам (см. формулу (1.32)].

Сложив силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, получим равнодействующую $\boldsymbol{F}_{1-2}$ с модулем $F_{1-2}=F_1+F_2$ и приложенную в точке B, причем

$$F_1/BA_2=F_2/A_1B=F_{1-2}/A_1A_2. \qquad (а)$$

Сложив далее силы $\boldsymbol{F}_{1-2}$ и $\boldsymbol{F}_3$, получим равнодействующую трех данных сил $F_\Sigma=F_1+F_2+F_3$, приложенную в точке C, лежащей на отрезке BA_3 и делящей его на две части согласно той же зависимости (1.32):

$$F_{1-2}/CA_3=F_3/BC=F_\Sigma/BA_3. \qquad (б)$$

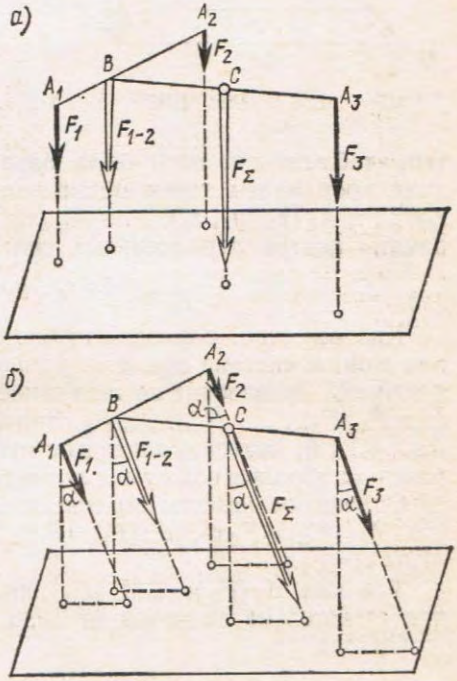


Рис. 1.82

Точка C, через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил, называется *центром параллельных сил*.

Центр параллельных сил не меняет своего положения относительно точек приложения данных сил, если все силы, не нарушая их параллельности, повернуть на один и тот же угол.

Действительно, если повернуть силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ на угол α, не изменив их параллельности (рис. 1.82, *б*), то, повторив последовательное сложение сил, увидим, что равнодействующая $\boldsymbol{F}_{1-2}$ окажется приложенной в той же точке B, так как соотношение (а) сохраняет свою силу. При сложении $\boldsymbol{F}_{1-2}$ и $\boldsymbol{F}_3$ зависимость (б) также не изменится, значит положение точки C — центра параллельных сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ — относительно точек A_1, A_2 и A_3 останется прежним.

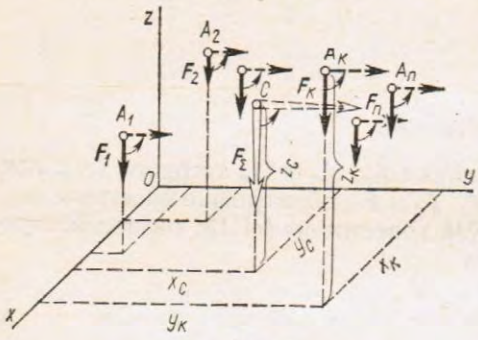


Рис. 1.83

Это важное свойство центра параллельных сил, рассмотренное для трех сил, справедливо для системы с любым числом параллельных сил.

Если тело, на которое в точках A_1, A_2, . . ., A_k, . . ., A_n действуют параллельные силы $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, . . ., $\boldsymbol{F}_k$, . . ., $\boldsymbol{F}_n$, связать с системой координатных осей так, чтобы одна из осей была параллельна силам (рис. 1.83), то, зная координаты точек приложения сил $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, . . ., $A_k(x_k, y_k, z_k)$, . . . $A_n(x_n, y_n, z_n)$, легко определить координаты центра параллельных сил:

$$C(x_C,\ y_C,\ z_C).$$

Как известно, равнодействующей называется сила, эквивалентная данной системе сил, т. е. равнодействующая $\boldsymbol{F}_\Sigma$, приложенная в точке C, производит на тело такое же действие, как и вся система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, . . ., $\boldsymbol{F}_k$, . . ., $\boldsymbol{F}_n$. Значит, согласно теореме Вариньона (см. § 1.13), момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов сил относительно той же оси.

Определим моменты сил относительно оси y. Из рис. 1.83 следует, что $M_y(\boldsymbol{F}_\Sigma)=F_\Sigma x_C$, $M_y(\boldsymbol{F}_1)=F_1x_1$, . . ., $M_y(\boldsymbol{F}_k)=F_kx_k$, . . ., $M_y(\boldsymbol{F}_n)=F_nx_n$.

Так как $M_y(\boldsymbol{F}_\Sigma)=\Sigma M_y(\boldsymbol{F}_k)$, то $F_\Sigma x_C=\Sigma F_kx_k$, где k принимает последовательно значения от 1 до n.

Отсюда

$$x_C=\sum F_kx_k/F_\Sigma,$$

где $F_\Sigma=F_1+F_2+\ldots+F_k+\ldots+F_n$. Поэтому формула для определения абсциссы центра параллельных сил принимает окончательный вид

$$x_C=\sum F_kx_k/\sum F_k.$$

Определив последовательно момент равнодействующей и моменты всех составляющих сил относительно оси x, найдем, что $F_\Sigma y_C = \Sigma F_k y_k$, откуда следует формула для определения ординаты центра параллельных сил

$$y_C = \sum F_k y_k / \sum F_k.$$

Аналогичную формулу для третьей координаты (аппликаты) центра параллельных сил

$$z_C = \sum F_k z_k / \sum F_k$$

получим, если повернем все силы на 90°, например так, чтобы они расположились параллельно оси y, и определим моменты сил относительно оси x.

Следовательно, *формулы координат центра параллельных сил* имеют вид

$$x_C = \frac{\Sigma F_k x_k}{\Sigma F_k}, \quad y_C = \frac{\Sigma F_k y_k}{\Sigma F_k}, \quad z_C = \frac{\Sigma F_k z_k}{\Sigma F_k}, \tag{1.60}$$

где F_k — модули параллельных сил, x_k, y_k, z_k — координаты точек их приложения.

§ 1.22. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

Сила тяжести — одно из проявлений закона всемирного тяготения. Это сила, распределенная по всему объему тела, так как на каждую его материальную частицу действует сила притяжения, направленная к центру Земли. Силы притяжения, приложенные к частицам твердого тела, образуют систему с линиями действия, сходящимися в центре Земли. Но радиус Земли 6380 км и, если взять у поверхности Земли две материальные точки A и B, например, на расстоянии 10 м одну от другой, то линии действия сил тяжести этих точек образуют угол $\alpha = AB/r_з = 10/6380000 = 1{,}57 \cdot 10^{-7}$ рад. Выразив этот угол в секундах, получим $\alpha \approx 0{,}3''$. Следовательно, углы между линиями действия сил тяжести двух соседних точек тела настолько малы, что систему сил тяжести $\boldsymbol{G}_k$ (рис. 1.84, *а*), приложенных к телу, размеры которого достигают даже нескольких сотен метров, практически безошибочно можно считать параллельной.

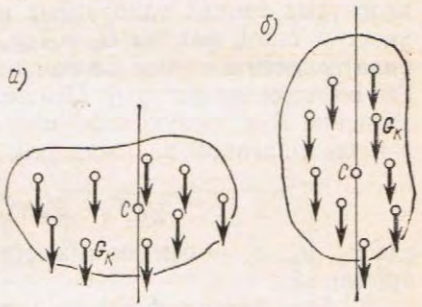


Рис. 1.84

Центр параллельных сил тяжести $\boldsymbol{G}_k$ всех частиц тела называется *центром тяжести* тела. Через центр тяжести C проходит линия действия силы $\boldsymbol{G}$ — равнодействующей сил тяжести ($\boldsymbol{G} = \Sigma \boldsymbol{G}_k$) при любом положении тела относительно поверхности Земли (рис. 1.84, *а*, *б*).

Если в формулах (1.60) модули сил F_k заменим модулями сил тяжести G_k, то получим формулы координат центра тяжести тела:

$$x_C=\frac{\Sigma G_k x_k}{\Sigma G_k},\quad y_C=\frac{\Sigma G_k y_k}{\Sigma G_k},\quad z_C=\frac{\Sigma G_k z_k}{\Sigma G_k}. \tag{1.61}$$

Формулы (1.61) используют лишь в тех случаях, когда требуется определить положение центра тяжести неоднородного тела или неизменяемой системы тел из различных материалов. Обычно определяют положения центров тяжести однородных тел и тогда из формул (1.61) следуют три их разновидности.

1. Если тело имеет вид пространственной фигуры, составленной из однородных тонких прутков (т. е. имеет вид решетки или каркаса), то сила тяжести любого прямолинейного или криволинейного участка фигуры $G_k=l_k q$, где q — постоянная для всей фигуры сила тяжести единицы длины материала (интенсивность силы тяжести по длине материала фигуры). После подстановки в формулы (1.61) вместо G_k его значения $l_k q$ постоянный множитель q в каждом слагаемом числителя и знаменателя вынесем за знак суммы (за скобки) и сократим. В результате получим формулы координат центров тяжести фигур в виде решетки (каркаса):

$$x_C=\frac{\Sigma l_k x_k}{\Sigma l_k},\quad y_C=\frac{\Sigma l_k y_k}{\Sigma l_k},\quad z_C=\frac{\Sigma l_k z_k}{\Sigma l_k}, \tag{1.62}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты центров тяжести отдельных участков фигуры длиной l_k.

2. Если тело имеет вид фигуры, составленной из плоских или изогнутых тонких однородных пластин, то сила тяжести каждого участка такой фигуры $G_k=A_k p$, где A_k — площадь участка, p — сила тяжести единицы площади фигуры (интенсивность силы тяжести по площади фигуры). Подставив в формулу (1.61) вместо G_k его значение $A_k q$, получим формулы координат центра тяжести фигуры, составленной из площадей:

$$x_C=\frac{\Sigma A_k x_k}{\Sigma A_k},\quad y_C=\frac{\Sigma A_k y_k}{\Sigma A_k}\qquad z_C=\frac{\Sigma A_k z_C}{\Sigma A_k}, \tag{1.63}$$

где x_k, y_k, z_k — центры тяжести отдельных участков фигуры площадью A_k.

3. Аналогичные формулы получим и для тел, составленных из объемов, если в формулах (1.61) заменим $G_k=V_k d$, где V_k — объемы участков тела, силы тяжести которых G_k, d — постоянная для всего тела сила тяжести единицы объема (интенсивность силы тяжести по объему тела или, иначе, объемная сила тяжести):

$$x_C=\frac{\Sigma V_k x_k}{\Sigma V_k},\quad y_C=\frac{\Sigma V_k y_k}{\Sigma V_k},\quad z_C=\frac{\Sigma V_k z_k}{\Sigma V_k}. \tag{1.64}$$

Здесь x_k, y_k, z_k — координаты центров тяжести участков тела с объемами V_k.

Для плоских фигур из трех формул (1.62) или (1.63) используют две. Для плоской фигуры, составленной из линий, прутков,

$$x_C=\sum l_k x_k/\sum l_k,\quad y_C=\sum l_k y_k/\sum l_k.$$

Для плоской фигуры, составленной из площадей,

$$x_C = \sum A_k x_k / \sum A_k, \quad y_C = \sum A_k y_k / \sum A_k.$$

При решении задач механики используют чаще последние формулы.

Числители в этих формулах, равные алгебраическим суммам произведений площадей частей плоской фигуры на расстояния их центров тяжести до соответствующей оси, называют *статическими моментами плоской фигуры относительно осей*. Следовательно, $\Sigma A_k x_k$ — статический момент плоской фигуры относительно оси y, $\Sigma A_k y_k$ — статический момент плоской фигуры относительно оси x.

Обозначив статические моменты соответственно S_y, S_x и приняв во внимание, что $\Sigma A_k = A$ — площади всей плоской фигуры, последние две формулы примут вид

$$x_C = S_y / A, \quad y_C = S_x / A. \tag{1.65}$$

Отсюда

$$S_x = A y_C, \quad S_y = A x_C, \tag{1.66}$$

т. е. *статический момент плоской фигуры относительно оси абсцисс равен произведению площади фигуры на ординату ее центра тяжести, а статический момент относительно оси ординат — произведению площади фигуры на абсциссу ее центра тяжести.*

Статический момент плоской фигуры выражается в м³, см³ или в мм³.

Пример 1.16. Определить статические моменты прямоугольника со сторонами $b=20$ см и $h=14$ см относительно осей x и y (рис. 1.85, *а*).

Решение. $S_x = A y_C = 20 \cdot 14 \cdot 7 = 1960$ см³, $S_y = A x_C = 20 \cdot 14 \cdot 10 = 2800$ см³, так как центр тяжести C прямоугольника лежит на пересечении его диагоналей и имеет координаты $x_C = b/2 = 10$ см и $y_C = h/2 = 7$ см.

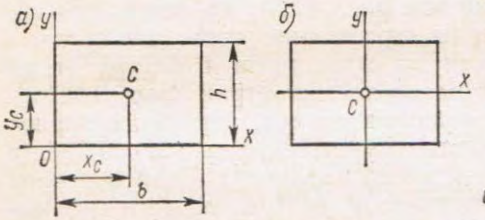


Рис. 1.85

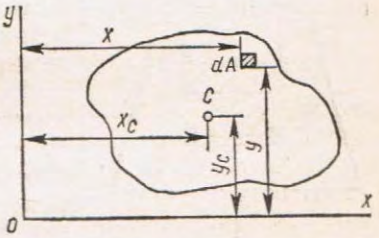


Рис. 1.86

Из равенства (1.66) следует важное свойство статического момента: *статический момент плоской фигуры относительно центральной оси* равен нулю.*

Действительно, если в примере 1.16 начало осей координат поместить в точке C (рис. 1.85, *б*), то при любом положении осей x и y каждая из них будет центральной и в этом случае $x_C = 0$, $y_C = 0$. Значит, $S_y = 0$, $S_x = 0$.

* Оси, проходящей через центр тяжести плоской фигуры.

В случае произвольной плоской фигуры (рис. 1.86) ее площадь находят интегрированием:

$$A = \int_A dA. \tag{1.67}$$

Интегрированием определяют и статические моменты таких плоских фигур:

$$S_y = \int_A x\,dA, \quad S_x = \int_A y\,dA. \tag{1.68}$$

Здесь dA — элементарные площадки плоской фигуры (дифференциал площади), x и y — расстояния от элементарных площадок до осей, знак A у интегралов означает, что интегрирование производится по всей площади.

Исходя из выражений (1.67) и (1.68) формулы координат центра тяжести произвольной плоской фигуры в интегральной форме примут вид

$$x_C = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A}, \quad y_C = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A}, \tag{1.69}$$

полностью соответствующий формулам (1.65).

§ 1.23. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Определение положения центра тяжести симметричных фигур и тел значительно облегчается. Если плоская фигура имеет ось симметрии (рис. 1.87), то центр тяжести фигуры обязательно лежит на оси симметрии, т. е. у симметричных плоских фигур центральная ось координат совпадает с осью симметрии. Если же плоская фигура имеет центр симметрии (см. рис. 1.85), то центр тяжести лежит на пересечении осей симметрии.

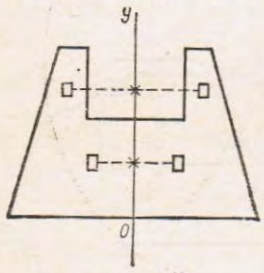


Рис. 1.87

Если пространственная фигура (тело) имеет плоскость симметрии (рис. 1.88, *а*), то координата по оси, перпендикулярной плоскости симметрии, равна нулю (центр тяжести в этой плоскости) и для определения положения центра тяжести необходимо определить лишь две координаты (y_C и z_C). Если же тело имеет две плоскости симметрии (рис. 1.88, *б*), то для определения положения центра тяжести достаточно найти одну координату (ординату z_C). При наличии у тела центра симметрии (правильная призма, цилиндр, шар и т. п.) его центр тяжести определяется положением центра симметрии.

Для успешного решения задач, в которых требуется определять положение центра тяжести тел, полезно знать формулы координат центра тяжести некоторых линий, плоских фигур и тел.

Центр тяжести дуги окружности (рис. 1.89). За начало координат примем точку O — центр дуги AB, ось x совместим с осью симметрии дуги. Дугу разобьем на n элементарных отрезков Δl_k (индекс k принимает значения от 1 до n), координаты центра тяжести каждого такого отрезка x_k и y_k. Абсцисса центра тяжести дуги по пер-

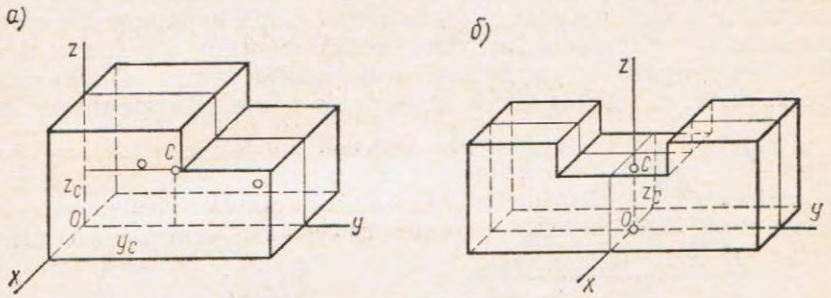


Рис. 1.88

вой из формул (1.62)

$$x_C = \sum \Delta l_k x_k / l,$$

где длина дуги $l = \Sigma \Delta l_k$. Из концов каждого элементарного отрезка Δl_k, приняв его за прямолинейную гипотенузу, проведем параллельные осям катеты Δx_k и Δy_k. Радиус r, проведенный в середину каждого элементарного отрезка дуги, составляет с осью абсцисс угол α_k. Из рис. 1.89 следует, что

$$\cos \alpha_k = x_k / r = \Delta y_k / \Delta l_k,$$

отсюда

$$\Delta l_k x_k = r \, \Delta y_k.$$

Просуммировав это равенство по всей длине дуги, получим

$$\sum \Delta l_k x_k = r \sum \Delta y_k = rh,$$

где $\Sigma \Delta y_k = h$ — длина хорды AB.

Следовательно, абсцисса центра тяжести дуги

$$x_C = rh/l. \qquad (1.70)$$

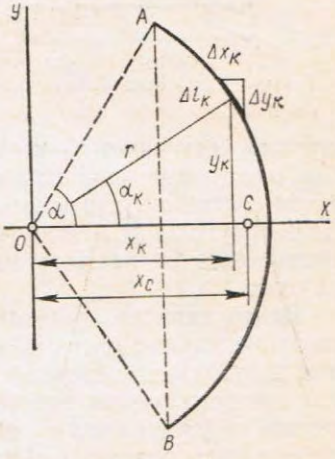


Рис. 1.89

Но $h/2 = r \sin \alpha$ или $h = 2r \sin \alpha$, а $l = 2\alpha r$, поэтому формуле (1.70) можно придать такой вид:

$$x_C = r \sin \alpha / \alpha. \qquad (1.70')$$

В частном случае для полуокружности $h = 2r$, $l = \pi r$ или $\alpha = \pi/2$, $\sin \alpha = 1$ и из формулы (1.70) получаем

$$x_C = 2r/\pi = d/\pi, \qquad (1.71)$$

где $d = 2r$ — диаметр окружности.

Центр тяжести треугольника (рис. 1.90, *а*). Чтобы убедиться, что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, разобьем треугольник на узкие полоски, параллельные одной из сторон. Центр тяжести каждой полоски лежит на ее середине и при переходе от одной полоски к другой их центры тяжести образуют медианы треугольника, на которой и находится центр тяжести всего треугольника. Разбив треугольник на полоски, параллельные второй стороне, получим вторую медиану, и точка пересечения ее с первой определит положение центра тяжести C треугольника. Зная, что длина части медианы от точки их пересечения до

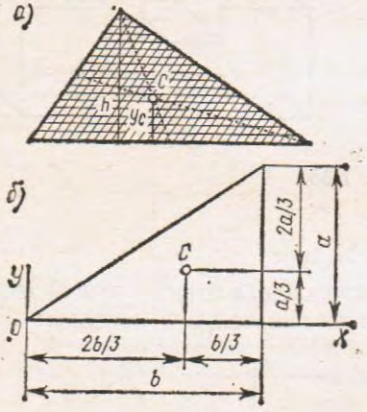


Рис. 1.90

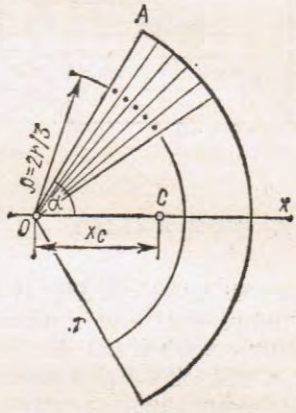


Рис. 1.91

стороны составляет $^1/_3$ всей медианы, легко доказать, что кратчайшее расстояние от центра тяжести треугольника до стороны равно трети соответствующей высоты (например, на рис. 1.90, *а* $y_C=h/3$). Если треугольник прямоугольный (рис. 1.90, *б*), то центр тяжести C расположен от каждого катета на расстоянии, равном $^1/_3$ длины другого.

Центр тяжести кругового сектора (рис. 1.91). Разделим сектор на элементарные секторы, которые можно принять за равнобедренные треугольники высотой, равной радиусу сектора r. Центр тяжести каждого элементарного треугольника (сектора) лежит на его высоте на расстоянии $\rho=(2/3)r$ от вершины O, а все вместе они образуют дугу радиуса ρ. Подставив в формулу (1.70′) вместо r значение ρ, получим абсциссу центра тяжести кругового сектора

$$x_C=(2/3)\,r\sin\alpha/\alpha. \qquad (1.72)$$

В частном случае для полукруга $\alpha=\pi/2$, $\sin\alpha=1$ и формула (1.72) принимает вид

$$x_C=4r/(3\pi)=2d/(3\pi). \qquad (1.73)$$

Центр тяжести параболического треугольника. Параболическим треугольником называется фигура, ограниченная дугой параболы

$y=ax^2$ с вершиной в начале координат, осью абсцисс и ординатой $y=h$ (рис. 1.92). Для определения координат центра тяжести параболического треугольника используем формулы (1.67), (1.68) и (1.69).

Разобьем площадь треугольника на полоски бесконечно малой ширины dx и переменной высоты $y=ax^2$. Тогда элементарная площадка $dA=ydx=ax^2dx$. Подставив значение dA в выражение $A=\int dA$ и проинтегрировав по всей площади, т. е. при изменении x от 0 до b, получим

$$A=a\int_0^b x^2\,dx=ab^3/3=hb/3.$$

Статический момент элементарной площадки dA относительно оси y $x\,dA=ax^3dx$. Проинтегрировав это выражение по всей площади параболического треугольника (т. е. в пределах изменения x от 0 до b), получим

$$S_y=a\int_0^b x^3\,dx=ab^4/4=hb^2/4.$$

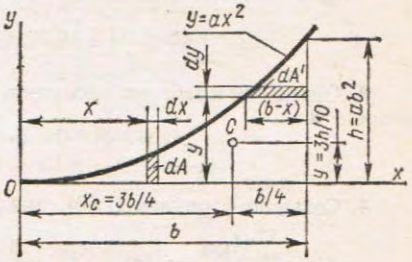


Рис. 1.92

Для определения статического момента параболического треугольника относительно оси x разобьем его на полоски бесконечно малой высоты dy и ширины $(b-x)$, тогда элементарная площадка

$$dA'=(b-x)\,dy=2ax\,(b-x)\,dx,$$

так как $dy=2axdx$. Следовательно, статический момент элементарной площадки относительно оси x $y\,dA'=2a^2x^3(b-x)dx$.

Проинтегрировав это выражение по всей площади, получим

$$S_x=2a^2\int_0^b x^3(b-x)\,dx=2a^2\left(\frac{b^5}{4}-\frac{b^5}{5}\right)=\frac{a^2b^5}{10}=\frac{h^2b}{10}.$$

Из формул (1.69) получаем координаты центра тяжести:

$$x_C=\frac{S_y}{A}=\frac{hb^2}{4}:\frac{hb}{3}=\frac{3}{4}b;\quad y_C=\frac{S_x}{A}=\frac{h^2b}{10}:\frac{hb}{3}=\frac{3}{10}h.$$

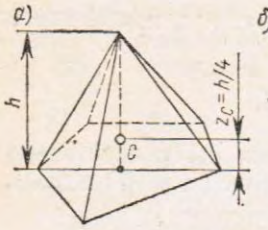
Центр тяжести пирамиды (рис. 1.93, *а*) или **конуса** (рис. 1.93, *б*) лежит на отрезке, соединяющем вершину пирамиды (конуса) с центром тяжести основания, на расстоянии ¼ высоты пирамиды (конуса) *.

Пример 1.17. Определить положение центра тяжести тонкой однородной пластины, форма и размеры которой показаны на рис. 1.94.

Решение. 1. Пластина имеет осевую симметрию, поэтому с осью симметрии совместим ось y, а ось x совместим с основанием пластины.

* Справедливость этого утверждения докажите самостоятельно.

2. Представим, что пластина составлена из двух прямоугольников: *1* — со сторонами 200×300 мм и *2* — со сторонами (300—2.75)×(200—80) мм=150××120 мм. Но так как второй прямоугольник вырезан из первого, его площадь считаем отрицательной *. Центры тяжести C_1 и C_2 прямоугольников *1* и *2* лежат на оси y и их положение определяется пересечением диагоналей каждого прямоугольника.



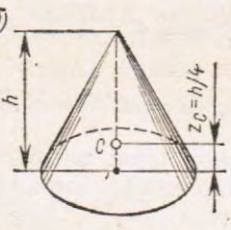


Рис. 1.93

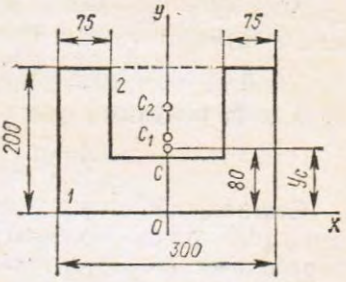


Рис. 1.94

3. Определим и запишем площади и координаты центров тяжести прямоугольников *1* и *2*:

$$A_1 = 200 \cdot 300 = 6 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;\ C_1\ (0;\ 100);$$
$$A_2 = -150 \cdot 120 = -1{,}8 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;\ C_2\ (0;\ 140).$$

4. Согласно формулам (1.63), имеем $x_C=0$ и

$$y_C = \frac{\sum A_k y_k}{\sum A_k} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 100 - 1{,}8 \cdot 10^4 \cdot 140}{6 \cdot 10^4 - 1{,}8 \cdot 10^4} = 82{,}8 \text{ мм}.$$

Следовательно, координаты центра тяжести пластинки C (0; 82,8).

Если бы на рис. 1.94 был изображен согнутый из тонкой проволоки замкнутый контур, а не пластина, то ордината центра тяжести $y_C=97{,}9$ мм. Примените формулы (1.62) и убедитесь в этом.

Кроме описанного выше координатного метода определения положения центра тяжести тел применяют экспериментальные способы. Рассмотрим два из них.

Способ подвешивания основан на второй аксиоме статики.

Если тело в виде пластинки любой формы (рис. 1.95, *а*) подвесить на нити, например в точке A, то при равновесии центр тяжести тела обязательно займет положение на вертикали, проходящей через точку подвеса A, так как только при таком положении центра тяжести сила тяжести и реакция нити AO уравновешивают друг друга. С помощью отвеса OD отметим на теле линию AA_1, на которой расположен искомый центр тяжести. Подвесив затем тело на нити в другой точке, например B (рис. 1.95, *б*), получим линию BB_1, которая пересечением с линией AA_1 фиксирует положение центра тяжести C. Для проверки можно подвесить тело в какой-либо третьей точке и в этом случае отвесная линия, проведенная из точки подвеса, пройдет через точку C — центр тяжести тела.

* Этот способ разбиения фигуры на составные части называется способом отрицательных площадей. Не прибегая к нему, фигуру можно разбить на три прямоугольника с положительными площадями.

Способ взвешивания применяют для определения положения центра тяжести тел сложной формы, а также при необходимости экспериментальной проверки расчетных данных. Например, положение центра тяжести самолетов взвешиванием находят следующим образом. Главные колеса, вблизи которых обычно и расположен центр тяжести самолета, а также переднее колесо (или заднее, если центр тяжести расположен за главными колесами) устанавливают на весы *1*, *2* и *3** таким образом, чтобы самолет находился строго в полетном положении (рис. 1.96). Сумма показаний R_1, R_2 и R_3 равна силе тяжести самолета: $G=R_1+R_2+R_3$. Составив уравнение

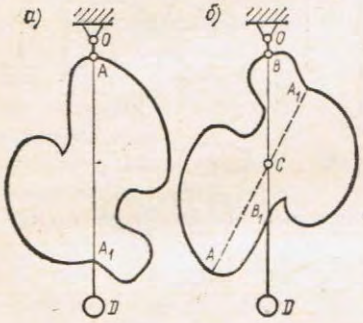


Рис. 1.95

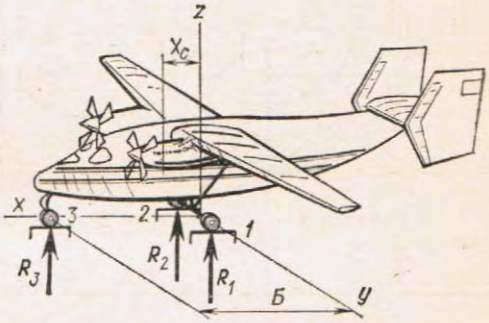


Рис. 1.96

моментов относительно оси y, совпадающей с осью главных колес, получим

$$R_3Б - Gx_C = 0,$$

где $Б$ — база самолета, т. е. расстояние от главных колес до переднего (или заднего) колеса. Отсюда абсцисса центра тяжести самолета $x_C=R_3Б/G$.

§ 1.24. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ

Понятие механики «устойчивость равновесия» имеет большое практическое значение и используется в строительстве при возведении промышленных и жилых зданий, машиностроении, кораблестроении, авиастроении и т. д.

Как известно из физики, имеющее точку опоры тело, на которое действует только сила тяжести, находится в равновесии, если сила тяжести и реакция опоры действуют вдоль одной прямой (вторая аксиома статики). Но при этом наблюдаются три разновидности равновесия:

устойчивое, при выведении из которого тело возвращается в прежнее положение. Примером устойчивого равновесия может служить тяжелый шарик, лежащий внутри чашки (рис. 1.97, *а*), или тяжелый шарик, подвешенный на нити (рис. 1.97, *б*). В обоих

* Это либо обычные рычажные (сотенные или тысячные) весы, либо электротензометрические.

случаях при выведении шарика из положения равновесия возникает сила $F_\Sigma = G + R$, возвращающая шарик в первоначальное положение;

неустойчивое, при выведении из которого тело не возвращается в прежнее положение, а удаляется от него еще дальше. Шарик на самой верхней точке выпуклой поверхности (рис. 1.98, *а*) или конус, поставленный на вершину (рис. 1.98, *б*), находятся в неустойчивом равновесии, так как достаточно самого ничтожного смещения из этого положения, чтобы шарик под действием силы $F_\Sigma = G + R$

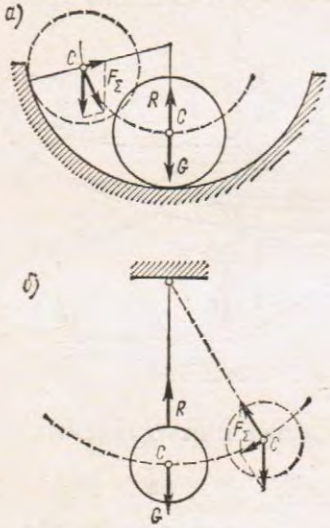


Рис. 1.97

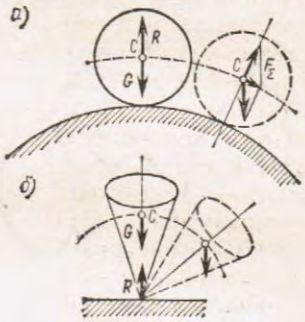


Рис. 1.98

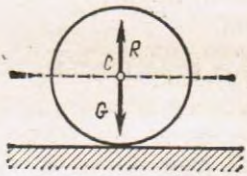


Рис. 1.99

удалился от верхней точки еще дальше, а конус опрокинулся под действием образовавшейся пары (G, R);

безразличное, или нейтральное (рис. 1.99), если при любом смещении тела его равновесие не нарушается.

Условие устойчивости равновесия тела, находящегося под действием силы тяжести, можно получить из сопоставления трех видов равновесия. Условие устойчивости состоит в том, что при выведении из равновесия центр тяжести тела повышается, т. е. *если центр тяжести тела занимает самое низкое положение по сравнению со всеми возможными соседними положениями, то равновесие тела устойчивое.*

На искусном использовании неустойчивого равновесия основано исполнение многих цирковых номеров. В основе же расчетов и построения механических конструкций лежит принцип соблюдения устойчивого равновесия для всех направлений возможного отклонения. В связи с этим рассмотрим равновесие тела не с одной, а несколькими точками опоры, лежащими не на одной прямой, т. е. тела, имеющего опорную плоскость (поверхность).

В зависимости от формы, размеров опорной плоскости, положения центра тяжести относительно этой плоскости и действующих активных сил (их числового значения и направления) устойчивость тела может быть большей или меньшей и, следовательно, поддается измерению и количественному сравнению.

На рис. 1.100, *а* изображены три тела: у тел *1* и *2* центры тяжести расположены на одной высоте от опорной плоскости, но у тела *2* опорная плоскость шире, чем у *1*; опорная плоскость у тела *3* по форме и размерам такая же, как у тела *1*, но центр тяжести расположен ниже — ближе к опорной плоскости. Все три тела находятся в устойчивом равновесии, так как если любое из них немного наклонить (рис. 1.100, *б*), то их центры тяжести C поднимаются, а после прекращения действия поворачивающих сил каждое тело возвращается в первоначальное положение под действием момента силы тяжести $\boldsymbol{G}$ относительно оси поворота.

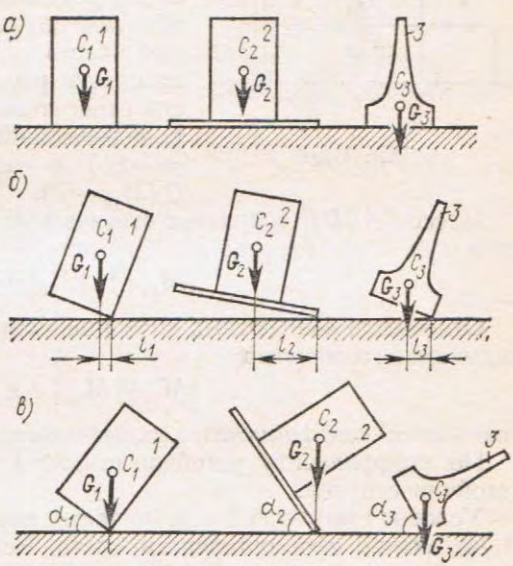


Рис. 1.100

Момент силы тяжести способен возвращать тело в прежнее положение равновесия до тех пор, пока вертикаль, проведенная из центра тяжести тела, проходит внутри площади опоры.

Для того чтобы опрокинуть, необходимо: тело *1* повернуть на угол не менее чем α_1, тело *2* — на угол не менее чем α_2, тело *3* — на угол не менее чем α_3 (рис. 1.100, *в*), называемые *углами устойчивости этих тел.*

Способность тел возвращаться в исходное положение равновесия после прекращения действия сил, нарушающих это равновесие, называется *динамической устойчивостью.*

Из примера на рис. 1.100 видно, что динамическая устойчивость тела увеличивается по мере увеличения размеров его опорной плоскости и понижения центра тяжести. Проблема сохранения динамической устойчивости обычно возникает при проектировании, постройке и эксплуатации морских и речных судов, перевозке грузов по железной дороге или на автомашинах. Эта же проблема стоит и перед проектировщиками самолетов, причем им приходится преодолевать противоречие между динамической устойчивостью и маневренностью. Высокая динамическая устойчивость самолетов достигается путем некоторого снижения их маневренности. То, что

приемлемо для пассажирских или транспортных самолетов, оказывается отрицательным, например, для истребителей.

При постройке зданий, установке и монтаже различного промышленного оборудования возникает проблема сохранения статической устойчивости. *Статической устойчивостью называется способность тела сопротивляться всякому сколь угодно малому нарушению равновесия.*

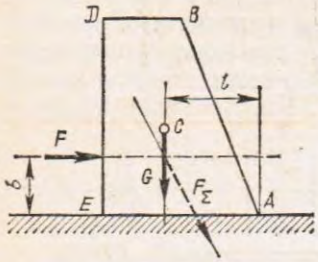


Рис. 1.101

Представим, что на некоторый массив $ABDE$ (рис. 1.101), сила тяжести которого $\boldsymbol{G}$ приложена в точке C, действует сила $\boldsymbol{F}$, стремящаяся опрокинуть массив, т. е. повернуть его около оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. Как видим, на массив относительно точки A действуют опрокидывающий момент силы $\boldsymbol{F}$ ($M_{оп}=-Fb$) и момент устойчивости силы $\boldsymbol{G}$ ($M_{ус}=Gl$).

Массив $ABDE$ сохраняет статическую устойчивость до тех пор, пока

$$|M_{ус}|>|M_{оп}|. \tag{1.74}$$

Отношение абсолютных значений момента устойчивости и опрокидывающего момента

$$|M_{ус}|/|M_{оп}|=k \tag{1.75}$$

называется *коэффициентом устойчивости*.

По коэффициенту устойчивости $k>1$ можно судить о степени устойчивости тел.

Условие статической устойчивости, выражающееся неравенством (1.74), можно сформулировать иначе. Если $|M_{ус}|>|M_{оп}|$, то алгебраическая сумма этих моментов относительно точки A, равная моменту равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$ (на рис. 1.101 показана штриховым вектором), имеет тот же знак, что и у момента устойчивости. Следовательно, неравенство (1.74) выполняется до тех пор, пока линия действия равнодействующей активных сил, приложенных к телу, проходит внутри его опорной плоскости.

Пример 1.18. Железнодорожный кран опирается на рельсы, расстояние между которыми $AB=1{,}5$ м (рис. 1.102). Сила тяжести тележки крана $G_т=30$ кН, центр тяжести тележки находится в точке C, лежащей на линии KL пересечения плоскости симметрии тележки с плоскостью рисунка. Сила тяжести лебедки крана $G_л=10$ кН приложена в точке D. Сила тяжести противовеса $G_п=20$ кН приложена в точке E. Сила тяжести стрелы $G_с=5$ кН приложена в точке H. Вылет крана относительно линии KL равен 2 м. Определить коэффициент устойчивости крана в ненагруженном состоянии и какой груз F можно поднять этим краном при условии, что коэффициент устойчивости должен быть не менее двух.

Решение. 1. В ненагруженном состоянии у крана возникает опасность опрокидывания при повороте вокруг рельса A. Следовательно, относительно точки A момент устойчивости

$$|M_{ус\,A}|=|M_A(\boldsymbol{G}_л)|+|M_A(\boldsymbol{G}_т)|+|M_A(\boldsymbol{G}_с)|=$$
$$=10\cdot0{,}65+30\cdot0{,}75+5\cdot1{,}75\ \text{кН}\cdot\text{м}=37{,}75\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

2. Опрокидывающий момент относительно точки A создается силой тяжести противовеса, т. е.

$$|M_{\text{оп }A}| = |M_A(G_{\text{п}})| = 20 \cdot 0{,}25 = 5 \text{ кН·м}.$$

3. Отсюда коэффициент устойчивости крана в ненагруженном состоянии

$$k_A = |M_{\text{ус }A}| / |M_{\text{оп }A}| = 37{,}75/5 = 7{,}54.$$

4. При нагрузке стрелы крана грузом F возникает опасность опрокидывания крана с поворотом около рельса B. Следовательно, относительно точки B момент устойчивости

$$|M_{\text{ус }B}| = |M_B(G_{\text{п}})| + |M_B(G_{\text{л}})| + |M_B(G_{\text{т}})| = 20 \cdot 1{,}75 + 10 \cdot 0{,}85 + 30 \cdot 0{,}75 \text{ кН·м} = 66{,}0 \text{ кН·м}.$$

5. Опрокидывающий момент относительно рельса B

$$|M_{\text{оп }B}| = |M_B(G_{\text{с}})| + |M_B(F)| = 5 \cdot 0{,}25 + F \cdot 1{,}25 = 1{,}25 + 1{,}25F.$$

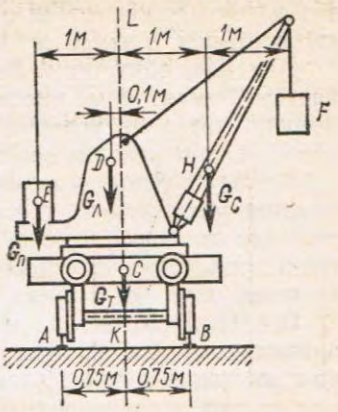


Рис. 1.102

6. По условию задачи эксплуатация крана разрешается при коэффициенте устойчивости $k_B \geqslant 2$, т. е.

$$|M_{\text{ус }B}| / |M_{\text{оп }B}| = 66/(1{,}25 + 1{,}25F) \geqslant 2.$$

Отсюда

$$F \leqslant (33 - 1{,}25)/1{,}25 = 25{,}4 \text{ кН}.$$

КИНЕМАТИКА

Глава 7
КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 1.25. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

Раздел механики, занимающийся изучением движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил, называется кинематикой. Изучая и классифицируя движение тел, кинематика может ответить на вопросы — как и куда движется тело и где оно может оказаться в определенный момент времени. Как известно, в природе нет абсолютного покоя: *движение — основная форма существования всего материального мира, покой и равновесие — частные случаи движения.* Вокруг себя мы постоянно наблюдаем движущиеся тела: мимо нас проходят люди, проезжают автомобили, над нами пролетают самолеты, птицы... Сами мы живем на Земле, которая, вращаясь около собственной оси, движется вокруг Солнца и т. д. Но движение одного и того же тела различными людьми часто воспринимается не одинаково, а в зависимости от места наблюдения. Если, например, один из них наблюдает за движением автомобиля стоя у дороги, а второй видит его из окна движущего автобуса, то их выводы о движении автомобиля могут не совпадать. Чтобы результаты наблюдений за движением тел были сравнимыми,

необходимо договориться о месте, откуда ведется наблюдение, т. е. договориться о *системе отсчета*.

Для нас, обитателей Земли, естественной системой отсчета является Земля. Мы рассматриваем движение тел относительно Земли, считая ее условно неподвижной, или, что одно и то же, относительно тел (предметов), неподвижно связанных с Землей.

Всякое движение, и механическое в том числе, происходит в пространстве и во времени, т. е. сколь угодно незначительное перемещение тела связано с изменением его положения относительно других тел и происходит не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени, хотя бы и очень малого.

Все тела состоят из материальных точек, и, чтобы получить правильное представление о движении тел, начинать изучение нужно с движения точки. Перемещение точки в пространстве выражается в метрах, а также дольных (см, мм) или в кратных (км) единицах длины, время — в секундах. В практике или жизненных ситуациях время часто выражают в минутах или часах. Отсчет времени при рассмотрении того или иного движения точки ведут от определенного, заранее обусловленного, начального момента ($t_0=0$).

Геометрическое место положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета называется **траекторией**. По виду траектории движение точки делится на *прямолинейное* и *криволинейное*. Траектория точки может быть определена и задана заранее. Так, например, траектории искусственных спутников Земли и межпланетных станций вычисляют заранее, или, если принять движущиеся по городу автобусы за материальные точки, то их траектории (маршруты) также известны. В подобных случаях положение точки в каждый данный момент времени t определяется расстоянием (дуговой координатой) s, т. е. *длиной участка траектории, отсчитанной от некоторой ее неподвижной точки, принятой за начало отсчета*. Отсчет расстояний от начала траектории можно вести в обе стороны, поэтому отсчет в одну какую-либо сторону условно принимают за положительный, а в противоположную — за отрицательный, т. е. расстояние s — величина алгебраическая, она может быть положительной ($s>0$) или отрицательной ($s<0$).

При движении точка за определенный промежуток времени проходит некоторый **путь** L, который измеряется вдоль траектории в направлении движения. При движении точки из любого начального положения путь может только возрастать; следовательно, путь — величина существенно положительная.

В частном случае, если точка (рис. 1.103, *а*), двигаясь из начала отсчета O в одном направлении, через некоторое время оказалась в положении A, то расстояние s_1 и пройденный точкой путь $L=\overset{\frown}{OA}$ численно совпадают: $s_1=L$. Если точка стала двигаться не из начала отсчета O, а из положения, находящегося на начальном расстоянии s_0 (рис. 1.103, *б*), и через некоторое время оказалась в положении A на расстоянии s_1 от начала отсчета, то пройденный точкой путь $L=\overset{\frown}{A_0A}=s_1-s_0$, т. е. разности между конечным и начальным

расстояниями. Но это утверждение справедливо лишь в том случае, когда точка движется по траектории в одну сторону. Если же точка, начав движение из положения A_0 на расстоянии s_0 от точки O, за некоторое время прошла до положения A' расстояние s_2, а затем вернулась в положение A (рис. 1.103, *в*) и оказалась в конечном счете на расстоянии s_1 от начала O, то пройденный путь $L=A_0A'+$

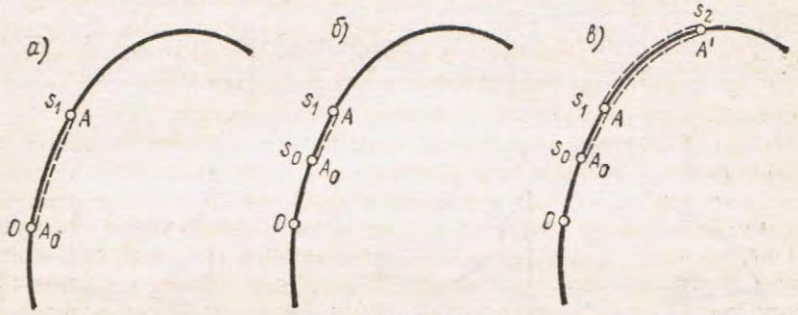


Рис. 1.103

$+A'A=(s_2-s_0)+(s_2-s_1)=2s_2-s_1-s_0$. На рис. 1.103 пройденные точкой пути отмечены штриховыми линиями рядом с траекторией.

Векторная величина, характеризующая в каждый данный момент времени направление и быстроту движения точки, называется скоростью. В обыденной жизни понятие «скорость» воспринимается как скалярная величина, и поэтому термины «скорость» и «быстрота» считаются синонимами. Как кинематическое понятие скорость — вектор, т.е. и быстрота, и направление. Быстроту движения точки выражает числовое значение (модуль) вектора. За единицу скорости обычно принимается 1 м/с, но часто скорость выражают в км/ч (1 км/ч$=10^3$ м/3600 с$\approx$0,278 м/с) или в м/мин (1 м/мин$=$1 м/60 с$\approx$0,0167 м/с).

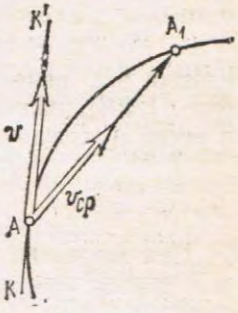


Рис. 1.104

Скорость точки в любой момент ее движения направлена по касательной к траектории. Это известное из физики утверждение вытекает из следующих рассуждений. Допустим, что точка, двигаясь по криволинейной траектории, в заданный момент времени занимает положение A, а через некоторый промежуток времени Δt оказалась в положении A_1 (рис. 1.104). Тогда вектор $\overrightarrow{AA_1}$ изображает перемещение точки из положения A в A_1. Разделив вектор перемещения точки на Δt, получим вектор средней скорости

$$\boldsymbol{\upsilon}_{cp}=\overrightarrow{AA_1}/\Delta t, \qquad (1.76)$$

направленный вдоль вектора перемещения в ту же сторону. Отметим, что векторное равенство (1.76) характеризует лишь положение

$\boldsymbol{v}_{ср}$, а модуль средней скорости за время Δt

$$v_{ср} = \overset{\frown}{AA_1}/\Delta t, \tag{1.77}$$

где $\overset{\frown}{AA_1} = L$ — путь, пройденный точкой за время Δt.

Таким образом, *числовое значение (модуль) средней скорости равно частному от деления пройденного пути на время, в течение которого этот путь пройден.*

При постепенном уменьшении промежутка времени Δt второе положение точки A_1 приближается к A и по мере сближения A_1 с A

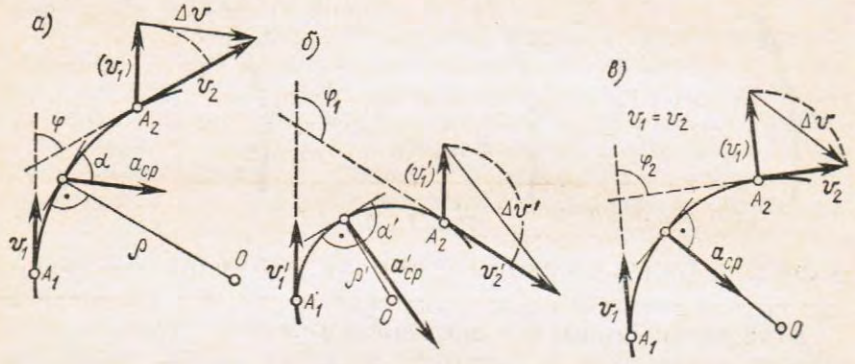


Рис. 1.105

вектор $\boldsymbol{v}_{ср}$, изменяясь, приближается как к пределу к вектору $\boldsymbol{v}$ (рис. 1.104), направленному вдоль касательной KK' к траектории в точке A. Следовательно, скорость точки в данный момент

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{v}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{AA_1}/\Delta t. \tag{1.78}$$

При движении точки по криволинейной траектории непрерывно изменяется как направление, так и числовое значение (модуль) скорости.

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения направления и числового значения скорости, называется у с к о р е н и е м. Обратим внимание на некоторые особенности изменения вектора ускорения. Допустим, что точка A движется по криволинейной траектории, и для простоты представим, что на некотором участке радиус ρ кривизны траектории остается неизменным (точка движения по дуге окружности). Пусть в момент времени t_1 точка занимает положение A_1 и ее скорость $\boldsymbol{v}_1$ (рис. 1.105, *а*), а через $\Delta t = t_2 - t_1$ в положении A_2 скорость точки $\boldsymbol{v}_2$. За это время направление скорости изменилось на угол φ (угол смежности), а модуль скорости изменился на $v_2 - v_1$. Вычитанием вектора $\boldsymbol{v}_2$ из $\boldsymbol{v}_1$ определим геометрическое (векторное) изменение скорости $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ за время Δt. Разделив вектор изменения скорости $\Delta\boldsymbol{v}$ на Δt, получим век-

тор среднего ускорения

$$\boldsymbol{a}_{ср} = \Delta \boldsymbol{v}/\Delta t, \qquad (1.79)$$

который характеризует за время Δt как среднюю быстроту изменения направления скорости, так и среднюю быстроту изменения скорости по модулю.

Вектор среднего ускорения направлен параллельно вектору изменения скорости и образует с касательной к траектории некоторый угол α. Легко заметить, что вектор среднего ускорения при прочих равных условиях зависит от кривизны траектории. Увеличив кривизну участка A_1A_2 траектории (рис. 1.105, *б*), оставив неизменными время Δt передвижения точки из A_1 в A_2 и модули скорости в этих положениях ($v_1'=v_1$ и $v_2'=v_2$), увидим, что направление скорости за тот же промежуток времени Δt изменилось на больший угол φ_1, чем прежде ($\varphi_1>\varphi$); изменился и вектор $\Delta \boldsymbol{v}'$, а следовательно, изменился и вектор среднего ускорения $\boldsymbol{a}_{ср}'=\Delta \boldsymbol{v}'/\Delta t$.

При *равномерном* движении по криволинейной траектории точка тоже *имеет ускорение* (рис. 1.105, *в*), так как и в этом случае изменяется направление скорости.

За единицу ускорения применяют обычно 1 м/с².

§ 1.26. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Прежде чем начать изучение и классификацию движения точки, необходимо ознакомиться со способами задания ее положения по отношению к выбранной системе отсчета в любой момент времени, т. е. *со способами задания ее движения*. Из применяемых в механике способов задания точки рассмотрим два: *естественный и координатный* *.

Естественный способ задания движения точки. В предыдущем параграфе мы установили, что положение точки на заданной траектории в любой момент времени однозначно определяется расстоянием (дуговой координатой) s. Значит, если кроме траектории, на которой отмечено начало отсчета O, задана зависимость

$$s = f(t) \qquad (1.80)$$

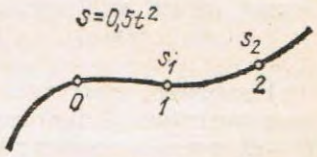


Рис. 1.106

между расстоянием s и временем t, то в любой момент времени можно точно определить положение точки на траектории. Уравнение (1.80) называется *законом движения точки по заданной траектории*.

Пусть, например, задана некоторая траектория (рис. 1.106), движение точки по которой определяется уравнением $s=0{,}5t^2$ (s — м, t — с), тогда в момент времени $t_0=0$ $s_0=0$, т. е. точка находится в начале отсчета O; в момент времени $t_1=1$ с точка находится

* С третьим способом задания движения точки — векторным — читатель может познакомиться по любому учебнику по теоретической механике для вузов или в [9].

на расстоянии $s_1=0{,}5\,t_1^2=0{,}5\cdot 1^2=0{,}5$ м; в момент времени $t_2=2$ с точка находится на расстоянии $s_2=0{,}5\,t_2^2=0{,}5\cdot 2^2=2$ м от начала отсчета O.

Координатный способ задания движения точки. Когда траектория точки заранее не известна, положение точки в пространстве определяется тремя координатами: абсциссой x, ординатой y и аппликатой z по отношению к прямоугольной (декартовой) системе координат $Oxyz$ (рис. 1.107). Если при этом известна или задана сис-

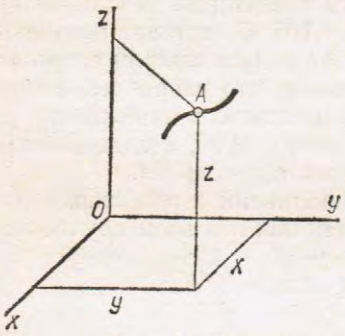


Рис. 1.107

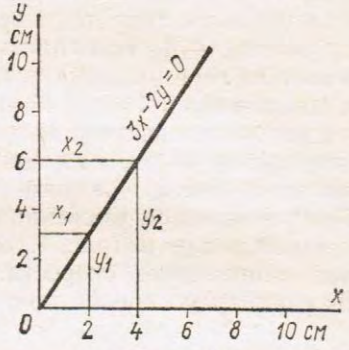


Рис. 1.108

тема уравнений, выражающих зависимость изменения координат с течением времени t,

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ z=f_3(t), \tag{1.81}$$

то, подставляя в эти уравнения значения t, можно определять положение точки в пространстве. Уравнения (1.81) выражают *закон движения точки в прямоугольной системе координат.*

В частном случае, если точка движется в плоскости, *закон движения точки выражается двумя уравнениями*:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t). \tag{1.82}$$

Например, известно, что движение точки в плоской системе координат (рис. 1.108) задано уравнениями $x=2t$ и $y=3t$ (x и y — м, t — с), тогда в момент времени $t_0=0$ $x_0=0$ и $y_0=0$, т. е. точка находится в начале координат; в момент времени $t_1=1$ с координаты точки $x_1=2t_1=2\cdot 1=2$ см, $y_1=3t_1=3\cdot 1=3$ см; в момент времени $t_2=2$ с координаты точки $x_2=2t_2=2\cdot 2=4$ см, $y_2=3t_2=3\cdot 2=6$ см и т. д.

Зная закон движения точки в прямоугольной системе координат, можно определить *уравнение траектории* точки. Для этого нужно из уравнений движения исключить время t. Так, исключив время t из уравнений (1.81), получим уравнение траектории

$$\Phi(x,\ y,\ z)=0, \tag{1.83}$$

а после исключения времени t из уравнений (1.82) уравнение траектории примет вид

$$\Phi(x,\ y)=0. \tag{1.84}$$

Например, исключив время t из заданных выше уравнений $x=2t$ и $y=3t$, получим уравнение траектории $3x-2y=0$. Как видим (рис. 1.108), в этом случае точка движется по прямой, проходящей через начало координат.

§ 1.27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

Из § 1.25 известно, что при движении точки по криволинейной траектории ее скорость в каждый данный момент времени направлена по касательной к траектории. Там же установлено, что числовое значение средней скорости за любой промежуток времени Δt равно частному от деления пройденного пути на время Δt [см. равенство (1.77)]. Рассмотрим теперь, как определяется значение скорости в любой момент времени.

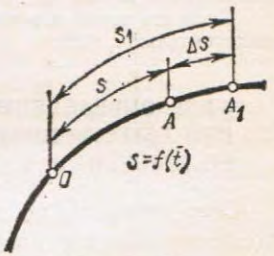


Рис. 1.109

Пусть движение точки A по заданной траектории (рис. 1.109) происходит согласно уравнению $s=f(t)$ и требуется определить скорость точки в момент времени t. Подставив значение времени t в уравнение движения, определим в этот момент расстояние s точки A от начала отсчета. Продолжая движение, точка в момент времени $t+\Delta t$ займет положение A_1 на расстоянии s_1 от начала отсчета O. Таким образом, за промежуток времени Δt точка прошла путь $L=\Delta s=s_1-s$. Значение средней скорости на этом пути

$$v_{ср}=\Delta s/\Delta t,$$

но оно отличается от значения скорости в момент времени t.

Если постепенно уменьшать промежуток времени Δt, то уменьшается и пройденный путь Δs, т. е. в пределе при $\Delta t \to 0$ значение средней скорости приближается к значению скорости в заданный момент t. Значит,

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=f'(t), \qquad (1.85)$$

т. е. *значение скорости точки, движение которой задано естественным способом, в любой момент времени равно первой производной от расстояния (дуговой координаты) по времени.*

Направление скорости, как отмечалось выше, известно заранее.

Пример 1.19. По дуге, равной $^1/_4$ длины окружности радиуса $r=16$ м (рис. 1.110), из положения A_0 в положение A_1 движется точка согласно уравнению $s=\pi t^2$. Определить скорость точки в момент, когда она проходит середину длины дуги A_0A_1, и в момент достижения положения A_1.

Решение. 1. Если длина дуги A_0A_1 равна $^1/_4$ длины окружности, то середина дуги A находится от начала отсчета A_0 на расстоянии $^1/_8$ окружности, т. е.

$$s=\overset{\frown}{A_0A_1}=2\pi r/8=2\pi 16/8=4\pi \text{ м}.$$

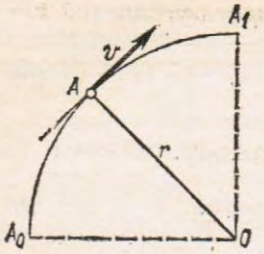


Рис. 1.110

2. Из заданного уравнения движения $s=\pi t^2$ находим, что точка после начала движения достигает середины дуги через промежуток времени

$$t=\sqrt{s/\pi}=\sqrt{4\pi/\pi}=2\text{ с}.$$

3. Продифференцировав уравнение движения, найдем уравнение скорости:

$$v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t=(\pi t^2)'=2\pi t.$$

4. Подставив значение $t=2$ с в уравнение скорости, найдем

$$v=2\pi t=2\pi 2=4\pi\approx 12{,}6\text{ м/с}.$$

5. Проводим в точке A (середину дуги A_0A_1) касательную к траектории и изобразим вектор скорости $\boldsymbol{v}$ (рис. 1.110).

Скорость точки в конце траектории (в положении A_1) рекомендуется найти самостоятельно. (Ответ: 17,8 м/с.)

§ 1.28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ ЕСТЕСТВЕННОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

При движении точки по криволинейной траектории, как известно, изменяются и направление, и числовое значение (модуль) скорости. Зная закон движения точки по траектории, находим скорость точки A в момент времени t. Изобразим в этот момент скорость точки вектором $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{v}$ (рис. 1.111). В следующий момент времени $t_1=t+\Delta t$ точка A переместилась в A_1 и ее скорость изобразится вектором $\boldsymbol{v}_1$. Условимся считать, что приращение времени Δt невелико и за этот небольшой промежуток времени точка прошла настолько незначительный путь $\overset{\smile}{AA_1}=\Delta s$, что радиусы кривизны траектории в точках A и A_1 можно считать одинаковыми и равными $\overset{\smile}{OA}=\overset{\smile}{OA_1}=\rho$.

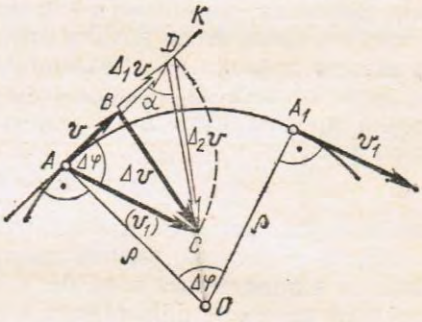


Рис. 1.111

Определим изменение вектора скорости за время Δt. Для этого из точки A построим вектор $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{v}_1$ и найдем $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}$. Тогда вектор среднего ускорения (на рис. 1.111 он не показан)

$$\boldsymbol{a}_{\text{ср}}=\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t.$$

При неограниченном уменьшении промежутка времени Δt вектор $\boldsymbol{a}_{\text{ср}}$ стремится к вектору ускорения $\boldsymbol{a}$ в данный момент как к пределу, т. е.

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{a}_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t. \qquad \text{(а)}$$

Представим вектор $\Delta\boldsymbol{v}$ в виде результирующего вектора геометрической суммы двух векторов $\Delta_1\boldsymbol{v}$ и $\Delta_2\boldsymbol{v}$:

$$\Delta\boldsymbol{v}=\Delta_1\boldsymbol{v}+\Delta_2\boldsymbol{v}, \qquad (б)$$

где модуль вектора $\Delta_1\boldsymbol{v}$ равен $\Delta_1 v=v_1-v$.

На основании уравнения (б) выражение (а) принимает вид

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_1\boldsymbol{v}+\Delta_2\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_1\boldsymbol{v}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_2 v}{\Delta t}. \qquad (в)$$

Следовательно, ускорение точки в любой момент t равно сумме двух векторов. Для слагаемых векторов введем обозначения

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_1\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\boldsymbol{a}_t \text{ и } \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_2\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\boldsymbol{a}_n$$

и определим их направления, а также числовые значения (модули).

По мере приближения Δt к нулю вектор $\Delta_1\boldsymbol{v}$, направленный по касательной AK к траектории, сохраняет это направление. Значит, и вектор $\boldsymbol{a}_t$ в любой момент времени направлен по касательной. Поэтому вектор $\boldsymbol{a}_t$ называется касательным или тангенциальным ускорением.

Так как модуль вектора $\Delta_1\boldsymbol{v}$ равен $\Delta_1 v=v_1-v$ — изменению модулей скорости за время Δt, то *модуль касательного ускорения*

$$a_t=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta_1 v/\Delta t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=f''(t), \qquad (1.86)$$

равный производной от скорости в данный момент по времени или, иначе, второй производной от расстояния по времени, характеризует быстроту изменения значения скорости.

При $\Delta t\to 0$ направление вектора $\Delta_2\boldsymbol{v}$ меняется и в пределе вектор $\Delta_2\boldsymbol{v}$ стремится занять перпендикулярное касательной направление. Докажем это.

Из построения на рис. 1.111 следует, что $\triangle CAD$ равнобедренный ($AC=AD$); значит, $\widehat{ACD}=\widehat{ADC}=\alpha$, а $\widehat{CAD}=\widehat{AOA_1}=\Delta\varphi$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Из равенства $2\alpha+\Delta\varphi=180^\circ$ следует

$$\alpha=(180^\circ-\Delta\varphi)/2=90^\circ-\Delta\varphi/2.$$

Так как при $\Delta t\to 0$ имеем $\Delta\varphi\to 0$, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}(90^\circ-\Delta\varphi/2)=90^\circ.$$

Доказано, что вектор $\boldsymbol{a}_n$ в любой момент времени *перпендикулярен* касательной. Поэтому он называется *нормальным ускорением*.

Определим теперь модуль a_n нормального ускорения. Учитывая, что при малом значении Δt угол $\Delta\varphi$ и $\overset{\smile}{AA_1}$ невелики, можно принять $\triangle ADC\sim\triangle OAA_1$. Из подобия треугольников

$$DC/\overset{\smile}{AA_1}=AC/OA_1 \text{ или } \Delta_2 v/\Delta s=v_1/\rho.$$

Оба отношения пропорции умножим на Δs и разделим на Δt:

$$\Delta_2 v/(\Delta t) = \Delta s v_1/(\Delta t \rho)$$

и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_2 v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s\, v_1}{\Delta t\, \rho} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} v_1\right].$$

Так как

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_2 v}{\Delta t} = a_n, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta t \to 0} v_1 = v,$$

окончательно получаем $a_n = (1/\rho) v v$ или

$$a_n = v^2/\rho. \tag{1.87}$$

Значит, *модуль нормального ускорения пропорционален второй степени модуля скорости в данный момент, обратно пропорционален радиусу кривизны траектории в данной точке и характеризует быстроту изменения направления скорости.*

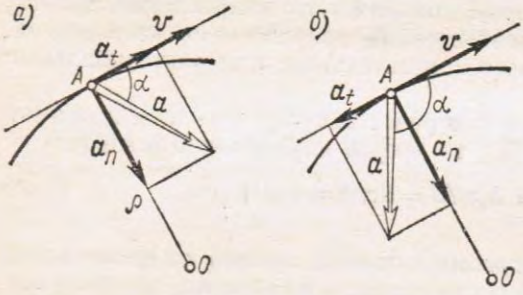


Рис. 1.112

Таким образом, установлено, что вектор $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки в данный момент — есть геометрическая сумма касательного $\boldsymbol{a}_t$ и нормального $\boldsymbol{a}_n$ ускорений (рис. 1.112):

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n. \tag{1.88}$$

Направление обоих составляющих векторов известно заранее и поэтому, определив модули a_t и a_n по формулам (1.87) и (1.88), легко найти ускорение $\boldsymbol{a}$: модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \tag{1.89}$$

а направление $\boldsymbol{a}$ [угол $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}})$] находим с помощью тригонометрических функций по одной из следующих формул

$$\sin\alpha = a_n/a, \quad \cos\alpha = a_t/a, \quad \operatorname{tg}\alpha = a_n/a_t. \tag{1.90}$$

Можно, конечно, сначала найти направление вектора по третьей из формул (1.90), а затем по любой из двух первых определить a.

Из выражения (1.87) видно, что a_n всегда положительно, так как при любом значении v (положительном или отрицательном) $v^2 > 0$, а радиус ρ не может быть меньше нуля.

В формуле (1.86) производная от скорости по времени — величина алгебраическая и, следовательно, касательное ускорение может быть как положительным, так и отрицательным.

Если векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}_t$ направлены в одну и ту же сторону (рис. 1.112, *а*), то движение точки называется *ускоренным*. При этом значения v и a_t имеют одинаковые знаки ($v>0$, $a_t>0$ или $v<0$, $a_t<0$). Если же векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{a}_t$ направлены в противоположные стороны (рис. 1.112, *б*), то движение точки называется *замедленным*. В этом случае знаки v и a_t разные ($v>0$, $a_t<0$ или $v<0$, $a_t>0$).

Пример 1.20. Для точки, движение которой рассматривалось в примере 1.19, определить ускорения $\boldsymbol{a}$ и a_1 соответственно для положений точки в A и A_1.

Решение. 1. Точка движется согласно уравнению $s=\pi t^2$; следовательно, $v=2\pi t$ и из формулы (1.86)

$$a_t=dv/dt=(2\pi t)'=2\pi=6{,}28\ \text{м/с}^2=\text{const};$$

модуль касательного ускорения от времени не зависит, значит при любом положении точки на траектории ее касательное ускорение $a_t=6{,}28$ м/с^2.

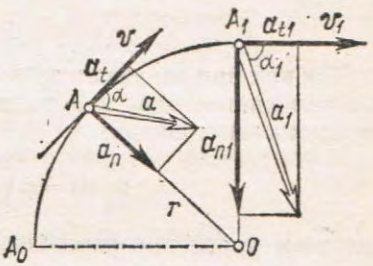


Рис. 1.113

2. Как известно из примера 1.19, в момент, когда точка занимает на траектории положение A, ее скорость $v=4\pi\approx12{,}6$ м/с. Следовательно, в этот момент согласно формуле (1.87) значение нормального ускорения

$$a_n=v^2/\rho=(4\pi)^2/16=\pi^2=9{,}86\ \text{м/с}^2.$$

3. Находим направление ускорения $\boldsymbol{a}$ точки в момент, когда она проходит положение A, используя третью из формул (1.90) (рис. 1.113):

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a_n}{a_t}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2}=1{,}57;\quad \alpha=\widehat{(a,\ v)}=\operatorname{arctg}1{,}57=56°36'.$$

4. Находим модуль ускорения точки, используя первую из формул (1.90):

$$a=a_n/\sin\alpha=9{,}86/\sin 56°\,36'\approx 11{,}7\ \text{м/с}^2.$$

Рекомендуется самостоятельно проверить полученный результат по формуле (1.89), а затем найти модуль и направление ускорения точки в положении A_1. (Ответ: $a_1=20{,}8$ м/с^2; $\alpha_1\approx72°30'$.)

§ 1.29. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ГРАФИКИ

Итак, в общем случае ускорение точки раскладывается на два слагаемых: касательное ускорение $\boldsymbol{a}_t$ характеризует быстроту изменения модуля скорости, нормальное ускорение $\boldsymbol{a}_n$ характеризует быстроту изменения направления скорости. Иначе говоря, касательное ускорение служит характеристикой *неравномерности* движения по любой траектории, а нормальное ускорение — характеристикой *криволинейности* движения и при $\boldsymbol{a}_t\neq0$ и $\boldsymbol{a}_n\neq0$ точка движется неравномерно по криволинейной траектории.

Рассмотрим частные случаи движения точки, когда одно или оба слагаемых $\boldsymbol{a}$ равны нулю либо сохраняют отличное от нуля постоянное значение.

Прямолинейное движение. Если $a_n=0$, то движение точки называется *прямолинейным*, так как при $a_n=v^2/\rho=0$ направление ско-

рости остается неизменным, а это возможно лишь при движении точки по прямолинейной траектории (равенство $v^2/\rho=0$ возможно лишь при $\rho=\infty$).

Равномерное движение. Если $a_t=0$, то движение точки называется *равномерным*, так как при этом числовое значение (модуль) скорости остается постоянным. Значит, при $a_t=0$ $v=\text{const}$ и выражение (1.85) принимает вид

$$ds/dt=v=\text{const}.$$

Отсюда

$$ds=v\,dt.$$

Так как при движении точки в течение времени от 0 до t расстояние изменяется от s_0 до s, то, интегрируя это уравнение в соответствующих интервалах:

$$\int_{s_0}^{s} ds=v\int_0^t dt;\ s-s_0=vt,$$

получаем уравнение равномерного движения

$$s=s_0+vt. \qquad (1.91)$$

При начальном расстоянии $s_0=0$, т. е. точка в момент начала движения находится в начале отсчета расстояний, уравнение равномерного движения упрощается:

$$s=vt. \qquad (1.92)$$

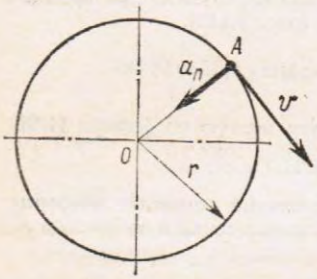


Рис. 1.114

Если $a_t=0$ и $a_n=0$, то движение точки называется *равномерным прямолинейным*. Если $a_t=0$ и $a_n\neq0$, то точка движется *равномерно* по *криволинейной* траектории.

Известный интерес представляет равномерное движение точки по окружности (рис. 1.114). При таком движении $a_t=0$ и $a_n=v^2/\rho=\text{const}$, так как при равномерном движении $v=\text{const}$, а при движении по окружности $\rho=r=\text{const}$.

Из формулы (1.91) скорость равномерного движения по окружности

$$v=(s-s_0)/t.$$

Если принять $t=T$ — периоду, т. е. времени одного обхода точкой окружности, то $s-s_0=2\pi r$ и

$$v=2\pi r/T \text{ или } v=\pi d/T, \qquad (1.93)$$

где $d=2r$ — диаметр окружности.

Равнопеременное движение. Если $a_t=dv/dt=\text{const}$, то движение точки называется равнопеременным. Отсюда после разделения переменных

$$dv=a_t\,dt.$$

Проинтегрировав левую часть уравнения в интервале от v_0 до v, а правую соответственно в интервале от 0 до t:

$$\int_{v_0}^{v} dv = a_t \int_0^t dt;\ v - v_0 = a_t t,$$

получим формулу (уравнение) скорости равнопеременного движения точки в любой момент времени

$$v = v_0 + a_t t. \qquad (1.94)$$

Здесь, как известно, $v = ds/dt$. Разделив в этом выражении переменные, получим $ds = v dt$, или, имея в виду уравнение (1.92),

$$ds = v_0\, dt + a_t t\, dt.$$

Полагая, что при изменении времени от 0 до t расстояние изменяется соответственно от s_0 до s, проинтегрируем уравнение в этих интервалах:

$$\int_{s_0}^{s} ds = v_0 \int_0^t dt + a_t \int_0^t t\, dt;\ s - s_0 = v_0 t + a_t (t^2/2),$$

получим уравнение равнопеременного движения точки

$$s = s_0 + v_0 t + a_t t^2/2. \qquad (1.95)$$

В случае, когда равнопеременное движение точки происходит по прямой линии,

$$a_n = 0 \text{ и } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_t^2} = a_t.$$

Поэтому при равнопеременном прямолинейном движении в уравнениях (1.94) и (1.95) вместо касательного ускорения a_t стоит ускорение a.

В уравнения (1.94) и (1.95) входят шесть различных величин: три постоянные для данного движения — s_0, v_0, a_t и три переменные — s, v, t. Таким образом, для решения задач на равнопеременное движение точки в условии должны быть заданы четыре величины из шести.

Для упрощения решения некоторых задач из уравнений (1.94) и (1.95) можно получить две вспомогательные формулы. Выразив t из уравнения (1.94), т. е. $t = (v - v_0)/a_t$, и подставив это значение в уравнение (1.95):

$$s = s_0 + \frac{v_0 (v - v_0)}{a_t} + \frac{a_t}{2} \left(\frac{v - v_0}{a_t} \right)^2,$$

после раскрытия скобок и сложения двух последних слагаемых в правой части получим первую вспомогательную формулу

$$s = s_0 + (v^2 - v_0^2)/(2a_t). \qquad (1.96)$$

Выразим a_t из уравнения (1.94), т. е. $a_t = (v - v_0)/t$, и подставим в уравнение (1.95):

$$s = s_0 + v_0 t + [(v - v_0)/t]\, t^2/2,$$

после упрощений получим вторую вспомогательную формулу

$$s = s_0 + (v_0 + v)\, t/2, \qquad (1.97)$$

где $(v_0+v)/2=v_{ср}$ — средняя скорость точки при ее равнопеременном движении.

Если равноускоренное движение точки начинается из начала отсчета траектории ($s_0=0$) и без начальной скорости ($v_0=0$), то формулы (1.94), (1.95), (1.96) и (1.97) приобретают более простой вид:

$$v = a_t t;\ s = a_t t^2/2;\ s = v^2/(2a_t);\ s = vt/2. \qquad (1.98)$$

Примерами такого движения могут служить движение автомобиля при трогании с места или движение самолета на взлетной полосе, а также известное из физики свободное падение тел. При свободном падении $a_t=a=g=9{,}81$ м/с^2. В этом случае, если в формулах (1.98) заменить s высотой падения H, то они примут вид

$$v = gt;\ H = gt^2/2;\ H = v^2/(2g);\ H = vt/2. \qquad (1.99)$$

Предпоследняя из этих формул, представленная в виде $v=\sqrt{2gH}$, называется формулой Галилея.

Кинематические графики. Описанные выше движения точки как при решении задач, так и просто ради большей наглядности целесообразно изображать в виде графиков расстояний (перемещений), скоростей и касательных ускорений, построенных в осях (s, t), (v, t) и (a_t, t) с соблюдением соответствующих масштабов.

С точки зрения математики геометрическим образом уравнения равномерного движения $s=s_0+vt$ является прямая линия с начальной ординатой s_0 и наклоненная к оси времени под углом $\alpha=\operatorname{arctg} v$ (рис. 1.115, *а*). Чем с большей скоростью движется точка, тем круче расположен график расстояний относительно оси времени. График скорости обычно располагается под графиком расстояний, причем масштаб по оси времени на обоих графиках берется одинаковым. В данном случае (при равномерном движении) $v=\text{const}$, поэтому график скорости изображается прямой, параллельной оси времени (рис. 1.115, *б*), т. е. значение скорости в любой момент времени t одно и то же.

График расстояний не следует отождествлять с траекторией движения точки: при равномерном движении точки график расстояний всегда прямая линия, тогда как точка может двигаться по какой угодно криволинейной траектории.

Из графиков на рис. 1.115 видно, что в моменты времени t_1 и t_2 скорость точки одна и та же, расстояние от s_1 до s_2 изменилось по линейному закону, а пройденный путь возрос от $L_1=s_1-s_0$ до $L_2=s_2-s_0$ пропорционально увеличению времени от t_1 до t_2. Если движение точки происходит согласно уравнению $s=vt$, то график расстояний изображается прямой, проходящей через начало координат.

Геометрический образ уравнения равнопеременного движения $s=s_0+v_0t+a_tt^2/2$ есть парабола, изменение скорости точки $v=$

$=v_0+a_t t$ изобразится знакомой уже прямой с начальной ординатой v_0, а постоянное касательное ускорение изобразится прямой, параллельной оси времени. На рис. 1.116, *а*, *б*, *в* изображены графики равнопеременного движения при $s_0=0$ и $v_0=0$.

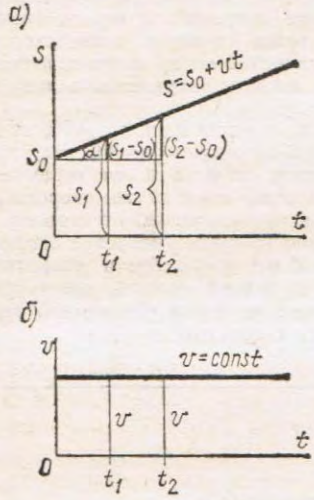


Рис. 1.115

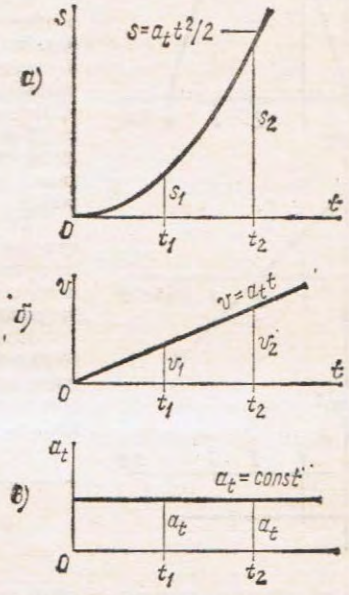


Рис. 1.116

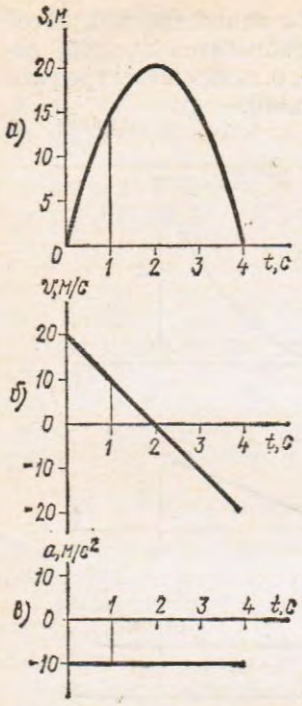
Пример 1.21. Точка движется прямолинейно согласно уравнению $s=20t-5t^2$ (s — м, t — с). Построить графики расстояний, скорости и ускорения для первых 4 с движения. Определить путь, пройденный точкой за 4 с, и описать движение точки.

Решение. 1. Точка движется прямолинейно по уравнению $s=20t-5t^2$; следовательно, скорость точки $v=ds/dt=20-10t$ и ускорение $a=a_t=dv/dt=-10$ м/с^2. Значит, движение точки равнопеременное ($a=a_t=-10$ м/с^2=const) с начальной скоростью $v_0=20$ м/с.

2. Составим зависимость числовых значений s и v для первых 4 с движения:

t, с	0	1	2	3	4
$s=20t-5t^2$, м	0	15	20	15	0
$v=20-10t$, м/с	20	10	0	−10	−20
$a=-10$ м/с^2	от времени не зависит				

3. По приведенным числовым значениям построим графики расстояний (рис. 1.117, *а*), скорости (рис. 1.117, *б*) и ускорения (рис. 1.117, *в*), выбрав масштабы для изображения по осям ординат расстояний s, скорости v и ускорения a, а также одинаковый для всех графиков масштаб времени по оси абсцисс. Например, если расстояние $s=5$ м изображать на графике длиной отрезка $l_s=10$ мм, то 5 м$=\mu_s \cdot 10$ мм, где коэффициент пропорциональности μ_s и есть масштаб по оси Os : $\mu_s=5/10=0{,}5$ м/мм (0,5 м в 1 мм); если модуль скорости $v=10$ м/с изображать на графике длиной $l_v=10$ мм, то 10 м/с$=\mu_v \cdot 10$ мм и масштаб по оси Ov $\mu_v=1$ м/(с·мм) (1 м/с в 1 мм); если модуль ускорения $a=10$ м/с^2 изображать отрез-



ком $l_a=10$ мм, то, аналогично предыдущему, масштаб по оси Oa $\mu_a=1$ м/(с^2·мм) (1 м/с^2 в 1 мм); и наконец, изображая промежуток времени $\Delta t=1$ с отрезком $l_t=10$ мм, получим на всех графиках масштаб по осям Ot $\mu_t=0{,}1$ с/мм (0,1 с в 1 мм).

4. Из рассмотрения графиков следует, что в течение времени от 0 до 2 с точка движется равнозамедленно (скорость v и ускорение $a=a_t$ в течение этого промежутка времени имеют разные знаки, значит их векторы направлены в противоположные стороны); в период времени от 2 до 4 с точка движется равноускоренно (скорость v и ускорение $a=a_t$ имеют одинаковые знаки, т. е. их векторы направлены в одну сторону).

За 4 с точка прошла путь $s_{0-4}=40$ м. Начав движение со скоростью $v_0=20$ м/с, точка по прямой прошла 20 м, а затем вернулась в исходное положение, имея ту же скорость, но направленную в противоположную сторону.

Если условно принять ускорение свободного падения $g\approx 10$ м/с^2 и пренебречь сопротивлением воздуха, то можно сказать, что графики описывают движение точки, брошенной вертикально вверх со скоростью $v_0=20$ м/с.

Рис. 1.117

§ 1.30. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

Если движение точки задано в координатной форме, то каждое из уравнений (1.81) или (1.82), взятое отдельно, описывает движение не самой точки, а ее проекции вдоль соответствующих осей. Пусть движение точки A в плоской системе координат задано уравнениями $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$. Первое из уравнений определяет закон изменения абсциссы x движущейся точки (рис. 1.118), т. е. описывает движение по оси абсцисс точки A_x — проекции точки A на ось x. Второе уравнение определяет закон изменения ординаты y точки A, т. е. описывает движение по оси ординат ее проекции A_y на эту ось. Допустим, что в данный момент времени t точка A имеет скорость $\boldsymbol{v}$, тогда A_x и A_y — проекции точки на оси x и y — движутся по осям со скоростями $\boldsymbol{v}_x$ и $\boldsymbol{v}_y$, модули

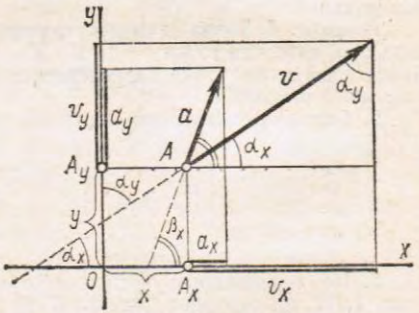


Рис. 1.118

которых равны проекциям скорости $\boldsymbol{v}$ на соответствующие оси (рис. 1.118). Следовательно, дифференцируя каждое из заданных уравнений, найдем модули скоростей $\boldsymbol{v}_x$ и $\boldsymbol{v}_y$ или, иначе говоря, проекции скорости $\boldsymbol{v}$ на оси координат. Итак,

$$v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f'(t) \text{ и } v_y = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = f'(t). \tag{1.100}$$

Если из начала и конца вектора $\boldsymbol{v}$ провести прямые, параллельные осям координат, то получим прямоугольный треугольник с гипотенузой v и катетами v_x и v_y. Отсюда модуль искомой скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{1.101}$$

Направление скорости $\boldsymbol{v}$, т. е. углы $\alpha_x = (\widehat{\boldsymbol{v}, x})$ или $\alpha_y = (\widehat{\boldsymbol{v}, y})$, находим по одной из следующих формул;

$$\cos\alpha_x = v_x/v, \ \cos\alpha_y = v_y/v, \tag{1.102}$$

или

$$\sin\alpha_x = v_y/v, \ \sin\alpha_y = v_x/v, \tag{1.103}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha_x = v_y/v_x, \ \operatorname{tg}\alpha_y = v_x/v_y. \tag{1.104}$$

Аналогично определяется и вектор ускорения $\boldsymbol{a}$. Сначала находим его проекции на оси x и y:

$$a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = f''(t) \text{ и } a_y = \mathrm{d}v_y/\mathrm{d}t = f''(t), \tag{1.105}$$

а затем модуль:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{1.106}$$

и направление, т. е. углы $\beta_x = (\widehat{\boldsymbol{a}, x})$ и $\beta_y = (\boldsymbol{a}, y)$ (угол β_y на рис. 1.118 не обозначен):

$$\cos\beta_x = a_x/a, \ \cos\beta_y = a_y/a. \tag{1.107}$$

От координатного способа задания движения точки нетрудно перейти к естественному способу. Из § 1.26 известно, что, исключив время из уравнений движения $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, получаем уравнение траектории $\Phi(x, y) = 0$. Уравнение движения $s = f(t)$ по этой траектории получаем следующим образом. Так как $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$, то $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$; подставив сюда значение $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, полученное из уравнений движения в осях координат, и проинтегрировав:

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,\mathrm{d}t, \tag{1.108}$$

получим уравнения движения вида $s = f(t)$.

Например, если движение точки задано уравнениями $x = 3t^2$ и $y = 4t^2$, то точка движется по прямолинейной траектории, уравнение которой $4x - 3y = 0$.

Из заданных уравнений движения следует, что проекции скорости на оси координат

$$v_x = 6t \text{ и } v_y = 8t,$$

а модуль скорости в любой момент времени

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{36t^2+64t^2}=10t.$$

Из уравнения (1.108)

$$s=\int_0^t 10t\,dt=10\int_0^t t\,dt=5t^2.$$

Таким образом, точка движется прямолинейно по траектории $4x-3y=0$ согласно уравнению $s=5t^2$.

Глава 8
ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1.31. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Движение твердого тела, при котором любой выбранный в теле отрезок прямой перемещается, оставаясь параллельным своему первоначальному положению, называется поступательным. Из всех разновидностей движений тел поступательное наиболее простое. При поступательном движении все его точки перемещаются одинаково — траектории всех точек тела одинаковы, скорости и

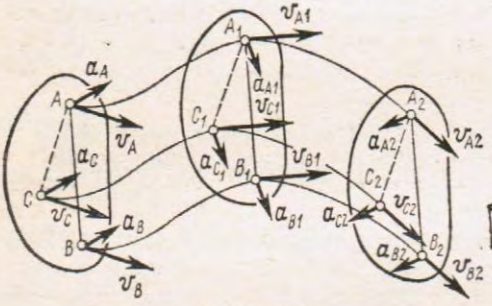


Рис. 1.119

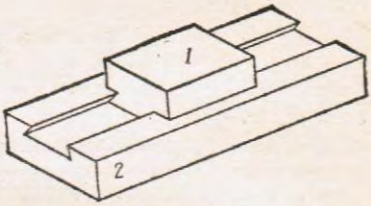


Рис. 1.120

ускорения всех точек тела в каждый данный момент времени равны между собой.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим две точки A и B, соединенные отрезком AB (рис. 1.119). Очевидно, что при перемещении отрезка AB параллельно первоначальному положению ($AB\|A_1B_1\|A_2B_2$) точки A и B движутся по одинаковым траекториям, т. е. если траекторию BB_1B_2 совместить с траекторией AA_1A_2, то они совпадут. Если вместе с точкой A рассмотреть движение точки C, то при движении тела отрезок AC также остается параллельным своему первоначальному положению ($AC\|A_1C_1\|A_2C_2$) и траектория точки C (кривая CC_1C_2) одинакова с траекториями AA_1A_2 и BB_1B_2. Следовательно, скорости точек A, B и C в каждый данный момент времени направлены одинаково — по параллельным касательным к своим траекториям в точках A, B и C, через некоторое

время по параллельным касательным в точках A_1, B_1 и C_1, а затем в точках A_2, B_2 и C_2. Но за любые сколь угодно малые промежутки времени Δt точки A, B и C проходят по своим траекториям равные пути, значит и значения скоростей в любой момент времени равны между собой. Таким образом, в каждый данный момент времени скорости всех точек тела равны между собой, т. е. $v_A = v_B = v_C$, или $v_{A1} = v_{B1} = v_{C1}$, или $v_{A2} = v_{B2} = v_{C2}$. Отсюда следует, что изменение скоростей всех точек как по модулю, так и по направлению происходит одинаково, т. е. в каждый данный момент ускорения точек также равны между собой: $a_A = a_B = a_C$, или $a_{A1} = a_{B1} = a_{C1}$, или $a_{A2} = a_{B2} = a_{C2}$.

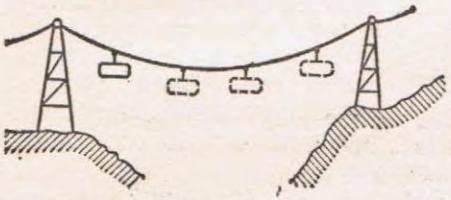


Рис. 1.121



Рис. 1.122

Как видим, поступательное движение твердого тела полностью характеризуется движением любой его точки. Обычно поступательное движение тела задается движением его центра тяжести. Иначе говоря, при поступательном движении тело можно считать материальной точкой.

Примерами поступательного движения тел могут служить какой-либо ползун *1*, движущийся в прямолинейных направляющих *2* (рис. 1.120), или прямолинейно движущийся автомобиль (вернее, не весь автомобиль, а его шасси с кузовом). Иногда криволинейное движение на поворотах дорог автомобилей или поездов условно принимают за поступательное. В подобных случаях говорят, что автомобиль или поезд движется с такой-то скоростью или с таким-то ускорением.

Примерами криволинейного поступательного движения служат движение вагончика (люльки) подвесной канатной дороги (рис. 1.121) или движение спарника, соединяющего два параллельных кривошипа (рис. 1.122). В последнем случае каждая точка спарника движется по окружности.

§ 1.32. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ; УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

Движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются по окружностям с центрами, расположенными на перпендикулярной этим окружностям неподвижной прямой, называется вращательным. Неподвижная прямая, на которой лежат центры круговых траекторий точек тела, называется его *осью вращения*. Для образования оси вращения достаточно закрепить ка-

кие-либо две точки тела. В качестве примеров вращательного движения тел можно привести движение дверей или створок окон при их открывании или закрывании, движение роторов электродвигателей или гидротурбин, движение стрелок часов и т. п. В каждой машине и любом механизме есть вращающиеся детали.

Представим себе тело в виде цилиндра, ось AB которого лежит в подшипниках (рис. 1.123). Все точки твердого тела неизменно связаны между собой, поэтому при вращении тела они движутся не одинаково: точки, лежащие на оси, неподвижны, точки, расположенные ближе к оси, движутся медленней точек, расположенных дальше от оси. Таким образом, движением одной какой-либо точки однозначно определить вращательное движение тела нельзя.

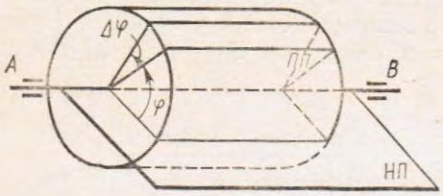


Рис. 1.123

Для установления закона вращательного движения тела, по которому можно определять его положение в данный момент, проведем через ось вращения тела, связанную только с нею неподвижную полуплоскость НП, а внутри тела отметим подвижную полуплоскость, которая вращается около оси вместе с телом. Теперь угол φ, образуемый в каждый данный момент времени полуплоскостями НП и ПП (рис. 1.123), точно определяет положение тела в пространстве. Угол φ называется *углом поворота* и выражается в радианах. Чтобы определять положение тела в пространстве в любой момент времени, необходимо знать зависимость между углом поворота φ и временем t, т. е. знать *закон вращательного движения тела*, заданный уравнением

$$\varphi = f(t). \tag{1.109}$$

Чтобы определить угловую скорость тела, представим, что в некоторый момент времени t положение вращающегося тела определяется углом поворота φ (рис. 1.123), а в момент $t+\Delta t$ — углом поворота $\varphi+\Delta\varphi$. Следовательно, за время Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ и величина

$$\omega_{ср} = \Delta\varphi/\Delta t \tag{1.110}$$

называется *средней угловой скоростью*. При постепенном уменьшении Δt уменьшается и $\Delta\varphi$, а средняя угловая скорость, изменяясь, стремится в пределе к значению угловой скорости в момент времени t:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi/\Delta t = d\varphi/dt;$$

т. е. *угловая скорость в любой момент времени равна первой производной от угла поворота по времени:*

$$\omega = d\varphi/dt = f'(t). \tag{1.111}$$

Если угол поворота выражается в радианах, а время в секундах, то единицей угловой скорости является 1 рад/с.

Характеристикой быстроты изменения угловой скорости служит *угловое ускорение*, обозначаемое ε. Причем если среднее ускорение

$$\varepsilon_{ср} = \Delta\omega/\Delta t,$$

то при $\Delta t \to 0$ $\varepsilon_{ср} \to \varepsilon$ — к угловому ускорению тела в данный момент или

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\omega/\Delta t = d\omega/dt.$$

Значит, *угловое ускорение тела в данный момент равно первой производной от угловой скорости по времени или второй производной от угла поворота по времени*:

$$\varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2 = f''(t). \qquad (1.112)$$

Единица углового ускорения 1 рад/с².

Если вдоль оси вращения тела провести какую-либо из осей координат и смотреть на вращающееся тело со стороны положительного направления оси, то увидим, что тело вращается либо по ходу стрелок часов, либо против их хода. Условимся в этом случае угол поворота, отсчитываемый против хода стрелок часов, считать положительным, а отсчитываемый по ходу стрелок часов — отрицательным. Например, на рис. 1.123 угол φ положительный при направлении оси от A к B.

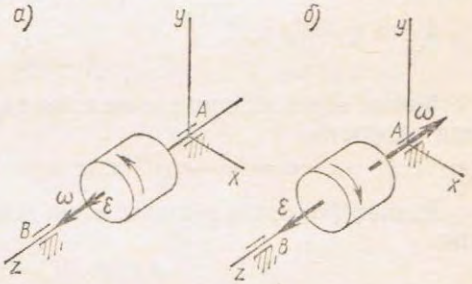


Рис. 1.124

Используя это правило, можно угловую скорость и угловое ускорение рассматривать как векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, направленные вдоль оси вращения. На рис. 1.124 вращающееся тело изображено в осях координат, причем ось z совмещена с осью вращения. На рис. 1.124, *а* тело вращается против хода стрелок часов ($\varphi > 0$) и вектор угловой скорости направлен по оси z в сторону ее положительного отсчета. На рис. 1.124, *б* тело вращается по ходу стрелок часов ($\varphi < 0$) и вектор угловой скорости направлен противоположно положительному направлению оси.

Если $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены в одну сторону, то вращательное движение тела ускоренное — угловая скорость возрастает. Если $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены в противоположные стороны, то вращение тела замедленное — угловая скорость уменьшается.

§ 1.33. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Равномерное вращательное движение. Если угловое ускорение $\varepsilon=0$ и, следовательно, угловая скорость

$$\omega = d\varphi/dt = \text{const}, \tag{1.113}$$

то вращательное движение называется *равномерным*.

Из выражения (1.113) после разделения переменных

$$d\varphi = \omega\, dt.$$

Если при изменении времени от 0 до t угол поворота изменялся от φ_0 (начальный угол поворота) до φ, то, интегрируя уравнение в этих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt,$$

получаем уравнение равномерного вращательного движения

$$\varphi - \varphi_0 = \omega t,$$

которое в окончательном виде записывается так:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \tag{1.114}$$

Если $\varphi_0=0$, то

$$\varphi = \omega t. \tag{1.115}$$

Таким образом, при равномерном вращательном движении угловая скорость

$$\omega = (\varphi - \varphi_0)/t \text{ или при } \varphi_0 = 0 \ \omega = \varphi/t.$$

Равнопеременное вращательное движение. Если угловое ускорение

$$\varepsilon = d\omega/dt = \text{const}, \tag{1.116}$$

то вращательное движение называется *равнопеременным*.

Причем при $\varepsilon>0$ (векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены в одну и ту же сторону) вращательное движение *равноускоренное* и при $\varepsilon<0$ (векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлены в противоположные стороны) вращательное движение *равнозамедленное*.

Произведя разделение переменных в выражении (1.116):

$$d\omega = \varepsilon\, dt$$

и приняв, что при изменении времени от 0 до t угловая скорость изменилась от ω_0 (начальная угловая скорость) до ω, проинтегрируем уравнение в этих пределах:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt \text{ или } \omega - \omega_0 = \varepsilon t,$$

т. е. получим уравнение

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1.117}$$

выражающее значение угловой скорости в любой момент времени.

Для вывода уравнения, выражающего закон равнопеременного вращательного движения, воспользуемся формулой (1.111), из которой следует, что $d\varphi=\omega dt$ или с учетом уравнения (1.117)

$$d\varphi=\omega_0\,dt+\varepsilon t\,dt.$$

Полагая, что в течение времени от 0 до t угол поворота изменялся от φ_0 до φ, проинтегрируем уравнение в этих пределах:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi=\omega_0\int_0^t dt+\varepsilon\int_0^t t\,dt \quad \text{или} \quad \varphi-\varphi_0=\omega_0 t+\varepsilon t^2/2.$$

Отсюда получаем уравнение равнопеременного вращательного движения в окончательном виде:

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 t+\varepsilon t^2/2 \qquad (1.118)$$

Сравнивая формулы (1.114), (1.115), (1.116) и (1.118) с формулами (1.91), (1.92), (1.94) и (1.95) из § 1.29, замечаем их математическую аналогичность. Но при этом следует учитывать, что формулы § 1.29 применимы при рассмотрении движения точки или тела, но только при его поступательном движении. Формулы (1.114) и (1.115), (1.117) и (1.118) применимы лишь при рассмотрении соответственно равномерного или равнопеременного вращательного движения тела.

Так же как в § 1.29, из формул (1.117) и (1.118) — основных формул, характеризующих равнопеременное вращательное движение, можно получить две вспомогательные формулы. Исключив из формул (1.117) и (1.118) время t, получим

$$\varphi=\varphi_0+(\omega^2-\omega_0^2)/(2\varepsilon). \qquad (1.119)$$

Исключив из тех же формул угловое ускорение ε, получим вторую вспомогательную формулу

$$\varphi=\varphi_0+(\omega_0+\omega)\,t/2, \qquad (1.120)$$

где $(\omega_0+\omega)/2=\omega_{ср}$ — средняя угловая скорость при равнопеременном вращательном движении.

В тех случаях равноускоренного вращательного движения, когда $\varphi_0=0$ и $\omega_0=0$, формулы (1.117), (1.118), (1.119) и (1.120) приобретают более простой вид:

$$\omega=\varepsilon t;\ \varphi=\varepsilon t^2/2;\ \varphi=\omega^2/(2\varepsilon);$$

$$\varphi=\omega t/2 \qquad (1.121)$$

При постановке и решении технических задач в условиях промышленного производства или в процессе конструирования часто угловое перемещение φ выражают не в радианах, а просто в оборотах. Угловое перемещение тела, выраженное в оборотах, обозначим $\varphi_{об}$ (т. е. $\varphi_{об}$ выражает количество оборотов тела за какой-то промежуток времени); тогда угол поворота в радианах φ выражается через количество оборотов $\varphi_{об}$ следующим образом:

$$\varphi=2\pi\varphi_{об}, \qquad (1.122)$$

так как при одном обороте вокруг оси тело поворачивается на 2π рад.

Из выражения (1.122) следует, что

$$\varphi_{об} = \varphi/(2\pi). \qquad (1.123)$$

Угловая скорость, выражаемая количеством оборотов в минуту, называется *частотой вращения* и обозначается n. Установим зависимость между ω (рад/с) и n (об/мин). Так как $\omega = \varphi/t$, то при n об/мин за $t = 1$ мин $= 60$ с угол поворота $\varphi = 2\pi n$; следовательно,

$$\omega = 2\pi n/60 = \pi n/30. \qquad (1.124)$$

При переходе от угловой скорости ω (рад/с) к частоте вращения n (об/мин) имеем

$$n = 30\omega/\pi. \qquad (1.125)$$

Пример 1.22. Через 30 с равномерного вращательного движения с частотой $n_0 = 600$ об/мин тело начало равнозамедленное движение и в течение последующих 20 с частота вращения тела уменьшилась до $n = 450$ об/мин.

Определить угловое ускорение тела при равнозамедленном вращательном движении, а также количество оборотов тела за время равномерного и равнозамедленного движения.

Решение. 1. Переведем начальную и конечную частоты вращения тела в единицы угловой скорости:

$$\omega_0 = \pi n_0/30 = \pi \cdot 600/30 = 20\pi \text{ рад/с} = 62{,}8 \text{ рад/с};$$
$$\omega = \pi n/30 = \pi \cdot 450/30 = 15\pi \text{ рад/с} = 47{,}1 \text{ рад/с}.$$

2. За время $t_1 = 30$ с тело, вращаясь равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 20\pi$ рад/с, повернулось на угол

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 = 20\pi 30 = 600\pi \text{ рад} = 1884 \text{ рад}.$$

3. Из формулы (1.117) угловое ускорение, с которым тело вращалось в течение времени $t_2 = 20$ с,

$$\varepsilon = (\omega - \omega_0)/t_2 = (15\pi - 20\pi)/20 = -\pi/4 \text{ рад/с}^2 = -0{,}785 \text{ рад/с}^2.$$

4. За время равнозамедленного движения тело повернулось на угол

$$\varphi_2 = \omega_0 t_2 + \varepsilon t_2^2/2 = 20\pi \cdot 20 - (\pi/4)\, 20^2/2 = 400\pi - 50\pi = 350\pi \text{ рад} = 1100 \text{ рад}.$$

5. За весь промежуток времени $t_1 + t_2 = 50$ с тело повернулось на угол

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 600\pi + 350\pi = 950\pi \text{ рад} = 2984 \text{ рад};$$

следовательно, тело сделало

$$\varphi_{об} = \varphi/(2\pi) = 950\pi/(2\pi) = 475 \text{ об}.$$

Для определения количества оборотов, сделанных телом, можно было частоту вращения и не переводить в единицы угловой скорости. За время $t_1 = 30$ с $= 0{,}5$ мин при равномерном движении тело сделало

$$\varphi_{об\,1} = n_0 t_1 = 600 \cdot 0{,}5 = 300 \text{ об}.$$

За время $t_2 = 20$ с $= 1/3$ мин при равнозамедленном вращении тело сделало [см. формулу (1.120)]

$$\varphi_{об\,2} = (n_0 + n)\, t_2/2 = [(600 + 450)\, 1/3]\, 2 = 175 \text{ об}.$$

Всего $\varphi_{об} = \varphi_{об\,1} + \varphi_{об\,2} = 300 + 175 = 475$ об.

§ 1.34. СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТОЧЕК ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Как уже отмечалось выше (см. § 1.32), точки вращающегося тела движутся не одинаково. Но, зная закон вращательного движения тела, можно определять скорость и ускорение любой точки в любой момент времени. Для этой цели установим зависимость между угловыми величинами φ, ω и ε, характеризующими вращательное движение тела, и линейными величинами s, v, a_t, a_n и a, характеризующими движение точек тела.

Допустим, что тело, показанное на рис. 1.125, вращается согласно уравнению $\varphi=f(t)$, и требуется определить скорость v и ускорение a точки A этого тела, расположенной на расстоянии ρ от оси вращения O. Пусть тело за некоторое время t повернулось на угол φ и точка A, двигаясь по окружности из некоторого начального положения A_0, переместилась на расстояние $s=A_0\breve{A}$. Так как угол φ выражается в радианах, то

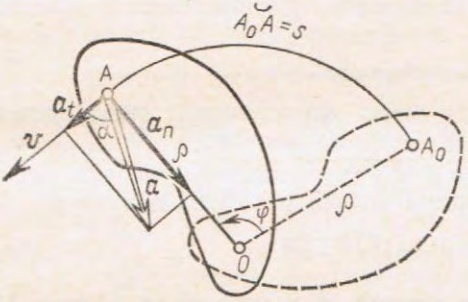


Рис. 1.125

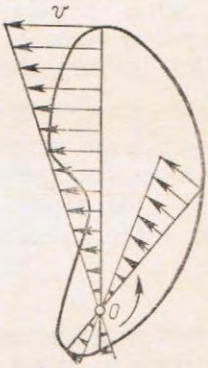


Рис. 1.126

$$s=\rho\varphi, \tag{1.126}$$

т. е. расстояние, пройденное точкой вращающегося тела, пропорционально его углу поворота. Расстояние s и угол поворота φ — функции времени, а ρ — величина, постоянная для данной точки; продифференцируем по времени обе части равенства (1.126) и получим

$$ds/dt=\rho\, d\varphi/dt,$$

но $ds/dt=v$ — скорость точки, а $d\varphi/dt=\omega$ — угловая скорость тела, поэтому

$$v=\rho\omega, \tag{1.127}$$

т. е. *скорость точки вращающегося тела пропорциональна его угловой скорости.*

Из формулы (1.127) видно, что для точек, расположенных на оси вращения, $\rho=0$ и скорости этих точек также равны нулю, а

по мере изменения ρ, т. е. у точек, находящихся дальше от оси вращения, скорости тем больше, чем больше значение ρ. Пропорциональная зависимость скоростей различных точек вращающегося тела от их расстояний от оси вращения показана на рис. 1.126.

Продифференцировав обе части равенства (1.127), имеем

$$dv/dt = \rho\, d\omega/dt,$$

но $dv/dt = a_t$ — касательное ускорение точки, а $d\omega/dt = \varepsilon$ — угловое ускорение тела. Значит,

$$a_t = \rho\varepsilon, \qquad (1.128)$$

т. е. *касательное ускорение точки вращающегося тела пропорционально его угловому ускорению.*

Подставив в формулу (1.87) $a_n = v^2/\rho$ значение скорости из формулы (1.127), получим

$$a_n = \rho\omega^2, \qquad (1.129)$$

т. е. *нормальное ускорение точки вращающегося тела пропорционально второй степени его угловой скорости.*

Из формулы (1.89) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$; после подстановки вместо a_t и a_n их значений из формул (1.128) и (1.129) получаем

$$a = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (1.130)$$

Направление вектора ускорения, т. е. угол $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{a}, \mathbf{v}})$ (рис. 1.126), определяется по одной из формул (1.90), причем последнюю из них можно представить теперь в таком виде:

$$\operatorname{tg}\alpha = a_n/a_t = \rho\omega^2/(\rho\varepsilon) \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = \omega^2/\varepsilon. \qquad (1.131)$$

Из формул (1.130) и (1.131) следует, что для точек тела при его вращательном движении по заданному закону можно сначала найти ускорение $\boldsymbol{a}$, а затем разложить его на касательное ускорение $\boldsymbol{a}_t$ и нормальное ускорение $\boldsymbol{a}_n$, модули которых (см. рис. 1.125)

$$a_t = a\cos\alpha \text{ и } a_n = a\sin\alpha. \qquad (1.132)$$

Пример 1.23. При запуске двигателя его шкив диаметром $d = 200$ мм в течение первых нескольких секунд вращается согласно уравнению $\varphi = 0{,}2t^3$. Определить скорости и ускорения точек, расположенных на ободе шкива, в момент $t_1 = 5$ с.

Решение. 1. Дифференцированием уравнения движения шкива находим его угловую скорость:

$$\omega = d\varphi/dt = (0{,}2t^3)' = 0{,}6t^2.$$

В момент $t_1 = 5$ с $\omega_1 = 0{,}6t_1^2 = 0{,}6 \cdot 5^2 = 15$ рад/с.

2. Дифференцированием уравнения угловой скорости шкива находим его угловое ускорение:

$$\varepsilon = d\omega/dt = (0{,}6t^2)' = 1{,}2t.$$

В момент $t_1 = 5$ с $\varepsilon_1 = 1{,}2t_1 = 1{,}2 \cdot 5 = 6$ рад/с^2.

3. Имея в виду, что для точек на ободе шкива $\rho = d/2 = r = 100$ мм $= 0{,}1$ м, по формуле (1.130) находим значение ускорения этих точек:

$$a = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = 0{,}1\sqrt{6^2 + 15^4} \approx 22{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Угол, образуемый вектором ускорения с касательной к ободу шкива $\alpha = \widehat{(a, v)}$, находим из формулы (1.131)

$$\operatorname{tg}\alpha = \omega^2/\varepsilon = 15^2/6 = 37{,}5.$$

Отсюда по таблицам определим $\alpha = 88°28'20''$.

4. Можно определить модули касательного и нормального ускорений, направления которых известны: $a_t = 0{,}62$ м/с², $a_n = 22{,}5$ м/с². (Правильность этих результатов проверьте самостоятельно.)

§ 1.35. СПОСОБЫ ПЕРЕДАЧИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В технике часто возникает необходимость передачи вращательного движения от одной машины к другой (например, от электродвигателя к станку) или внутри какой-либо машины от одной вращающейся детали к другой. Механические устройства, предназначенные для передачи вращательного движения, так и называются *передачами*. Подробно передачи рассмотрены в третьем разделе учебника, здесь мы ограничимся лишь некоторыми предварительными сведениями о передачах.

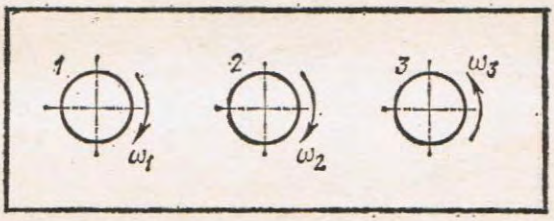


Рис. 1.127

Основной кинематической характеристикой каждой передачи служит так называемое передаточное отношение, обозначаемое буквой u с двойным индексом. Индекс показывает, от какого вала к какому определяется данное передаточное отношение.

Передаточным отношением от одного вала к другому называется взятое со знаком плюс или минус отношение их угловых скоростей.

Передаточное отношение считается положительным, если оба вала вращаются в одну и ту же сторону. Если же валы, соединенные передачей, вращаются в противоположные стороны, то передаточное отношение считается отрицательным.

Например, передаточное отношение от вала *1* к валу *2* (рис. 1.127) имеет вид $u_{12} = \omega_1/\omega_2$; передаточное отношение от вала *2* к валу *1* — вид $u_{21} = \omega_2/\omega_1$, передаточное отношение от вала *2* к валу *3* — вид $u_{23} = -\omega_2/\omega_3$; передаточное отношение от вала *1* к валу *3* — вид $u_{13} = -\omega_1/\omega_3$.

В зависимости от направления передачи вращения валы делятся на *ведущие* и *ведомые*. Например, если на рис. 1.127 вращение передается от вала *1* к валу *3*, то вал *1* называется ведущим, а вал *3* —

ведомым, тогда как вал *2* относительно первого является ведомым, а относительно третьего — ведущим.

Передаточное отношение может быть выражено через конструктивные параметры механизма. Рассмотрим некоторые простейшие передачи и выведем формулы их передаточных отношений через конструктивные параметры.

Ременная передача часто применяется в случаях, когда необходимо передать вращение между валами, расположенными на значительном расстоянии (до нескольких метров) друг от друга. Для этого на валах жестко закрепляют шкивы, на которые натяжением надевают ремень. Вращение ведущего шкива преобразуется во вращение ведомого шкива благодаря трению между шкивом и ремнем.

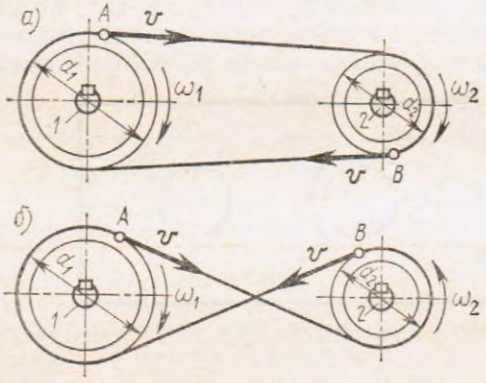


Рис. 1.128



Рис. 1.129

На рис. 1.128, *а* изображена схема открытой передачи между параллельными валами *1* и *2*; в этой передаче оба вала вращаются в одну сторону. Если не принимать во внимание возможное проскальзывание ремня на шкивах, то можно считать, что все точки ремня работающей передачи имеют одинаковую скорость v, такая же скорость точек и на ободах обоих шкивов. Значит на основании формулы (1.127)

$$v = 0{,}5 d_1 \omega_1 = 0{,}5 d_2 \omega_2,$$

где d_1 и d_2 — диаметры шкивов, а ω_1 и ω_2 — их угловые скорости. Отсюда получаем формулу для определения передаточного отношения открытой ременной передачи:

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = d_2 / d_1. \qquad (1.133)$$

На рис. 1.128, *б* показана схема перекрестной передачи, при которой валы вращаются в противоположные стороны. Передаточное отношение в этом случае определяется по формуле (1.133), но со знаком минус. Таким образом, *передаточное отношение ременной передачи равно обратному отношению диаметров шкивов.*

Функциональная передача получила название от латинского «frictio» — трение. Во фрикционных передачах вращательное дви-

жение от одного вала к другому передается с помощью фрикционных колес (катков), жестко насаженных на валы и прижатых друг к другу.

На рис. 1.129 изображена цилиндрическая (катки имеют форму цилиндров) фрикционная передача, применяемая при параллельном расположении валов. На рис. 1.130 показана коническая фрикционная передача, применяемая в тех случаях, когда валы *1* и *2* пересекаются друг с другом.

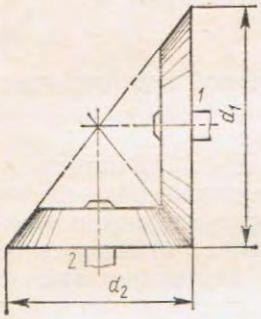


Рис. 1.130

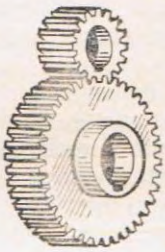


Рис. 1.131

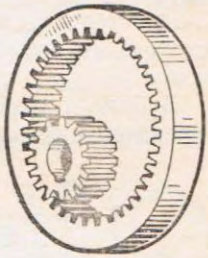


Рис. 1.132

Пренебрегая проскальзыванием катков, можно считать, что скорости соприкасающихся точек равны. Тогда согласно формуле (1.127)

$$v = 0{,}5 d_1 \omega_1 = 0{,}5 d_2 \omega_2,$$

откуда передаточное отношение фрикционной передачи

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = d_2 / d_1. \qquad (1.134)$$

Передаточное отношение фрикционной передачи равно обратному отношению диаметров фрикционных катков, причем для конической передачи берутся диаметры больших оснований конусов.

Зубчатые передачи можно рассматривать как видоизменение фрикционных передач, при котором на цилиндрических поверхностях фрикционных колес нарезают зубья так, чтобы зубья одного колеса входили в промежутки (впадины) между зубьями другого. Если одно из зубчатых колес придет во вращательное движение, то, зацепляясь за зубья второго, оно приведет во вращение и его. Зубчатые колеса, изображенные на рис. 1.131, можно мысленно заменить двумя фрикционными колесами, из которых одно увлекает за собой второе без проскальзывания и, значит, каждое из них вращается с теми же угловыми скоростями, что и сами зубчатые колеса. Окружности таких воображаемых фрикционных колес называются *начальными окружностями* данных зубчатых колес. Диаметр, соответствующий начальной окружности зубчатого колеса, называют начальным и обозначают d_w.

Передаточное отношение двух зубчатых колес, находящихся в зацеплении, равно обратному отношению их начальных диаметров:

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = \mp d_{w_2}/d_{w_1}. \qquad (1.135)$$

Передаточное отношение зубчатой передачи удобней выражать через отношение чисел зубьев колес. У зубчатого колеса число зубьев пропорционально начальному диаметру, поэтому если числа зубьев двух колес, находящихся в зацеплении, обозначить z_1 и z_2, то передаточное отношение зубчатой передачи примет вид

$$u_{12} = \omega_1/\omega_2 = \mp z_2/z_1. \qquad (1.136)$$

Следовательно, *передаточное отношение зубчатой передачи равно отношению числа зубьев ведомого колеса к числу зубьев ведущего колеса.*

Зубчатая передача, изображенная на рис. 1.131, называется передачей с *внешним зацеплением*. При этой передаче валы вращаются в противоположные стороны, поэтому передаточное отношение отрицательное. Если передача имеет *внутреннее зацепление* (рис. 1.132), то валы вращаются в одну сторону и передаточное отношение принимается положительным.

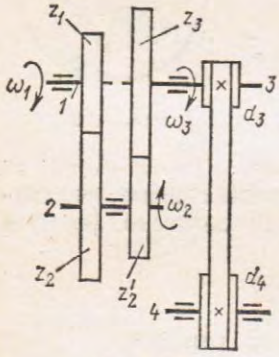


Рис. 1.133

Многоступенчатые передачи составляют из ряда соединенных между собой простых передач (или ступеней). Определение передаточного отношения многоступенчатой передачи рассмотрим на примере передачи, изображенной на рис. 1.133. Вращение между валами *1* и *2* передается с помощью зубчатых колес с числом зубьев z_1 и z_2, передача вращения между валами *2* и *3* производится зубчатыми колесами с числом зубьев z_2' и z_3 и, наконец, между валами *3* и *4* вращение передается ременной передачей с диаметрами шкивов d_3 и d_4. Для удобства вычислений у обозначений чисел зубьев и диаметров шкивов поставлены индексы, соответствующие нумерации валов.

Обозначим угловые скорости валов соответственно ω_2, ω_2, ω_3 и ω_4 и заметим, что оба колеса z_2 и z_2', закрепленные на валу *2*, имеют угловую скорость ω_2, а колесо z_3 и шкив d_3 — угловую скорость ω_3.

Определим теперь передаточное отношение от вала *1* к валу *4*, т. е. передаточное отношение данной многоступенчатой передачи:

$$u_{14} = \omega_1/\omega_4. \qquad (а)$$

Для этого составим последовательно передаточные отношения отдельных ступеней:

$$u_{1\bar{2}} = \omega_1/\omega_{\bar{2}};\ u_{\bar{2}3} = \omega_{\bar{2}}/\omega_3;\ u_{34} = \omega_3/\omega_4$$

и перемножим их:

$$u_{12}u_{23}u_{34} = (\omega_1/\omega_2)\,(\omega_2/\omega_3)\,(\omega_3/\omega_4) = \omega_1/\omega_4. \qquad (б)$$

Так как правые части равенств (а) и (б) одинаковы, то равны между собой и их левые части, т. е.

$$u_{14} = u_{12}u_{23}u_{34}. \qquad (в)$$

Зная, что в данном случае $u_{12}=-z_2/z_1$ (валы *1* и *2* вращаются в противоположные стороны), $u_{23}=-z_3/z_2'$ и $u_{34}=d_4/d_3$, передаточное отношение

$$u_{14}=\frac{\omega_1}{\omega_4}=\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\cdot\left(-\frac{z_3}{z_2'}\right)\frac{d_4}{d_3}=\frac{z_2z_3d_4}{z_1z_2'd_3}.$$

Передаточное отношение положительно, значит валы *1* и *4* вращаются в одну сторону, что подтверждает рис. 1.133.

Из последнего равенства, задавшись любой из двух угловых скоростей ω_1 или ω_4, можно определить другую. Например, при $z_1=20$, $z_2=40$, $z_2'=24$, $z_3=36$, $d_3=160$ мм, $d_4=200$ мм и угловой скорости $\omega_4=10\pi$ рад/с (что соответствует частоте вращения $n=300$ об/мин) угловая скорость

$$\omega_1=\omega_4\frac{z_2z_3d_4}{z_1z_2'd_3}=10\pi\frac{40\cdot36\cdot200}{20\cdot24\cdot160}=37{,}5\pi \text{ рад/с}$$

или

$$n_1=30\omega_1/\pi=30\cdot37{,}5\pi/\pi=1125 \text{ об/мин}.$$

Рассуждения, приведенные выше при получении формулы (в) передаточного отношения заданной на рис. 1.133 трехступенчатой передачи, можно распространить на передачу с любым числом ступеней.

Для многоступенчатой передачи из n ступеней формула (в) примет вид

$$u_{1n}=(-1)^k u_{12}u_{23}u_{34}\ldots u_{(n-1)n} \qquad (1.137)$$

— передаточное отношение многоступенчатой передачи равно произведению передаточных отношений ее отдельных ступеней. Множитель $(-1)^k$ позволяет определить знак передаточного отношения, где k — число пар сопряженных колес внешнего касания (зацепления). Если знак передаточного отношения не имеет существенного значения, то множитель $(-1)^k$ опускается.

Передаточное отношение, вычисленное без учета знака в направлении от ведущего вала к ведомому, называется передаточным числом.

Передаточное число обозначается буквой u без индексов и широко используется при расчете и проектировании передач (см. третий раздел учебника).

В отличие от передаточного отношения передаточное число всегда больше или равно 1.

Глава 9
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 1.36. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Примером сложного движения точки может служить лодка (если ее принять за материальную точку), плывущая от одного берега реки к другому. В этом случае лодка, двигаясь по реке, например в направлении, перпендикулярном берегам, одновременно вместе с водным потоком перемещается вдоль берегов и для наблюдателя, оставшегося на берегу, движение лодки воспринимается как составленное из этих двух движений. Шагающий по ступенькам движущегося эскалатора в метро человек также совершает сложное движение относительно неподвижного свода тоннеля.

Таким образом, при сложном движении точка (в приведенных выше примерах лодка или человек), двигаясь относительно некоторой подвижной материальной среды (реки или ленты эскалатора), которую условимся называть *подвижной системой отсчета*, одновременно передвигается вместе с этой системой отсчета относительно второй системы отсчета, условно принимаемой за *неподвижную*.

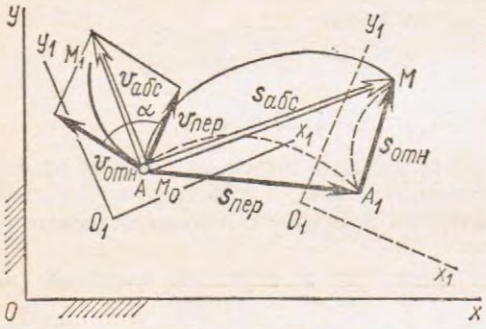


Рис. 1.134

Движение некоторой точки M по отношению к подвижной системе отсчета называется относительным. *Движение подвижной системы отсчета вместе со всеми связанными с ней точками материальной среды по отношению к неподвижной системе отсчета называется для точки M* переносным. *Движение точки M по отношению к неподвижной системе отсчета называется* сложным или абсолютным.

Заметим, что, для того чтобы видеть сложное (абсолютное) движение точки, наблюдатель должен сам быть связан с неподвижной системой отсчета. Если же наблюдатель находится в подвижной системе отсчета, то он видит лишь относительную часть сложного движения.

Представим, что точка M (рис. 1.134) переместилась за некоторое время Δt относительно подвижной системы координат $O_1x_1y_1$ из начального положения M_0 в положение M_1 по траектории M_0M_1 (траектории относительного движения точки). За это же время Δt подвижная система координат $O_1x_1y_1$ вместе со всеми неизменно связанными с ней точками, а значит и вместе с траекторией относительного движения точки M, переместилась в неподвижной системе координат Oxy в новое положение (на рис. 1.134 это положение

подвижной системы показано штриховыми линиями). Причем точка A подвижной системы отсчета, с которой в начальный момент совпадала движущаяся точка M, переместилась в положение A_1 по некоторой траектории AA_1. Легко видеть, что движущаяся точка для наблюдателя, связанного с неподвижной системой отсчета Oxy, займет положение M, т. е., как это следует из рис. 1.134, абсолютное перемещение $\overrightarrow{M_0M}=\boldsymbol{s}_{\text{абс}}$ точки M равно геометрической сумме перемещения $\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{s}_{\text{пер}}$ в переносном движении и перемещения $\overrightarrow{A_1M}=s_{\text{отн}}$ точки M в относительном движении:

$$\boldsymbol{s}_{\text{абс}}=\boldsymbol{s}_{\text{пер}}+\boldsymbol{s}_{\text{отн}}. \tag{1.138}$$

Разделим обе части равенства (1.138) на время движения Δt:

$$\boldsymbol{s}_{\text{абс}}/\Delta t=\boldsymbol{s}_{\text{пер}}/\Delta t+\boldsymbol{s}_{\text{отн}}/\Delta t$$

и получим геометрическую систему средних скоростей:

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс. ср}}=\boldsymbol{v}_{\text{пер. ср}}+\boldsymbol{v}_{\text{отн. ср}}, \tag{1.139}$$

которые, как известно из § 1.25, направлены вдоль соответствующих векторов перемещений (на рис. 1.134 векторы средних скоростей не показаны).

Если теперь перейти к пределам при $\Delta t\to 0$, то получим [см. формулу (1.78) в § 1.25]: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}_{\text{абс. ср}}=\boldsymbol{v}_{\text{абс}}$ — вектор средней абсолютной скорости стремится к вектору абсолютной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{абс}}$; $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}_{\text{пер. ср}}=\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ — вектор средней переносной скорости стремится к вектору переносной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$; $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{v}_{\text{отн. ср}}=\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ — вектор средней относительной скорости стремится к вектору относительной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$.

Таким образом, в пределе при $\Delta t\to 0$ из выражения (1.139) получим геометрическое равенство

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}}=\boldsymbol{v}_{\text{пер}}+\boldsymbol{v}_{\text{отн}}, \tag{1.140}$$

выражающее теорему сложения скоростей: *при сложном движении точки абсолютная скорость в каждый данный момент времени равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.*

Если задан угол $\alpha=(\widehat{\boldsymbol{v}_{\text{пер}}, \boldsymbol{v}_{\text{отн}}})$ (рис. 1.134), то модуль абсолютной скорости

$$v_{\text{абс}}=\sqrt{v_{\text{пер}}^2+v_{\text{отн}}^2+2v_{\text{пер}}v_{\text{отн}}\cos\alpha}. \tag{1.141}$$

Углы, образуемые векторами абсолютной скорости $\boldsymbol{v}_{\text{абс}}$ с векторами $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, определяются по теореме синусов.

В частном случае при $v_{\text{пер}}=v_{\text{отн}}$ при сложении этих скоростей образуется ромб (рис. 1.135, *а*) или равнобедренный треугольник (рис. 1.135, *б*) и, следовательно,

$$v_{\text{абс}}=2v_{\text{пер}}\cos(\alpha/2)=2v_{\text{отн}}\cos(\alpha/2). \tag{1.142}$$

В моменты, когда векторы $\boldsymbol{v}_{пер}$ и $\boldsymbol{v}_{отн}$ взаимно перпендикулярны ($\alpha=90°$), определение абсолютной скорости упрощается. Просто определяется абсолютная скорость и в тех случаях, когда $\alpha=0°$ (векторы $\boldsymbol{v}_{пер}$ и $\boldsymbol{v}_{отн}$ направлены в одну сторону) или $\alpha=180°$ (векторы $\boldsymbol{v}_{пер}$ и $v_{отн}$ направлены в противоположные стороны).

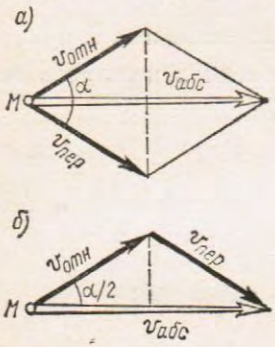


Рис. 1.135

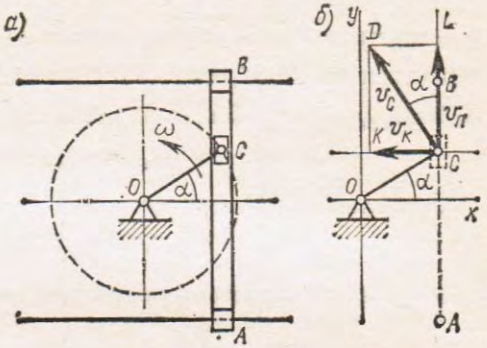


Рис. 1.136

Пример 1.24. Кривошип $OC=30$ см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega=12$ рад/с и приводит в возвратно-поступательное движение кулису AB (рис. 1.136, *а*) с помощью ползуна, шарнирно соединенного в точке C с кривошипом и передвигающегося в прорези кулисы. Определить скорость $v_п$ ползуна в прорези кулисы и скорость $v_к$ самой кулисы в тот момент, когда кривошип образует с горизонталью угол $\alpha=30°$.

Решение. 1. Приняв ползун за материальную точку (обозначим ее C), видим, что в данном случае эта точка совершает около неподвижной оси O кривошипа круговое движение (абсолютное движение), которое складывается из движения вместе с кулисой (переносное движение) и движения вдоль кулисы (относительное движение).

2. Абсолютная скорость $\boldsymbol{v}_C$ точки C известна (рис. 1.136, *б*). Она направлена перпендикулярно кривошипу OC (по касательной к круговой траектории точки C) в сторону вращения кривошипа, а ее модуль $v_C=\omega\rho=12\cdot0{,}3=3{,}6$ м/с, так как $\rho=OC=30$ см$=0{,}3$ м.

У переносной и относительной скоростей точки C известны только направления. Переносная скорость точки C, равная скорости поступательного движения кулисы, направлена горизонтально (параллельно оси x неподвижной системы координат Oxy). Относительная скорость точки C направлена вдоль кулисы по вертикали AB.

3. Разложив по правилу параллелограмма вектор $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{v}_C$ на два составляющих вектора по горизонтальному и вертикальному направлениям, получим прямоугольник $CKDL$, в котором $\overrightarrow{CK}=\boldsymbol{v}_к$ — искомая скорость кулисы, а $\overrightarrow{CL}=\boldsymbol{v}_п$ — искомая относительная скорость ползуна.

4. Из построения (рис. 1.136, *б*) следует, что $\widehat{DCL}=\alpha=30°$. Поэтому

$$v_п=v_C\cos\alpha=3{,}6\cos 30°=3{,}12 \text{ м/с};$$
$$v_к=v_C\sin\alpha=3{,}6\sin 30°=1{,}80 \text{ м/с}.$$

Таким образом, при заданном положении кривошипа относительная скорость ползуна в прорези кулисы направлена вертикально вверх и равна 3,12 м/с, а скорость кулисы направлена горизонтально влево и равна 1,80 м/с.

§ 1.37. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА

Движение твердого тела, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, называется плоскопараллельным. Если, например, допустить, что асфальтовое покрытие перекрестка двух городских улиц образует идеальную плоскость, то кузовы легковых автомобилей, автобусов, троллейбусов, проезжающих через перекресток и делающих правые или левые повороты, совершают плоскопараллельное движение. Такое же движение совершает и колесо, катящееся в вертикальной плоскости.

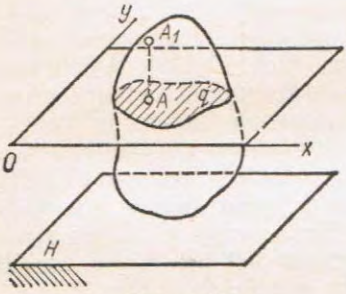


Рис. 1.137

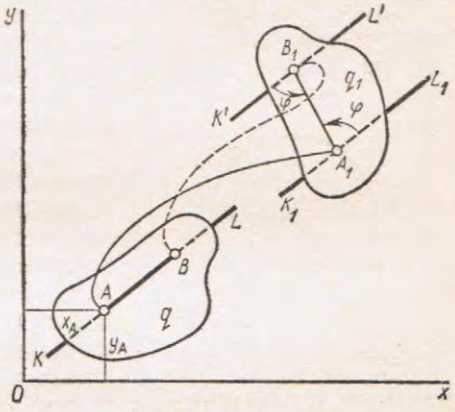


Рис. 1.138

При плоскопараллельном движении тела M (рис. 1.137) любое его плоское сечение q всегда находится в секущей плоскости xOy, параллельной неподвижной плоскости H, а любая точка A_1 тела M, расположенная выше (или ниже) сечения, движется тождественно с точкой A, лежащей в сечении q на перпендикулярном ему отрезке A_1A. Следовательно, изучая плоскопараллельное движение тела M, достаточно рассматривать движение его плоского сечения q в плоскости xOy.

Совместим плоскость xOy с плоскостью рисунка и выберем в сечении q (рис. 1.138) произвольную точку A, которую назовем полюсом. Свяжем с полюсом A некоторую прямую KL, а в самом сечении вдоль прямой KL проведем отрезок AB. Пусть теперь, двигаясь в плоскости xOy, плоское сечение переместилось из положения q в положение q_1, причем полюс A, описав некоторую траекторию AA_1, занял положение A_1, а отрезок AB — соответственно положение A_1B_1. Мы видим, что связанная с полюсом A прямая KL, двигаясь поступательно, заняла положение K_1L_1, а по отношению к этой прямой отрезок AB повернулся на угол φ против хода часовой стрелки. Иначе говоря, перемещая плоское сечение из положения q в положение q_1, можно сначала передвинуть его вместе с полюсом A поступательно, а затем повернуть на угол φ либо, наоборот, сначала повернуть вокруг полюса на угол φ, а затем передвинуть поступательно.

Таким образом, *плоскопараллельное движение тела — движение сложное и состоит из поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса.*

Поступательная часть плоскопараллельного движения характеризуется изменением с течением времени координат x и y полюса A и изменением угла поворота φ сечения, т. е. закон плоскопараллельного движения можно задать тремя уравнениями:

$$x=f_1(t),\ y=f_2(t),\ \varphi=f_3(t). \qquad (1.143)$$

Следует заметить, что первые два уравнения, описывающие поступательную часть плоскопараллельного движения, зависят от выбора полюса, а третье уравнение, описывающее вращательную часть, от выбора полюса не зависит. Действительно, если при перемещении плоского сечения из положения q в положении q_1 (рис. 1.138) выбрать за полюс точку B, то поступательная часть плоскопараллельного движения характеризуется изменением координат точки B, т. е. иными, чем в уравнении (1.143), двумя первыми уравнениями, а во вращательной части сечение повернется вместе с отрезком AB вокруг полюса B на тот же угол φ и в ту же сторону, что и в первом случае.

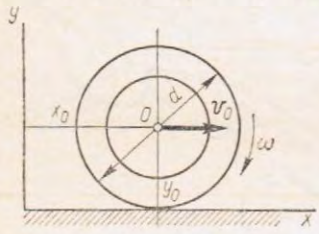


Рис. 1.139

Дифференцируя заданные уравнения плоскопараллельного движения, можно в каждый данный момент времени определить скорость v_A и ускорение a_A полюса, а также угловую скорость ω и угловое ускорение ε тела.

Пусть, например, движение катящегося колеса диаметром (рис. 1.139) задано уравнениями $x_0=5\,t$, $y_0=d/2$, $\varphi=20\,t$, где x_0 и y_0 — м, φ — рад, t — с. Продифференцировав эти уравнения, находим, что скорость полюса O $v_O=\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}t=5$ м/с, угловая скорость колеса $\omega=\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t=20$ рад/с. Ускорение полюса и угловое ускорение колеса в данном случае равны нулю. Зная скорость полюса и угловую скорость тела, можно затем определить скорость любой его точки.

§ 1.38. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ЛЮБОЙ ТОЧКИ ТЕЛА

Пусть дано плоское сечение q, угловая скорость и скорость полюса которого в некоторый момент времени соответственно ω и v_0 (рис. 1.140, *а*); требуется определить скорость какой-либо точки A.

Расчленим сложное плоскопараллельное движение на составные части — поступательную и вращательную. При поступательном движении вместе с полюсом (переносное движение) все точки сечения, и точка A в том числе, имеют переносную скорость $\boldsymbol{v}_0$, равную скорости полюса (рис. 1.140, *б*). Одновременно с поступательным сечение q совершает вращательное движение с угловой скоростью ω (относительное движение) и точка A имеет, кроме того, перпендику-

лярно направленную к отрезку AO относительную скорость $\boldsymbol{v}_{AO}$ (рис. 1.140, *в*), модуль которой $v_{AO}=\omega AO$.

Следовательно (рис. 1.140, *г*), в каждый данный момент времени

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{v}_{AO}, \qquad (1.144)$$

т. е. *абсолютная скорость точки тела при плоскопараллельном движении равна геометрической сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки вокруг полюса.*

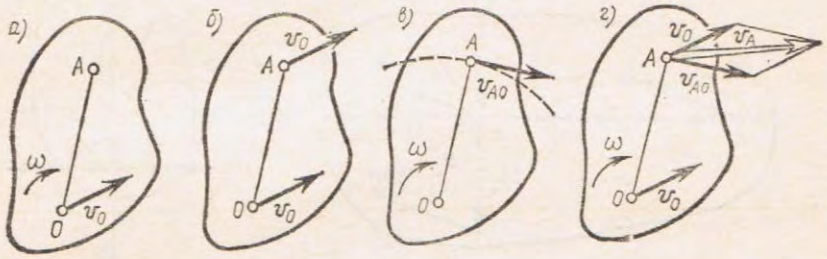


Рис. 1.140

Модуль абсолютной скорости может быть определен по формуле (1.141) (см. § 1.36), а направление — с помощью теоремы синусов. Если же направление абсолютной скорости известно, то ее модуль определяется проще на основании следующей теоремы: *проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.*

Допустим, что известны скорости $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ точек A и B какого-либо тела (рис. 1.141). Приняв за полюс точку A, получим

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{BA}.$$

Относительная скорость $\boldsymbol{v}_{BA}$ перпендикулярна AB; следовательно, $AA_1=BB_1$ или $v_A\cos\alpha=v_B\cos\beta$.

Теорема доказана.

§ 1.39. МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР СКОРОСТЕЙ

Точка плоского сечения q, абсолютная скорость которой равняется нулю, называется мгновенным центром скоростей. Иначе говоря, это такая точка C плоского сечения q (рис. 1.142), у которой переносная скорость $\boldsymbol{v}_0$ полюса и относительная скорость $\boldsymbol{v}_{CO}$ равны по модулю ($v_O=v_{CO}=\omega OC$) и направлены в противоположные стороны. В каждый данный момент такая точка единственная в плоском сечении q, так как она обязательно лежит на прямой MN, перпендикулярной $\boldsymbol{v}_O$, на расстоянии $OC=v_O/\omega$. Только при этих условиях

$$v_C=v_O-v_{CO}=v_O-\omega OC=v_O-\omega v_O/\omega=v_O-v_O=0.$$

Точка C, у которой абсолютная скорость равна нулю, получила название мгновенного центра скоростей, потому что, во-первых,

точка C находится относительно выбранного полюса O в положении, при котором $v_C=0$ в течение бесконечно малого промежуточного времени («одно мгновение»), и, во-вторых, если точку C принять за полюс, то переносная скорость всех других точек в этот момент равна нулю и их абсолютные скорости равны относительным скоростям вокруг точки C — центра скоростей.

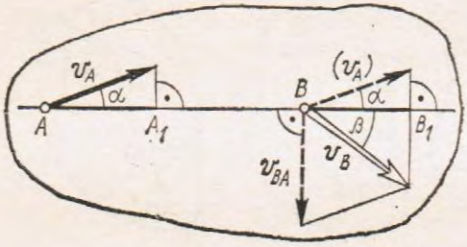


Рис. 1.141

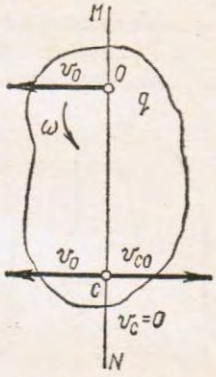


Рис. 1.142

Пусть, например, в плоском сечении q точка C — мгновенный центр скоростей (рис. 1.143), тогда вектор абсолютной скорости любой точки направлен перпендикулярно отрезку, соединяющему эту точку с мгновенным центром скоростей, а значение скоростей определяется по формуле (1.127), т. е. $v_A=\omega AC$, $v_B=\omega BC$, $v_D=\omega BD$ и т. д. Отсюда следует простой способ определения положения мгновенного центра скоростей: он лежит на пересечении прямых, перпендикулярных направлениям абсолютных скоростей точек плоского сечения. Значит, для определения положения мгновенного центра скоростей достаточно знать лишь направление абсолютных скоростей двух точек плоского сечения.

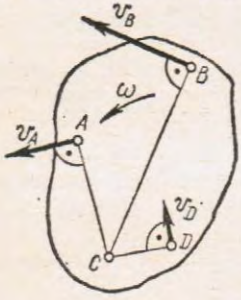


Рис. 1.143

Этот способ пригоден в случаях, когда направления скоростей не параллельны. Если же в плоском сечении выбраны (или заданы) точки, скорости которых в данный момент параллельны, то здесь возможны два случая:

а) точки A и B расположены на общем перпендикуляре к направлениям скоростей (рис. 1.144, *а*, *б*). Тогда для определения положения мгновенного центра скоростей C нужно знать модули скоростей v_A и v_B и положение точки C определяется из пропорции

$$AC/BC=v_A/v_B,$$

которая вытекает из равенства $v_A/AC=v_B/BC=\omega$, полученного, в свою очередь, из формулы (1.127);

б) точки A и B расположены на прямой, не перпендикулярной направлениям их скоростей (рис. 1.144, *в*). В подобном случае пря-

мые, перпендикулярные направлениям скоростей точек, параллельны друг другу. Значит, мгновенный центр скоростей — в бесконечности, т. е. плоское сечение в этот момент движется поступательно и $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$.

В § 1.37 указывалось, что примером плоскопараллельного движения может служить катящееся колесо. Если колесо катится без

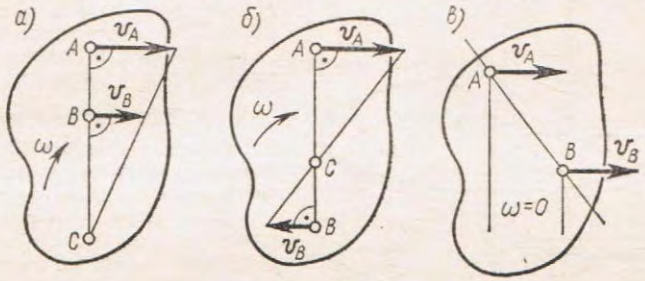


Рис. 1.144

скольжения (см. рис. 1.139), то в каждый данный момент времени мгновенный центр скоростей плоского сечения колеса, перпендикулярного его оси O, лежит в точке соприкосновения колеса с неподвижной плоскостью.

§ 1.40. СЛОЖЕНИЕ ДВУХ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Сложение двух вращений вокруг параллельных осей рассмотрим на примере диска *1* (рис. 1.145, *а*) вращающегося около оси O_1a, закрепленной на кривошипе *2*, который, в свою очередь, вращается около оси O_2b ($O_2b \| O_1a$).

Допустим, что диск *1* и кривошип *2* вращаются в одну сторону с угловыми скоростями соответственно ω_1 и ω_2. Изобразим угловые скорости диска и кривошипа в виде векторов $\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{\omega}_1$ и $\overrightarrow{BB_1} = \boldsymbol{\omega}_2$, направленных соответственно вдоль осей O_1a и O_2b (см. § 1.32). Таким образом, диск *1* участвует одновременно в двух вращательных движениях: во-первых, вокруг оси O_1a с угловой скоростью ω_1 (относительное вращение) и, во-вторых, вместе с кривошипом *2* вокруг оси O_2b с угловой скоростью ω_2 (переносное вращение). В каждый данный момент времени точка B диска, оказывающаяся на оси O_2b, имеет от первого движения скорость $\boldsymbol{v}_B$, направленную перпендикулярно AB и численно равную $v_B = \omega_1 AB$ (во втором движении эта точка неподвижна); в тот же момент точка A, неподвижная в первом движении, за счет второго движения получает скорость $\boldsymbol{v}_A$, направленную также перпендикулярно отрезку AB, но численно равную $v_A = \omega_2 BA$. Следовательно, скорости $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_A$ — абсолютные скорости точек A и B диска в сложном вращательном движении и параллельны друг другу. Согласно правилу, показанному на рис. 1.144, *б*, найдем положение точки C — мгновенного центра скоростей диска, через которую проходит мгновенная ось Cc вращения диска. Считая, что около мгновенной оси Cc диск вращается с угловой скоростью ω, можем записать:

$$v_B = \omega CB \text{ и } v_A = \omega CA,$$

откуда

$$\omega = v_B/CB = v_A/CA. \qquad \text{(а)}$$

Из свойства пропорции

$$\omega = (v_B + v_A)/(CB + CA) = (v_B + v_A)/AB.$$

Подставив сюда значения v_B и v_A, найденные выше, получим

$$\omega = (\omega_1 AB + \omega_2 BA)/AB.$$

И окончательно

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \qquad (1.145)$$

Следовательно, *при сложении двух направленных в одну сторону вращательных движений вокруг параллельных осей образуется вращение вокруг мгновенной оси с абсолютной угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей первого и второго вращений.*

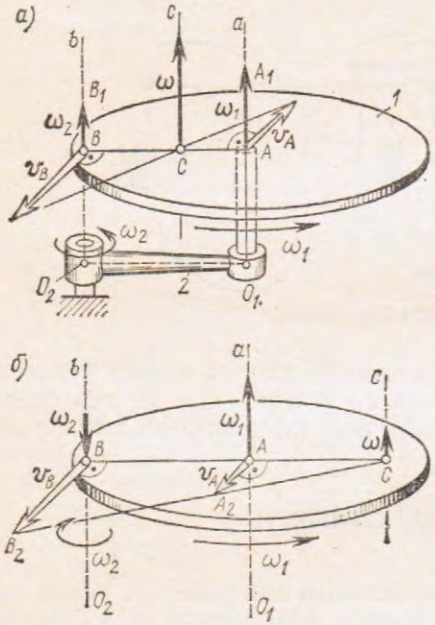


Рис. 1.145

Положение мгновенной оси Cc определяется из равенства

$$\omega/AB = \omega_1/BC = \omega_2/AC, \qquad (1.146)$$

которое можно получить из выражения (а), если разделить каждую часть этого равенства на AB.

Если диск *1* и кривошип *2* вращаются в противоположные стороны (рис. 1.145, *б*), то v_B — скорость точки B, получившаяся при вращении диска *1*, и v_A — скорость точки A, получившаяся при вращении кривошипа *2*, направленные перпендикулярно отрезку AB в одну сторону. Поэтому мгновенный центр скоростей C лежит на продолжении отрезка BA за большей по модулю угловой скоростью ω_1. Теперь абсолютная угловая скорость $\omega = v_B/CB = v_A/CA = (v_B - v_A)/AB$.

Подставив вместо скоростей точек B и A их значения $v_B = \omega_1 AB$ и $v_A = \omega_2 AB$, получим

$$\omega = (\omega_1 AB - \omega_2 AB)/AB,$$

т. е.

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \qquad (1.147)$$

— при сложении направленных в противоположные стороны двух вращательных движений вокруг параллельных осей также образуется вращение около мгновенной оси, но с абсолютной скоростью, равной разности угловых скоростей первого и второго вращений.

Положение мгновенной оси Cc определяется по формуле (1.146).

Сложение двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей рассмотрим на примере вращения тела *1* вокруг оси O_1a (рис. 1.146), закрепленной на кривошипе *2*, который вращается вокруг оси O_2b, причем обе оси лежат в одной плоскости и, следовательно, пересекаются в какой-либо точке C.

Предположим, что тело *1* вращается вокруг оси O_1a с угловой скоростью ω_1 (относительное движение), а вместе с кривошипом *2* — вокруг оси O_2b с угловой скоростью ω_2 (переносное движение). Перенесем векторы угловых скоростей ω_1 и ω_2 вдоль осей в точку C их пересечения, а затем, сложив по правилу параллелограмма, получим

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \qquad (1.148)$$

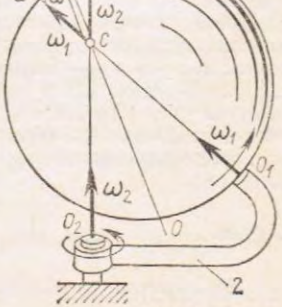


Рис. 1.146

Вектор ω абсолютной угловой скорости направлен вдоль проходящей через точку C пересечения осей O_1a и O_2b прямой Oc, которая и является мгновенной осью вращения тела в результирующем движении.

Итак, *при сложении двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей абсолютная угловая скорость тела равна геометрической сумме угловых скоростей в первом (относительном) и втором (переносном) движениях.*

§ 1.41. ПОНЯТИЕ О ПЛАНЕТАРНЫХ ПЕРЕДАЧАХ. ФОРМУЛА ВИЛЛИСА

Сложение вращательных движений наблюдается в широко применяемых планетарных передачах. Любая планетарная передача состоит из трех групп элементов: центральных колес, колес сателлитов и водил. На рис. 1.147 показаны простейшие планетарные передачи, состоящие из водила h, одного центрального колеса *1* и одного сателлита *2*. Центральные колеса располагаются на неподвижных осях, на этих же осях располагаются водила, несущие оси сателлитов. Сателлиты относительно неподвижной системы отсчета совершают сложное вращательное движение — они вращаются около оси, закрепленной на водиле (относительное движение), и одновременно вместе с водилом вращаются вокруг центральных колес (переносное движение). Движение сателлитов, напоминающее движение планет вокруг Солнца, и определило название таких передач.

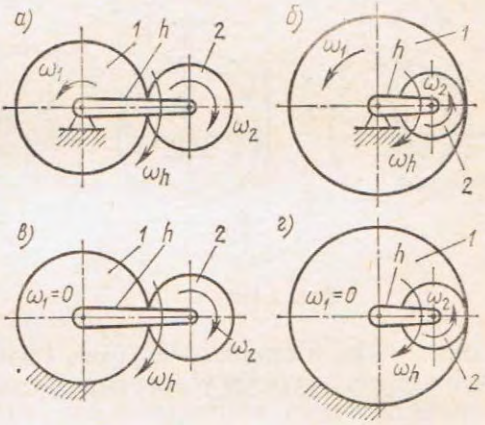


Рис. 1.147

В общем случае центральное колесо и водило могут получать вращение от двух независимых источников. Такая планетарная передача имеет две степени свободы и называется *дифференциальной* (рис. 1.147, *а*, *б*). Если закрепить центральное колесо, то получим передачу с одной степенью свободы — движение можно передавать либо от водила к сателлиту, либо от сателлита к водилу; такая передача называется *простой планетарной* (рис. 1.147, *в*, *г*).

Введем следующие обозначения угловых скоростей элементов планетарных передач: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ — угловые скорости зубчатых колес (центральных или сателлитов) дифференциальных передач; ω_h — угловая скорость водила в дифференциальной передаче; угловые скорости колеса или водила простой планетарной передачи обозначаются теми же буквами, но с верхними индексами, соответствующими номеру закрепленного центрального колеса ($\omega_2^{(1)}$ — угловая скорость второго колеса при закрепленном первом, $\omega_h^{(1)}$ — угловая скорость водила при закрепленном первом колесе).

Аналогично обозначаются и передаточные отношения: u_{1h} — передаточное отношение от колеса *1* к водилу в дифференциальной передаче; $u_{1h}^{(2)}$ — передаточное отношение от колеса *1* к водилу при неподвижном втором колесе; $u_{12}^{(h)}$, $u_{1n}^{(h)}$ — передаточные отношения от колеса *1* к колесу *2* или от колеса *1* к колесу *n* при неподвижном водиле.

При определении передаточных отношений планетарных передач можно использовать метод остановки водила. Рассмотрим этот метод на примере дифференциальной передачи (рис. 1.147, *а*). Пусть в какой-то момент времени угловые скорости колеса *1* — ω_1, сател-

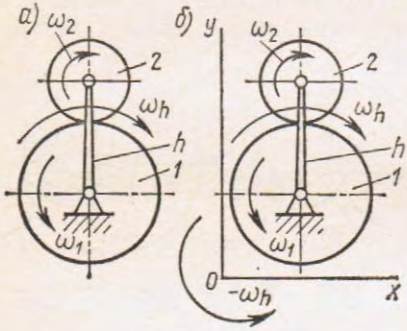


Рис. 1.148

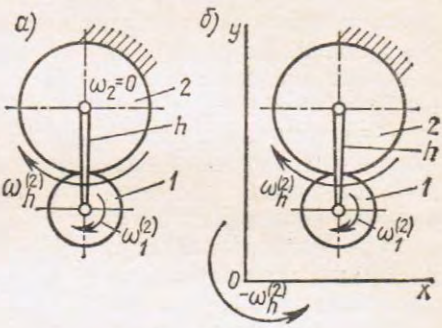


Рис. 1.149

лита *2* — ω_2 и водила — ω_h (рис. 1.148, *а*). Теперь представим, что вся система получила угловую скорость $-\omega_h$, т. е. численно равную скорости водила, но направленную в обратную сторону по отношению к действительному вращению водила (рис. 1.148, *б*), тогда для неподвижного наблюдателя угловая скорость водила станет равной нулю, а угловые скорости центрального колеса и сателлита соответственно получат значения $\omega_1 - \omega_h$ и $\omega_2 - \omega_h$

Таким образом, при остановленном водиле получилась обычная зубчатая передача, для которой передаточное отношение от колеса *1* к колесу *2*

$$u_{12}^{(h)} = (\omega_1 - \omega_h)/(\omega_2 - \omega_h),$$

где в данном случае

$$u_{12}^{(h)} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

Полученное выражение называется *формулой Виллиса.*

Общий вид формулы Виллиса дифференциальной передачи с любым числом центральных колес и сателлитов

$$u_{1n}^{(h)} = (\omega_1 - \omega_h)/(\omega_n - \omega_h), \qquad (1.149)$$

где передаточное отношение $u_{1n}^{(h)}$ определяется по формуле (1.137).

Аналогично, в простой планетарной передаче при неподвижном центральном колесе *2* ($\omega_2 = 0$) действительная угловая скорость колеса *1* $\omega_1^{(2)}$ и водила $\omega_h^{(2)}$ (рис. 1.149, *а*). Если сообщить всей системе

угловую скорость $-\omega_h^{(2)}$ (рис. 1.149, *б*), то скорость водила станет равной $\omega_h^{(2)}-\omega_h^{(2)}=0$, а скорости колес *1* и *2* получат значения соответственно

$$\omega_1^{(2)}-\omega_h^{(2)} \text{ и } -\omega_h^{(2)}.$$

Отсюда передаточное отношение от колеса *1* к колесу *2* при остановленном водиле

$$u_{12}^{(h)}=(\omega_1^{(2)}-\omega_h^{(2)})/-\omega_h^{(2)}=-\omega_1^{(2)}/\omega_h^{(2)}+1=1-u_{1h}^{(2)}.$$

Следовательно, при закрепленном колесе *2* передаточное отношение от колеса *1* к водилу

$$u_{1h}^{(2)}=1-u_{12}^{(h)},$$

где в данном случае $u_{12}^{(h)}=\pm z_2/z_1$.

Общий вид формулы Виллиса простой планетарной передачи при любом числе колес

$$u_{1h}^{n}=1-u_{1n}^{(h)}. \qquad (1.150)$$

Передаточное отношение $u_{1n}^{(h)}$, как и в предыдущем случае, определяется по формуле (1.137).

ДИНАМИКА

Глава 10
ДВИЖЕНИЕ НЕСВОБОДНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 1.42. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

Заключительный раздел теоретической механики — д и н а м и к а — *изучает движение материальных тел под действием сил.* Узнав из кинематики, как могут двигаться материальные точки и твердые тела и как может с течением времени изменяться характер их движения, при изучении динамики узнаем, почему материальные точки (тела) движутся именно так, а не иначе и какие причины приводят к изменению их движения.

В основе динамики лежат следующие аксиомы.

Аксиома 1 (принцип инерции). *Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока приложенные силы не выведут ее из этого состояния.* Это знакомая нам первая аксиома статики (см. § 1.2). Принцип инерции лежит в основе статики и динамики потому, что содержит в себе как аксиому инерции покоя (статика), так и аксиому инерции движения (динамика). Таким образом, если на материальное тело (точку) не действуют никакие силы или действует уравновешенная система сил $\Sigma \boldsymbol{F}_k=0$ и $\Sigma M_0(\boldsymbol{F})=0$, то относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета скорость тела (точки) $\boldsymbol{v}=\text{const}$. Но при $\boldsymbol{v}=0$ имеем состояние покоя, иначе состояние с т а т и ч е с к о г о р а в н о в е с и я, а при $\boldsymbol{v}\neq 0$ (точка дви-

жется равномерно-прямолинейно) — состояние динамического равновесия.

Из первой аксиомы следует, что вывести материальную точку из состояния инерции может только приложенная сила, но из кинематики известно, что начало движения материальной точки из состояния покоя либо нарушение ее прямолинейного или равномерного движения связано с возникновением ускорения. Зависимость между внешней силой, действующей на материальную точку, и возникшим вследствие этого ускорением устанавливает аксиома 2.

Аксиома 2 (основной закон динамики). *Ускорение* $\boldsymbol{a}$ *материальной точки пропорционально действующей силе* $\boldsymbol{F}$ *и направлено по той прямой, по которой действует эта сила* (рис. 1.150). Математически вторая аксиома записывается векторным равенством

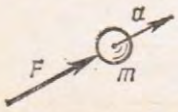


Рис. 1.150

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{1.151}$$

где коэффициент пропорциональности m выражает меру инертности материальной точки и называется ее массой. В Международной системе единиц (СИ) масса выражается в килограммах.

Зависимость между числовыми значениями (модулями) силы и ускорения выражается равенством

$$F = ma. \tag{1.152}$$

На все материальные тела вблизи Земли действует сила тяжести $\boldsymbol{G}$ и при свободном падении на Землю тела любой массы m приобретают одно и то же ускорение g, которое называется ускорением свободного падения. Для свободно падающего тела из уравнения (1.152) следует зависимость

$$G = mg. \tag{1.153}$$

Таким образом, *значение силы тяжести тела в ньютонах равно произведению его массы на ускорение свободного падения.*

Значение g зависит от географической широты местности и высоты над уровнем моря. В среднем $g=9{,}81$ м/с², а для приближенных расчетов можно принимать $g \approx 10$ м/с².

Аксиома 3 (закон независимости действия сил). *Если к материальной точке приложена система сил, то движение этой точки складывается из тех движений, которые точка могла бы иметь под действием каждой силы в отдельности.*

Таким образом, при одновременном действии на материальную точку массой m, например, четырех сил (рис. 1.151) ускорение $\boldsymbol{a}$, полученное точкой, можно определить, геометрически сложив ускорения $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_4$, возникшие под действием каждой силы в отдельности. В то же время ускорение $\boldsymbol{a}$ пропорционально равнодействующей $\boldsymbol{F}_\Sigma$ тех же сил:

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = m\boldsymbol{a}, \tag{1.154}$$

где $\boldsymbol{F}_\Sigma = \Sigma \boldsymbol{F}_k$ и $\boldsymbol{a} = \Sigma \boldsymbol{a}_k$.

Аксиома 4 — это известная из статики (см. § 1.2) *аксиома* 5 (закон равенства действия и противодействия), которую применительно к материальным точкам сформулируем так: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны.*

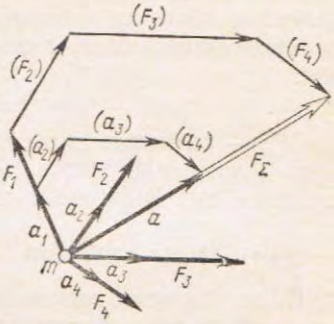


Рис. 1.151

Четвертая аксиома в динамике имеет важное значение. Следует ясно представлять себе, что силы взаимодействия между двумя материальными точками не уравновешивают друг друга, так как одна сила приложена к одной точке, а вторая к другой. Согласно аксиоме 2, каждая из этих сил сообщает ускорение той материальной точке, на которую действует. Таким образом, все ускорения материальных точек относительно неподвижной (инерциальной) системы отсчета есть результат взаимодействия материальных точек, а в общем случае — результат взаимодействия материальных тел.

С помощью изложенных выше четырех аксиом и решаются все задачи динамики материальной точки, а также задачи динамики системы материальных точек, в частности динамики твердого тела.

§ 1.43. СВОБОДНАЯ И НЕСВОБОДНАЯ ТОЧКИ

Материальная точка, движение которой в пространстве не ограничено наложенными связями, называется свободной. Примером свободной материальной точки может служить искусственный спутник Земли в околоземном пространстве или летящий самолет. Их перемещение в пространстве ничем не ограничено, и, в частности, поэтому летчик на спортивном самолете способен проделывать различные сложные фигуры высшего пилотажа. Для свободной материальной точки задачи динамики сводятся к двум основным: 1) задается закон движения точки, требуется определить действующую на нее силу или систему сил (первая задача динамики); 2) задается система сил, действующая на точку, требуется определить закон движения (вторая задача динамики). Обе задачи динамики решаются с помощью основного закона динамики, записанного в форме (1.151) или (1.154).

Материальная точка, свобода перемещения которой ограничена наложенными связями, называется несвободной. Примером несвободной материальной точки может служить движущийся по рельсам трамвай (если пренебречь его формой и размерами). Для несвободной материальной точки все внешние силы необходимо делить на две категории: 1) активные (движущие) силы и 2) реакции связи (пассивные силы). В связи с этим первая задача динамики несвободной точки сводится к определению реакций связей,

если заданы закон движения точки и действующие на нее активные силы; вторая задача динамики сводится к тому, чтобы, зная действующие на точку активные силы, определить, во-первых, закон движения точки и, во-вторых, реакции связей.

Если несвободную материальную точку освободить от связей и заменить связи их реакциями, то движение точки можно рассматривать как свободное, а основному закону динамики придать такой вид:

$$\sum \boldsymbol{F}_k + \sum \boldsymbol{R}_k = m\boldsymbol{a}, \qquad (1.155)$$

где $\boldsymbol{F}_k$ — активные силы, $\boldsymbol{R}_k$ — реакции связей, m — масса точки и $\boldsymbol{a}$ — ускорение точки, полученное в результате действия всех внешних сил (активных и пассивных).

§ 1.44. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Сила, численно равная произведению массы материальной точки на приобретенное ею ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется силой инерции. Иначе говоря (рис. 1.152), сила инерции

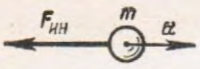


Рис. 1.152

$$\boldsymbol{F}_{ин} = -m\boldsymbol{a}. \qquad (1.156)$$

Сила инерции в действительности не приложена к получившей ускорение материальной точке, а действует на точку или тело, которое сообщает ускорение этой точке.

Поясним это обстоятельство несколькими примерами.

Тяжелый груз, масса которого m, висит на непрочной нити, но способной выдержать натяжение $R=G$ (рис. 1.153, *а*); если теперь

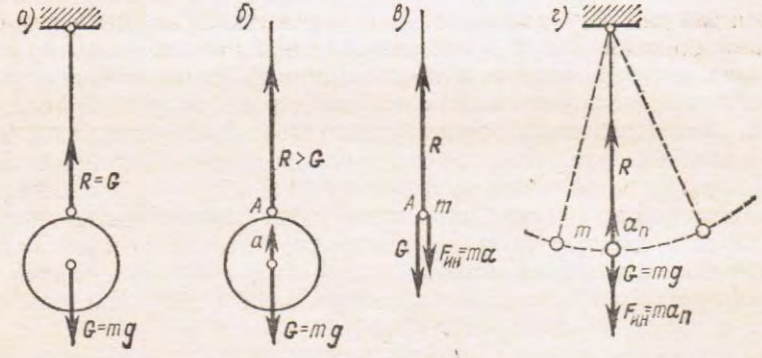


Рис. 1.153

резко потянуть нить вертикально вверх, то нить может оборваться (рис. 1.153, *б*). В этом случае натяжение нити, численно равное ее реакции R, увеличивается, так как помимо силы тяжести груза $G=mg$ на нить начинает действовать дополнительная сила инерции $\boldsymbol{F}_{ин}$, численно равная ma (рис. 1.153, *в*), выражающая противодей-

ствие груза выходу его из состояния инерции. Нить может оборваться и в том случае, если толкнуть в горизонтальном направлении подвешенный груз (рис. 1.153, *г*), заставив его раскачиваться на нити.

При криволинейном движении материальной точки у нее возникает ускорение $\boldsymbol{a}$, которое обычно (см. § 1.28) заменяют двумя составляющими ускорениями: $\boldsymbol{a}_n$ (нормальное ускорение) и $\boldsymbol{a}_t$ (касательное ускорение). Поэтому при криволинейном движении материальной точки возникают две составляющие силы инерции $\boldsymbol{F}_{\text{ин}}$ (рис. 1.154): нормальная (иначе центробежная) сила инерции

$$\boldsymbol{F}_{\text{ин}\,n} = -m\boldsymbol{a}_n \qquad (1.157)$$

и касательная (иначе тангенциальная) сила инерции

$$\boldsymbol{F}_{\text{ин}\,t} = -m\boldsymbol{a}_t. \qquad (1.158)$$

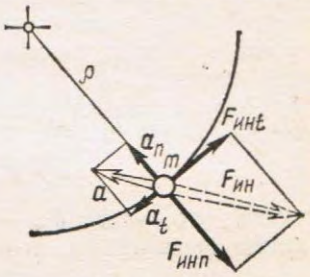


Рис. 1.154

В дальнейшем с нормальной силой инерции будем часто встречаться в ходе решения задач.

Так как значение нормального ускорения определяется формулами (1.87) или (1.129), значение нормальной силы инерции определяют по формулам

$$F_{\text{ин}\,n} = mv^2/\rho, \qquad (1.159)$$

или

$$F_{\text{ин}\,n} = m\omega^2\rho. \qquad (1.160)$$

Рассмотрим еще один пример. Всем известно явление, когда при резком трогании с места автобуса или вагона метро пассажиры отклоняются назад по ходу движения и, наоборот, при резком тормо-

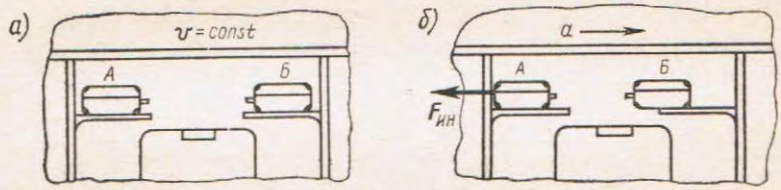


Рис. 1.155

жении отклоняются вперед. Объясним это явление на примере чемоданов *А* и *Б*, «спокойно» лежащих на двух противоположных полках купе вагона (рис. 1.155, *а*) до тех пор, пока вагон пребывает в состоянии инерции (в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения). Если же вагон получил ускорение $\boldsymbol{a}$, направленное вправо, то правый чемодан *Б* может упасть с полки (рис. 1.155, *б*), так как из-за инерции чемодана полка вагона, получив-

шая вместе с вагоном ускорение a, «выскользнет» из-под чемодана. Чемодану A мешает упасть стенка вагона и чемодан A начинает давить на нее с силой инерции $F_{ин}=-ma$.

§ 1.45. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Силы инерции широко используются при расчетах и решении многих технических задач, причем использование сил инерции позволяет свести к знакомым нам уравнениям статики решение многих задач, в которых рассматривается движение несвободной материальной точки.

Переписав векторное уравнение (1.155) для несвободной материальной точки (см. § 1.43):

$$\sum F_k+\sum R_k+(-ma)=0,$$

видим, что $-ma=F_{ин}$ — сила инерции. Поэтому равенству (1.155) может быть придан вид

$$\sum F_k+\sum R_k+F_{ин}=0. \qquad (1.161)$$

Прикладывая условно силу инерции $F_{ин}$ к движущейся материальной точке, можем считать, что *активные силы* F_k, *реакции связей* R_k *и сила инерции* $F_{ин}$ *образуют уравновешенную систему* (принцип **Даламбера**).

Решение задач динамики с помощью принципа Даламбера иногда называют **методом кинетостатики**. Познакомимся с ним на конкретном примере.

Пример 1.25. Шарик A массой $m=0{,}2$ кг на нити AB длиной $l=0{,}5$ м (рис. 1.156, *а*) вращается равномерно в горизонтальной плоскости так, что нить образует коническую поверхность, наклоненную к горизонту под углом $\alpha=30^\circ$. Определить натяжение нити и скорость шарика.

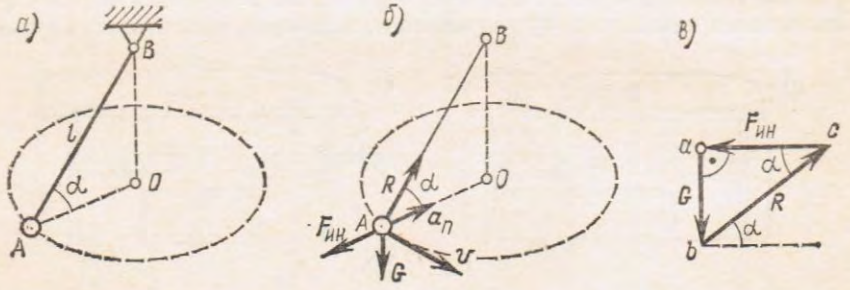


Рис. 1.156

Решение. 1. Материальная точка A движется равномерно по окружности радиуса $AO=r=l\cos\alpha$; следовательно, ускорение a_n точки направлено от A к O (рис. 1.156, *б*).

2. На точку A действуют: активная сила тяжести $G=mg$, направленная вертикально вниз, и реакция R нити, направленная вдоль нити от A к B.

3. Добавим к этим силам силу инерции $F_{ин}$, направив ее по OA в сторону, противоположную ускорению a_n. Тогда, согласно принципу Даламбера, $G+R+$

$+F_{ин}=0$, т. е. при любом положении точки A на траектории эти три силы образуют замкнутый $\triangle abc$ (рис. 1.156, *в*), где $\vec{ab}=\boldsymbol{G}$, $\vec{bc}=\boldsymbol{R}$ и $\vec{ca}=\boldsymbol{F}_{ин}$, $\widehat{bac}=90°$, $\widehat{acb}=\alpha=30°$.

4. Из $\triangle abc$ находим

$$R=G/\sin\alpha=mg/\sin\alpha=0{,}2\cdot 9{,}8/\sin 30°\ \text{Н}=3{,}92\ \text{Н};$$
$$F_{ин}=G/\operatorname{tg}\alpha=mg/\operatorname{tg}\alpha=0{,}2\cdot 9{,}8/\operatorname{tg}30°\ \text{Н}=3{,}4\ \text{Н}.$$

Из формулы $F_{ин}=mv^2/\rho$, имея в виду, что $\rho=r=l\cos\alpha$, находим скорость точки:

$$v=\sqrt{F_{ин}l\cos\alpha/m}=\sqrt{3{,}4\cdot 0{,}5\cdot\cos 30°/0{,}2}=2{,}72\ \text{м/с}.$$

5. Таким образом, нить натянута с силой 3,92 Н и скорость движения точки 2,42 м/с.

Глава 11
РАБОТА И МОЩНОСТЬ

§ 1.46. РАБОТА ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ПЕРЕМЕЩЕНИИ

Если при действии постоянной силы $\boldsymbol{F}$ на точку M ее перемещение $\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{s}$ (рис. 1.157), то *скалярная мера действия силы называется* работой и определяется по формуле

$$W=Fs\cos\alpha, \qquad (1.162)$$

где α — угол между направлением действия силы и направлением перемещения. В СИ работа выражается в джоулях:

$$1\ \text{Дж}=1\ \text{Н}\cdot 1\ \text{м}=1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2.$$

Так как джоуль — единица сравнительно небольшая, часто используют кратные единицы: килоджоуль (1 кДж$=10^3$ Дж) или мегаджоуль (1 МДж$=10^6$ Дж).

Из формулы (1.162) видно, что работа — величина алгебраическая. При изменении угла α в пределах $0°<\alpha<90°$ значение $\cos\alpha>0$. Поэтому если угол α — острый, то работа силы $\boldsymbol{F}$ — положительная. В частном случае, когда направление действия силы совпадает с направлением перемещений ($\alpha=0$), $\cos\alpha=\cos 0°=1$ и

$$W=Fs. \qquad (1.163)$$

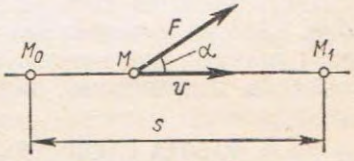


Рис. 1.157

При изменении угла α в пределах $90°<\alpha<180°$ значение $\cos\alpha<0$, и, следовательно, если угол α — тупой, то работа силы $\boldsymbol{F}$ — отрицательная. В частном случае при $\alpha=180°$ $\cos\alpha=\cos 180°=-1$ и

$$W=-Fs. \qquad (1.164)$$

Силы, производящие положительную работу, называются движущими, *а производящие отрицательную работу* — силами сопротивления.

Заметим, что при $\alpha=90°$ значение $\cos\alpha=\cos 90°=0$ и $W=0$, т. е. *работа силы, направленной перпендикулярно перемещению точки, равна нулю.*

Рассмотренные выше три частных случая значений работы силы при $\alpha=0°$, $\alpha=180°$, $\alpha=90°$ аналогичны значениям работы силы тяжести. Как известно из физики, работа силы тяжести не зависит от траектории движения точки и всегда равна произведению силы тяжести на разность высот в исходном и конечном положениях. Если точка M перемещается из положения M_1 в положение M_2, то при любой траектории точки работа силы тяжести

$$W = Gh = G(h_1 - h_2), \qquad (1.165)$$

где h_1 — начальная высота точки над заданным уровнем на Земле, а h_2 — конечная высота над тем же уровнем.

При движении точки вниз (рис. 1.158, *а*) работа силы тяжести положительна, так как $h_1>h_2$ и $h=h_1-h_2>0$. В этом случае сила тяжести действует как движущая сила.

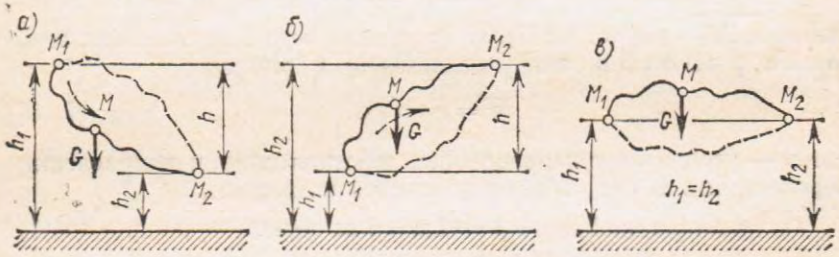


Рис. 1.158

При движении точки вверх (рис. 1.158, *б*) работа силы тяжести отрицательна, так как теперь $h_1<h_2$ и $h=h_1-h_2<0$. В этом случае сила тяжести действует как сила сопротивления.

При движении точки из начального и конечного положений (рис. 1.158, *в*), находящихся на одном уровне ($h=h_1-h_2=0$), работа силы тяжести равна нулю. Этот случай аналогичен перемещению точки по направлению, перпендикулярному действию силы.

§ 1.47. РАБОТА РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЫ

Если на точку действует одновременно несколько сил, то алгебраическая сумма их работ равна работе равнодействующей силы.

Допустим, что перемещение точки $\overrightarrow{M_0M_1}=\boldsymbol{s}$ произошло при действии на нее трех сил: $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\boldsymbol{F}_3$ (рис. 1.159). Тогда, обозначив работу каждой из сил соответственно W_1, W_2 и W_3, можем записать: $W_1=F_1\cos\alpha_1\cdot s$, $W_2=F_2\cos\alpha_2\cdot s$ и $W_3=F_3\cos\alpha_3\cdot s$.

Сложив правые и левые части этих равенств, получим

$$W_1+W_2+W_3=(F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2+F_3\cos\alpha_3)\,s.$$

Известно (см. § 1.6), что сумма проекций сил на некоторую ось равна проекции равнодействующей этих сил на ту же ось (в данном случае на ось, проходящую через точки M_0 и M_1). Следовательно,

$$F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2+F_3\cos\alpha_3=F_\Sigma\cos\alpha.$$

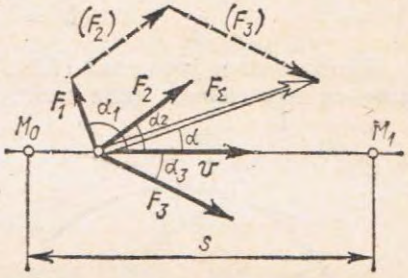


Рис. 1.159

Таким образом,

$$W_1+W_2+W_3=F_\Sigma\cos\alpha s.$$

Так как $F_\Sigma\cos\alpha\cdot s=W_\Sigma$ и есть работа равнодействующей силы $\boldsymbol{F}_\Sigma=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$, то

$$W_1+W_2+W_3=W_\Sigma$$

или в общем случае для любого числа сил

$$\sum W_k=W_\Sigma. \qquad (1.166)$$

При равномерном прямолинейном движении точки приложенная к ней система сил уравновешена (первая аксиома динамики), т. е. $\boldsymbol{F}_\Sigma=0$, и тогда

$$\sum W_k=0 \qquad (1.167)$$

— алгебраическая сумма работ уравновешенной системы сил, приложенных к точке, равна нулю.

§ 1.48. РАБОТА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ ПУТИ

Чтобы определить работу непостоянной силы $\boldsymbol{F}$ при перемещении точки M по криволинейной траектории из положения M_0 в положение M_1 (рис. 1.160, *а*), поступим следующим образом. Дугу M_0M_1 траектории разделим на множество частей ds настолько малых, что каждую из них можно считать отрезком прямой. Тогда по формуле (1.162) работа силы $\boldsymbol{F}$ на перемещении $\vec{ds}$, так называемая элементарная работа,

$$dW=F\cos\alpha\,ds. \qquad (1.168)$$

Просуммировав все элементарные работы переменной силы $\boldsymbol{F}$, получим ее работу на участке траектории от M_0 до M_1:

$$W=\int_{M_0}^{M_1}F\cos\alpha\,ds. \qquad (1.169)$$

Разложив силу $\boldsymbol{F}$ на составляющие $\boldsymbol{F}_n$ и $\boldsymbol{F}_t$ (рис. 1.160, *б*), направленные соответственно по нормали и касательной, увидим, что в формуле (1.169) произведение $F\cos\alpha$ выражает модуль касательной составляющей силы $\boldsymbol{F}$, т. е. $F_t = F\cos\alpha$, и формуле (1.169) можем придать вид

$$W = \int_{M_0}^{M_1} F_t\,ds. \qquad (1.170)$$

Интегралы в формулах (1.169) и (1.170) могут быть определены лишь в том случае, если известен закон движения точки. Иначе

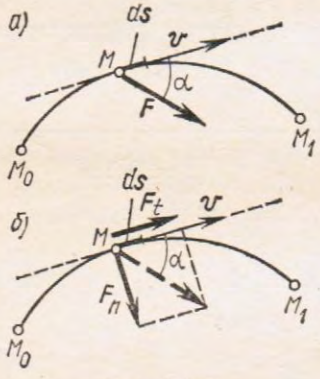


Рис. 1.160

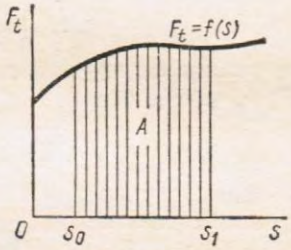


Рис. 1.161

говоря, если задана переменная сила, то предварительно необходимо определить закон движения точки, а уже потом находить работу силы.

В тех случаях, когда известна зависимость между касательной составляющей $\boldsymbol{F}_t$ и перемещением s точки приложения силы, работа может быть определена графическим способом.

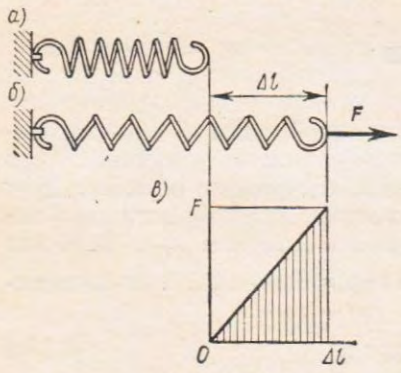


Рис. 1.162

Отложив по оси абсцисс расстояния точки от некоторого начального положения s_0, а по оси ординат — соответствующие этим расстояниям значения F_t (рис. 1.161), получим график работы силы $\boldsymbol{F}$

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F_t\,ds, \qquad (1.171)$$

изображаемый заштрихованной площадью.

Известно, например, что при растяжении пружины (рис. 1.162, *а*, *б*) модуль силы изменяется пропорционально ее удлинению, т. е.

$$F = C\Delta l, \qquad (1.172)$$

где коэффициент пропорциональности C называется жесткостью пружины и выражается в Н/м, Н/см или Н/мм. Эта зависимость графически выражается отрезком прямой, проходящей через начало осей координат (Δl, F) (рис. 1.162, *в*), и тогда с учетом масштабов по осям при растяжении пружины на Δl работа силы $\boldsymbol{F}$

$$W = F\Delta l/2. \qquad (1.173)$$

Если заменить по формуле (1.172) Δl на F/C, то получим

$$W = F^2/(2C). \qquad (1.174)$$

§ 1.49. МОЩНОСТЬ

Скалярная величина

$$P = W/t, \qquad (1.175)$$

характеризующая *быстроту выполнения работы, называется* **средней мощностью** *силы.*

В СИ мощность выражается в ваттах:

$$1\ \text{Вт} = 1\ \text{Дж}/1\ \text{с} = (1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2)/1\ \text{с} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^3.$$

Часто употребляются кратные единицы — киловатт (1 кВт$=10^3$ Вт) и мегаватт (1 МВт$=10^6$ Вт).

Подставив в формулу (1.175) значение работы из формулы (1.162), получим

$$P = F\cos\alpha\cdot s/t = F\cos\alpha\cdot v. \qquad (1.176)$$

Формула (1.175) выражает среднюю мощность силы ($P_{ср}$) за некоторый промежуток времени $t=t_1—t_2$ и тогда в формуле (1.176) $s/t=v_{ср}$ — средняя скорость точки. Если с течением времени сила сохраняла постоянное значение, то средняя мощность $P_{ср}=P=$ $=$const.

По формуле (1.176) можно определить мощность переменной силы в любой момент времени, если в этот момент известны значения $F_t=F\cos\alpha$ и $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$.

§1.50. МЕХАНИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

В технике работа сил обычно связана с преодолением различных сопротивлений. Для выполнения этой работы создается множество разнообразных машин и механизмов. Силы сопротивления $\boldsymbol{F}_c$, которые преодолевает любая машина (механизм), можно разделить на две группы: сопротивления, для преодоления которых машина или механизм и предназначены, и которые условно назовем *полезными сопротивлениями* $\boldsymbol{F}_{п.с}$, и так называемые *вредные сопротивления* $\boldsymbol{F}_{в.с}$, которые машине (механизму) приходится вынужденно преодолевать попутно с полезными. Работу по преодолению полезных сопротивлений назовем полезной и обозначим $W_{п.с}$. Работу по преодолению вредных сопротивлений обозначим $W_{в.с}$.

Тогда вся работа, совершаемая машиной или механизмом, $W=W_{п.с}+W_{в.с}$, отсюда $W_{п.с}=W-W_{в.с}$.

Отношение полезной работы ко всей совершенной работе называется механическим коэффициентом полезного действия (к. п. д.) и обозначается η. Таким образом,

$$\eta=W_{п.с}/W \text{ или } \eta=(W_{п.с}/W)\,100\%. \qquad (1.177)$$

Подставив в первую из этих формул вместо полезной работы ее значение $W_{п.с}=W-W_{в.с}$, получим

$$\eta=(W-W_{в.с})/W=1-W_{в.с}/W. \qquad (1.178)$$

Из формулы (1.178) видно, что к. п. д. тем ближе к единице, чем меньше дробь $W_{в.с}/W$, т. е. чем меньше работа по преодолению вредных сопротивлений. Если в формуле (1.177) числитель и знаменатель разделить на t — время, в течение которого работает машина (механизм), то получим формулу к. п. д., выраженную через отношение мощностей:

$$\eta=P_п/P. \qquad (1.179)$$

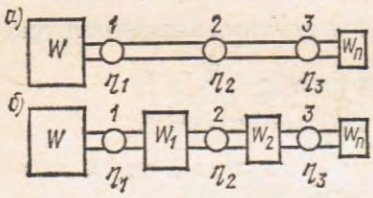


Рис. 1.163

В технике распространены случаи работы машин или механизмов при их *последовательном соединении* друг с другом. В таких случаях важно знать зависимость их общего к. п. д. от коэффициентов полезного действия отдельных машин (механизмов). Допустим, имеем совокупность трех механизмов (рис. 1.163, *а*) с коэффициентами полезного действия η_1, η_2 и η_3. Если работа, совершаемая механизмами, W, а их полезная работа $W_{п.с}$, то к. п. д. всей цепочки механизмов

$$\eta=W_{п.с}/W. \qquad (а)$$

Некоторую часть всей работы W составляет работа по преодолению вредных сопротивлений в самих механизмах. Поэтому полезная работа, совершаемая первым механизмом (рис. 1.163, *б*), $W_1=W\eta_1$, совершаемая вторым механизмом — $W_2=W_1\eta_2$ и третьим — $W_3=W_2\eta_3$, исходя из того, что к. п. д. первого механизма $\eta_1=W_1/W$, к. п. д. второго механизма $\eta_2=W_2/W_1$ и к. п. д. третьего механизма $\eta_3=W_{п.с}/W_2$.

Перемножив левые и правые части этих равенств, получим

$$\eta_1\eta_2\eta_3=(W_1/W)\,(W_2/W_1)\,(W_{п.с}/W_2)=W_{п.с}/W. \qquad (б)$$

Сопоставив равенства (а) и (б), видим, что

$$\eta=\eta_1\eta_2\eta_3.$$

Ясно, что эта зависимость справедлива для любого конечного числа последовательно соединенных механизмов, т. е.

$$\eta=\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots\eta_n \qquad (1.180)$$

— при последовательном соединении механизмов (машин) их общий к. п. д. равен произведению отдельных к. п. д.

В частном случае, если $\eta_1=\eta_2=\ldots=\eta_k=\ldots=\eta_n$, общий к. п. д.

$$\eta=\eta_k^n. \qquad (1.181)$$

Из формул (1.180) и (1.181) следует: чем длиннее «цепочка» совместно работающих механизмов, тем меньше ее общий к. п. д., причем общий к. п. д. всегда меньше самого низкого из числа перемножаемых к. п. д.

§ 1.51. РАБОТА СИЛ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Пусть требуется поднять на высоту h груз, сила тяжести которого $\boldsymbol{G}$. Предположим, что подъем осуществляется тремя способами (рис. 1. 164): *1* — вертикально; *2* — по наклонной плоскости с углом подъема α и *3* — по менее крутой плоскости с углом подъема β ($\beta<\alpha$). Если считать, что груз перемещается равномерно и без трения, то работа по подъему груза во всех трех случаях совершена одинаковая — она равна Gh (см. § 1.46). Но в первом случае приходится преодолевать силу тяжести G, во втором случае — силу $G_\alpha=G\sin\alpha$ и в третьем — силу $G_\beta=G\sin\beta$; при $\alpha>\beta$ $\sin\alpha>\sin\beta$ и, значит, $G>G\sin\alpha>G\sin\beta$.

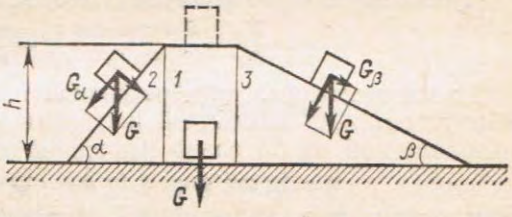


Рис. 1.164

Наклонная плоскость как одно из средств получения выигрыша в силе при перемещении тяжестей широко используется в технике. Например, любой винт можно рассматривать как наклонную плоскость, намотанную на цилиндр. В реальных условиях при перемещении грузов по наклонной плоскости необходимо учитывать трение (см. § 1.17).

Рассмотрим два случая работы силы $\boldsymbol{F}$ на наклонной плоскости.

Сила $\boldsymbol{F}$ направлена параллельно наклонной плоскости (рис. 1.165, *а*). При перемещении вверх по наклонной плоскости тела M на него кроме силы $\boldsymbol{F}$ действуют еще три силы (рис. 1.165, *б*): сила тяжести $\boldsymbol{G}$; нормальная реакция наклонной плоскости $\boldsymbol{R}_n$, значение которой $R_n=G\cos\alpha$; сила трения $\boldsymbol{R}_f$, значение которой [см. формулу (1.42)] $R_f=fR_n=fG\cos\alpha$.

При равномерном подъеме тела M четыре силы образуют уравновешенную систему (аксиома 1), значит, согласно формуле (1.167), алгебраическая сумма работ этих сил равна нулю:

$$W_F+W_G+W_{R_f}+W_{R_n}=0,$$

откуда работа силы $\boldsymbol{F}$

$$W_F=-W_G-W_{R_f}-W_{R_n};$$

где работа силы тяжести $W_G = Gs\cos(\alpha+90°) = -Gs\sin\alpha$; работа силы трения $W_{Rf} = R_f s\cos 180° = -R_f s = -fGs\cos\alpha$; работа нормальной реакции $W_{R_n} = R_n s\cos 90° = 0$.

Подставив найденные значения работ сил в последнее равенство, получим работу, совершенную силой $\boldsymbol{F}$:

$$W_F = Gs(\sin\alpha + f\cos\alpha). \qquad (1.182)$$

Заменив в этой формуле коэффициент трения f его значением $f = \operatorname{tg}\varphi_0 = \sin\varphi_0/\cos\varphi_0$, где φ_0 — угол трения, придадим формуле (1.182) несколько иной вид:

$$W_F = Gs\sin(\alpha+\varphi_0)/\cos\varphi_0. \qquad (1.183)$$

Если же требуется определить значение силы F, то с учетом того, что $W_F = Fs$, из формул (1.182) и (1.183) получим

$$F = W_F/s = G(\sin\alpha + f\cos\alpha) = G\sin(\alpha+\varphi_0)/\cos\varphi_0. \qquad (1.184)$$

Полезную часть работы силы $\boldsymbol{F}$ составляет работа по подъему тела на высоту $h = s\sin\alpha$, т. е. $W_п = Gh = Gs\sin\alpha$.

Таким образом, по формуле (1.173) к. п. д. наклонной плоскости

$$\eta = \frac{W_п}{W_F} = \frac{Gs\sin\alpha\cdot\cos\varphi_0}{Gs\sin(\alpha+\varphi_0)} = \frac{\sin\alpha\cos\varphi_0}{\sin(\alpha+\varphi_0)}.$$

После несложных преобразований получим окончательный вид формулы к. п. д. наклонной плоскости при подъеме груза силой, направленной параллельно наклонной плоскости:

$$\eta = \operatorname{tg}\alpha/(\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}\alpha/(f + \operatorname{tg}\alpha). \qquad (1.185)$$

Как видим, к. п. д. наклонной плоскости зависит только от ее угла подъема и коэффициента трения при перемещении груза по плоскости.

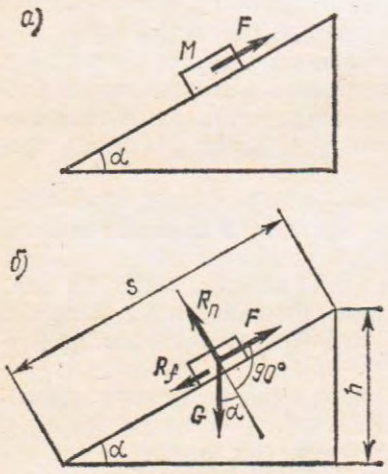


Рис. 1.165

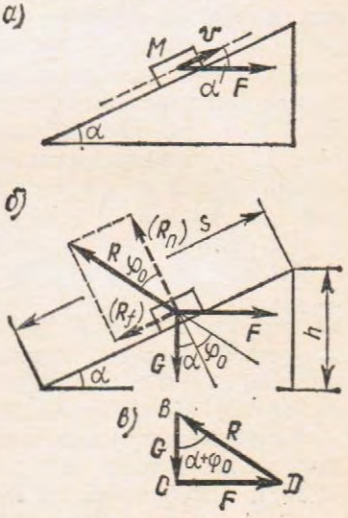


Рис. 1.166

Сила $\boldsymbol{F}$ направлена горизонтально (рис. 1.166, *а*). И в этом случае на тело M действуют четыре силы: движущая сила $\boldsymbol{F}$, сила

тяжести $\boldsymbol{G}$, нормальная реакция наклонной плоскости $\boldsymbol{R}_n$ и сила трения $\boldsymbol{R}_f$. Чтобы упростить задачу, силы $\boldsymbol{R}_n$ и $\boldsymbol{R}_f$ заменим их равнодействующей $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_n+\boldsymbol{R}_f$ (рис. 1.166, *б*). При равномерном перемещении тела M по наклонной плоскости уравновешенная система сил $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{R}$ образует замкнутый треугольник BCD (рис. 1.166, *в*), в котором $\widehat{BCD}=90°$ и $\widehat{CBD}=\alpha+\varphi_0$. Поэтому

$$F = G \operatorname{tg}(\alpha+\varphi_0)\,^*. \tag{1.186}$$

И, следовательно, работа силы $\boldsymbol{F}$ на наклонной плоскости длиной s

$$W_F = Fs\cos\alpha = Gs\operatorname{tg}(\alpha+\varphi_0)\cos\alpha. \tag{1.187}$$

Полезная часть этой работы, как и в предыдущем случае, $W_п = Gh = Gs\sin\alpha$, а к. п. д. наклонной плоскости при подъеме груза горизонтальной силой

$$\eta = W_п/W_F = Gs\sin\alpha/[Gs\operatorname{tg}(\alpha+\varphi_0)\cos\alpha]$$

или окончательно

$$\eta = \operatorname{tg}\alpha/\operatorname{tg}(\alpha+\varphi_0). \tag{1.188}$$

§ 1.52. РАБОТА И МОЩНОСТЬ ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ

Допустим, что к рукоятке C колеса, насаженного на ось Oz, приложена сила $\boldsymbol{F}$, постоянно направленная перпендикулярно $CO=r$ (рис. 1.167, *а*). При вращении колеса точка приложения

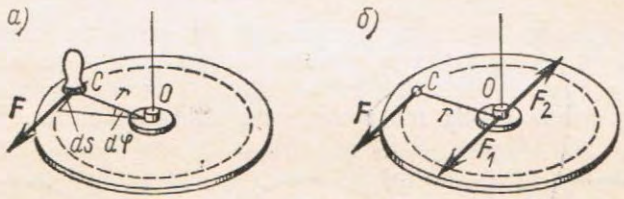


Рис. 1.167

силы $\boldsymbol{F}$ перемещается по окружности и элементарная работа

$$dW = F\,ds.$$

Но так как $ds=r\,d\varphi$, то $dW=Fr\,d\varphi$, где произведение $Fr=M_z$ называется вращающим моментом. Следовательно, при вращении тела элементарная работа

$$dW = M_z\,d\varphi. \tag{1.189}$$

При повороте колеса на угол $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ работа

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z\,d\varphi. \tag{1.190}$$

* В первом случае формулу (1.184) можно получить также из силового треугольника, построенного на силах $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_n+\boldsymbol{R}_f$ (см. рис. 1.165).

Если при этом вращающий момент $M_z = \text{const}$, то

$$W = M_z \varphi \tag{1.191}$$

— работа при вращении тела равна произведению вращающего момента на угол поворота φ.

Следует заметить, что вращение тела обусловлено появлением пары сил ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_2$). Сила $\boldsymbol{F}$, действуя на тело, прижимает его к оси (сила $\boldsymbol{F}_1$ на рис. 1.167, *б*), а возникающая реакция $\boldsymbol{F}_2$ оси вместе с силой $\boldsymbol{F}$ образуют пару сил с моментом $M_z = Fr$, которая и приводит тело во вращение. Разделив обе части равенства (1.191) на $t = t_2 - t_1$ — время действия вращающего момента, получим его мощность:

$$P = W/t = M_z \varphi / t, \tag{1.192}$$

или, так как $\varphi/t = \omega$,

$$P = M_z \omega \tag{1.193}$$

— мощность при вращении тела равна произведению вращающего момента на угловую скорость.

Из последней формулы вытекает важное следствие:

$$M_z = P/\omega \tag{1.194}$$

— при постоянной мощности вращающий момент обратно пропорционален угловой скорости.

§ 1.53. ТРЕНИЕ КАЧЕНИЯ. РАБОТА ПРИ КАЧЕНИИ ТЕЛ

Трением качения называется сопротивление, возникающее при перекатывании тела по поверхности другого. Возникновение сопротивления при перекатывании тела происходит из-за деформирования обоих тел в месте их взаимодействия. Допустим,

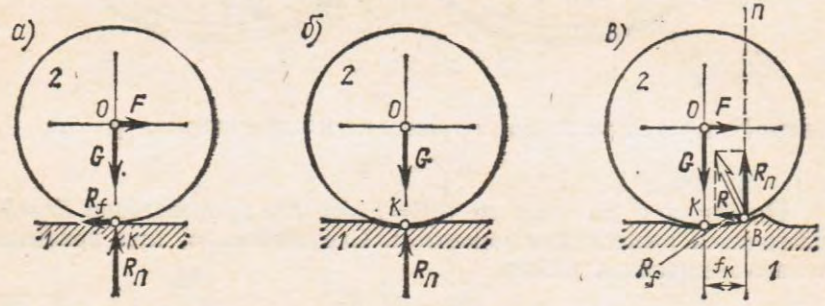


Рис. 1.168

что тело *1* и поставленный на него каток *2* абсолютно недеформируемы и местом их соприкосновения будет перпендикулярная плоскости рис. 1.168, *а* линия, проходящая через точку K. Если теперь приложить к оси катка любую сколь угодно малую силу $\boldsymbol{F}$,

то она вместе с силой трения $\boldsymbol{R}_f$, приложенной к катку в точке K, образует пару $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R}_f)$, под действием которой каток начнет катиться.

На самом деле абсолютно недеформируемых тел нет. Поэтому тело *1* и поставленный на нее каток *2* в области точки K несколько деформируются (рис. 1.168, *б*). При перекатывании катка силой $\boldsymbol{F}$ деформация смещается вперед по направлению качения и место приложения полной реакции $\boldsymbol{R}$ (рис. 1.168, *в*) опорной поверхности смещается также несколько вперед на длину $f_к$ относительно теоретической точки касания K и отклоняется от нормали Bn на небольшой угол.

Разложив реакцию $\boldsymbol{R}$ на составляющие $\boldsymbol{R}_n$ и $\boldsymbol{R}_f$, видим, что при качении катка на него действуют четыре силы, образующие две пары сил: движущую пару $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R}_f)$ с моментом $|Fr|$ и пару сопротивления качению (G, R_n) с моментом $|R_n f_к|$. Момент пары сопротивления иначе называют *моментом трения качения*, а величину $f_к$ — *коэффициентом трения качения*. Значение $f_к$ зависит от материала тел и выражается обычно в сантиметрах. Например, для мягкой стали по стали $f_к=0{,}005$ см, а для закаленной стали по стали (подшипники качения) $f_к=0{,}001$ см. Качение катка *2* начинается тогда, когда момент движущей пары достигнет предельного значения момента трения качения, определяемого значением $f_к$ для данной пары тел, т. е. при условии

$$Fr \geqslant R_n f_к.$$

Отсюда необходимая для перекатывания катка сила

$$F \geqslant (f_к/r)\, R_n. \qquad (1.195)$$

Зная силу F, легко найти ее работу при равномерном перекатывании катка на расстоянии s по формуле (1.163):

$$W = Fs = (f_к/r)\, R_n s. \qquad (1.196)$$

Работу силы $\boldsymbol{F}$ при качении тела можно определять и по формуле (1.191). В этом случае качение тела следует рассматривать как вращение около мгновенной оси, проходящей через точку K (см. § 1.39), и в формулу (1.191) вместо M_z подставляем значение $M_{вр}=Fr=R_n f_к$:

$$W = M_z \varphi = R_n f_к \varphi.$$

Но $\varphi=s/r$ и поэтому

$$W = (f_к/r)\, R_n s.$$

Получена та же формула (1.196).

Глава 12
ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

§ 1.54. ИМПУЛЬС СИЛЫ. КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Из основного закона динамики (1.151), сформулированного в гл. 10, вытекают так называемые общие теоремы динамики, с помощью которых значительно упрощается решение некоторых задач динамики.

Любое взаимодействие тел, приводящее к какому-либо изменению движения, длится в течение некоторого времени.

Векторная *мера действия силы*

$$\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t, \tag{1.197}$$

равная произведению силы на элементарный промежуток времени ее действия, называется элементарным импульсом силы. Направление вектора импульса совпадает с направлением вектора силы. Единица импульса в СИ — Н·с:

$$1\ \text{Н}\cdot\text{с} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2\cdot 1\ \text{с} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}.$$

Импульс силы за конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ получим, просуммировав элементарные импульсы:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t. \tag{1.198}$$

Отсюда следует, что при $\boldsymbol{F}=\text{const}$ импульс силы за время $\Delta t = t_2 - t_1$ равен

$$\boldsymbol{F}\,\Delta t. \tag{1.199}$$

Если на точку действует несколько сил, то их общий импульс равен геометрической сумме *импульсов отдельных сил.*

Векторная *мера механического движения точки*

$$m\boldsymbol{v}, \tag{1.200}$$

равная произведению массы точки на ее скорость в данный момент времени, называется количеством движения. Направление вектора количества движения совпадает с направлением вектора скорости. Единица количества движения в СИ — кг·м/с. Как видим, единицы импульса силы и количества движения одинаковы.

Скалярная *мера механического движения точки*

$$mv^2/2, \tag{1.201}$$

равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, называется кинетической энергией. Единица кинетической энергии — джоуль (Дж); $1\ \text{Дж} = 1\ \text{Н}\cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м/с}^2\cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2$.

§ 1.55. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Пусть на точку массой m действует система постоянных сил, равнодействующая которых $\boldsymbol{F}_\Sigma$. Согласно основному закону динамики (1.154),

$$\boldsymbol{F}_\Sigma = m\boldsymbol{a}.$$

Учитывая время действия сил, умножим обе части равенства на продолжительность их действия Δt:

$$\boldsymbol{F}_\Sigma \Delta t = m\boldsymbol{a}\,\Delta t.$$

Подставив в это равенство вместо $\boldsymbol{a}$ его выражение [см. § 1.25, формула (1.79)]:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)/(\Delta t),$$

получим

$$\boldsymbol{F}_\Sigma \Delta t = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1. \qquad (1.202)$$

Разность $m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1$ равна изменению количества движения, и теорема, выражаемая уравнением (1.202), читается так: *изменение количества движения точки равно импульсу всех сил.*

Спроецировав на оси координат обе части векторного равенства (1.202), в общем случае получим систему трех скалярных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} F_{\Sigma x}\Delta t &= mv_{2x} - mv_{1x},\\ F_{\Sigma y}\Delta t &= mv_{2y} - mv_{1y},\\ F_{\Sigma z}\Delta t &= mv_{2z} - mv_{1z}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.203)$$

где $F_{\Sigma x} = \Sigma F_{kx}$; $F_{\Sigma y} = \Sigma F_{ky}$; $F_{\Sigma z} = \Sigma F_{kz}$.

Если силы, действующие на точку, лежат в одной плоскости, то получим два скалярных уравнения. Если силы действуют вдоль одной прямой, то, спроецировав уравнение (1.202) на эту прямую, получим одно скалярное уравнение:

$$F_\Sigma \Delta t = mv_2 - mv_1. \qquad (1.204)$$

Пример 1.26. Шофер автомобиля, движущегося со скоростью 60 км/ч, выключил двигатель и начал торможение. Через сколько времени автомобиль остановится, если сила торможения составляет 0,8 от силы тяжести автомобиля?

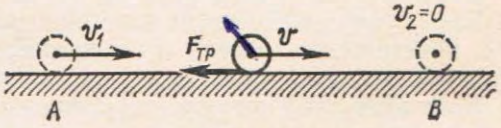


Рис. 1.169

Решение. 1. Приняв автомобиль за материальную точку, отметим на рис. 1.169 буквой A место начала торможения (в этот момент скорость автомобиля $v_1 = 60$ км/ч $= 16{,}7$ м/с), а буквой B — место остановки автомобиля ($v_2 = 0$). При движении автомобиля между точками A и B в течение Δt с на него действует тормозящая сила $\boldsymbol{F}_{тр} = \boldsymbol{R}_f$, равная $R_f = 0{,}8\ G = 0{,}8\ mg$.

2. Применительно к данному случаю уравнение (1.202) примет вид

$$\boldsymbol{R}_f \Delta t = -m\boldsymbol{v}_1.$$

Спроецировав обе части равенства на ось, проходящую через точки A и B, получим

$$-R_f \Delta t = -mv_1,$$

откуда

$$\Delta t = mv_1/R_f = mv_1/(0{,}8\ mg) = 16{,}7/(0{,}8 \cdot 9{,}8) = 2{,}13 \text{ с}.$$

Автомобиль остановится через 2,13 с.

§ 1.56. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ

Пусть, как и в предыдущем случае (см. § 1.55), на точку действует система постоянных сил, равнодействующая которых $\boldsymbol{F}_\Sigma$, и ради упрощения рассуждений допустим, что силы действуют вдоль одной прямой. Тогда основному закону динамики в векторной форме эквивалентно равенство

$$F_\Sigma = ma.$$

Умножим обе части этого равенства на перемещение точки Δs:

$$F_\Sigma \Delta s = ma\, \Delta s.$$

При действии постоянных сил на прямолинейном пути (см. § 1.29)

$$a = (v_2 - v_1)/\Delta t \quad \text{и} \quad \Delta s = v_{\text{ср}} \Delta t = (v_2 + v_1)\, \Delta t/2.$$

Подставим эти значения a и Δs в последнее равенство:

$$F_\Sigma \Delta s = m\, [(v_2 - v_1)/\Delta t]\, [(v_2 + v_1)/\Delta t]/2.$$

Отсюда с учетом того, что $F_\Sigma \Delta s = W_\Sigma = \Sigma W_k$ (см. § 1.47),

$$\sum W_k = mv_2^2/2 - mv_1^2/2, \qquad (1.205)$$

т. е. *изменение кинетической энергии точки равно сумме работ действующих сил.*

Если точка движется равномерно, т. е. $v_1 = v_2$, и изменение кинетической энергии $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 = 0$, то из формулы (1.205) получим

$$\sum W_k = 0$$

— известную из § 1.47 формулу (1.167).

Если $v_1 > v_2$, то изменение кинетической энергии $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 > 0$, т. е. кинетическая энергия точки возрастает и, значит, работа движущих сил больше работ сил сопротивления.

Если $v_1 < v_2$, то изменение кинетической энергии $mv_2^2/2 - mv_1^2/2 < 0$, т. е. кинетическая энергия точки убывает и, значит, силы сопротивления совершают большую работу, чем движущие силы.

Пример 1.27. По условию примера 1.26 определить длину тормозного пути $AB = s$ автомобиля.

Решение. В соответствии с исходными данными (см. рис. 1.169) уравнение кинетической энергии (1.205) примет вид

$$-R_f s = -mv_2^2/2.$$

Отсюда, имея в виду, что $R_f = 0{,}8\,mg$, получим

$$s = mv_2^2/(2 \cdot 0{,}8mg) = 16{,}7^2/(2 \cdot 0{,}8 \cdot 9{,}8) \approx 17 \text{ м}.$$

Тормозной путь составит 17 м.

§ 1.57. ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется механической системой. Например, механическую систему образуют Земля и Луна или спортивный самолет и буксируемый им планер. Но как только планер освободится от буксирного троса, самолет и планер перестают быть механической системой.

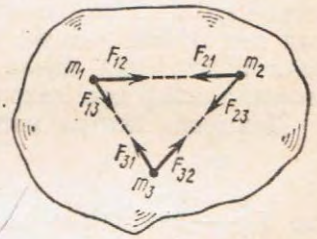


Рис. 1.170

Любое материальное тело рассматривается в механике как механическая система, образуемая совокупностью материальных точек. Причем *абсолютно твердое тело носит название* неизменяемой механической системы, так как расстояние между материальными точками остается неизменным. *Механические системы, расстояния между точками которых могут меняться, называются* изменяемыми. К ним относятся любые машины или механизмы.

Если рассматривать какую-либо механическую систему, то силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в эту систему, называются внешними, а силы, действующие на точки системы со стороны точек или тел этой же системы, называются внутренними. Например, для механической системы Земля — Луна сила притяжения к Солнцу является внешней, а силы их взаимного притяжения друг к другу — внутренними.

Внешние силы принято обозначать с индексом e: $\boldsymbol{F}_e$, $\boldsymbol{R}_e$, а внутренние силы — с индексом i: $\boldsymbol{F}_i$ (от латинских слов «exteriог» — внешний и «interior» — внутренний).

Так как согласно четвертой аксиоме динамики внутренние силы взаимодействия между отдельными точками механической системы (рис. 1.170) попарно равны ($F_{12}=F_{21}$; $F_{23}=F_{32}$; $F_{31}=F_{13}$ и т. д.) и направлены противоположно вдоль прямых, соединяющих эти точки, то главный вектор всех внутренних сил механической системы равен нулю, причем если рассматриваемая механическая система неизменяемая, т. е. представляет собой абсолютно твердое тело, то внутренние силы уравновешиваются; если же рассматривается изменяемая механическая система, то внутренние силы взаимно не уравновешиваются, так как, приложенные к разным телам, они могут вызвать их взаимное перемещение.

Движение механической системы зависит не только от действующих сил, оно зависит также, во-первых, *от суммарной массы системы*

$$m=\sum \Delta m_k, \tag{1.206}$$

где m — масса механической системы и Δm_k — массы ее отдельных точек, и, во-вторых, *от положения центра масс системы.*

Если считать, что механическая система расположена в поле земного притяжения, то положение центра масс совпадает с положением центра тяжести системы. Вместе с тем понятия «центр масс» и «центр тяжести» не следует отождествлять. Центр масс как характеристика распределения масс внутри системы не зависит от того, находится ли данная система под действием каких-либо сил или нет. Иначе говоря, если механическую систему вынести из поля притяжения Земли, то понятие «центр тяжести» потеряет смысл, а центр масс сохранит и свое положение, и смысл.

Движение центра масс определяется уравнением

$$\boldsymbol{F}_{e\Sigma}=m\boldsymbol{a}_C, \tag{1.207}$$

где $\boldsymbol{F}_{e\Sigma}$ — результирующая всех внешних сил, приложенных к точкам системы; m — масса системы и $\boldsymbol{a}_C$ — ускорение центра масс системы.

Как видим, это уравнение аналогично уравнению (1.152) — основному уравнению динамики точки, и смысл его состоит в том, что центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и приложены все внешние силы.

Используя уравнение (1.207) при решении задач, необходимо иметь в виду следующее. Движение центра масс характеризует движение всей системы только при ее поступательном движении. В частном случае если $\boldsymbol{F}_{e\Sigma}=0$, то и $\boldsymbol{a}_C=0$. Значит, система движется равномерно и прямолинейно либо находится в состоянии покоя. Внутренние силы никак не влияют на движение центра масс. Например, для автомобиля движущей является внешняя сила трения, приложенная к его ведущим колесам.

§ 1.58. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Пусть твердое тело (рис. 1.171) под действием внешних сил $\boldsymbol{F}_{ek}$ (эти силы на рисунке не показаны) вращается около оси Oz с угловым ускорением ε. Алгебраическая сумма моментов всех сил (активных сил и сил сопротивления) относительно оси Oz

$$M_{ez}=\sum M_z(\boldsymbol{F}_{ek})$$

называется *вращающим моментом.* Найдем зависимость между угловым ускорением ε тела и действующим на него вращающим моментом M_{ez}.

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем его на множество материальных точек с массами Δm_k. При вращении тела каждая из этих точек движется по окружности радиуса ρ_k с ускорением $\boldsymbol{a}_k$, которое разложим на касательное $\boldsymbol{a}_{kt}$ и нормальное $\boldsymbol{a}_{kn}$ ускорения.

Приложим к каждой материальной точке элементарные силы инерции: касательную $\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ин } kt} = -\Delta m \boldsymbol{a}_{kt}$ и нормальную $\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ин } kn} = -\Delta m \boldsymbol{a}_{kn}$. Согласно принципу Даламбера (см. § 1.45), активные силы, силы реакции связей и силы инерции образуют уравновешенную систему. Поэтому алгебраическая сумма моментов всех этих сил относительно оси Oz должна быть равна нулю, т. е.

$$M_{ez} - \sum \Delta F_{\text{ин } kt} \rho_k = 0$$

(моменты сил $\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ин } kn}$ относительно оси Oz равны нулю, так как линии действия этих сил пересекают ось; см. § 1.19).

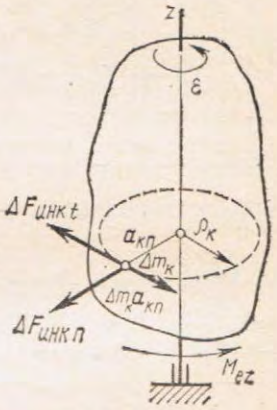


Рис. 1.171

У любой точки вращающегося тела числовое значение касательного ускорения $a_{kt} = \varepsilon \rho_k$ [см. формулу (1.128)], поэтому значение $\Delta F_{\text{ин } kt} = \Delta m_k a_{kt} = \Delta m_k \varepsilon \rho_k$, где ε — угловое ускорение тела. Подставив полученное значение $\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ин } kt}$ в предыдущее уравнение и вынеся за знак суммы постоянную величину ε, получим

$$M_{ez} = \varepsilon \sum \Delta m_k \rho_k^2.$$

Величина $\sum \Delta m_k \rho_k^2 = J_z$, равная сумме произведений масс точек на квадрат их расстояний от оси вращения, называется *моментом инерции тела (системы) относительно этой оси.*

Введя в последнее равенство принятое обозначение, получим *основное уравнение динамики вращающегося тела*, выражающее прямо пропорциональную зависимость между действующим на тело вращающим моментом и полученным вследствие этого угловым ускорением:

$$M_{ez} = J_z \varepsilon. \qquad (1.208)$$

Момент инерции J_z в этом уравнении играет ту же роль, что и масса в уравнении (1.152), и выражает меру инертности тела при вращательном движении.

Из выражения $J_z = \sum \Delta m_k \rho_k^2$, которому можно придать и интегральную форму:

$$J_z = \int_v \rho_k^2 \, dm_k, \qquad (1.209)$$

видно, что в СИ момент инерции тела выражается в кг·м². При решении задач в механике обычно применяют д о л ь н ы е единицы: 1 кг·см² = 10^{-4} кг·м² или 1 кг·мм² = 10^{-6} кг·м².

Из формулы (1.209) также следует, что значение момента инерции зависит главным образом от распределения массы тела относительно оси вращения. Представим себе три колеса одинакового диаметра и одинаковой массы m, но различие формы которых показано их осевыми сечениями на рис. 1.172. По сравнению с колесом *1*, имеющим форму плоского сплошного диска, часть массы колеса *2* расположена дальше от оси вращения, а часть массы колеса *3*, наоборот, приближена к оси. Ввиду того что момент инерции тела складывается из элементарных моментов инерции $\Delta m_k \rho_k^2$ отдельных точек, ясно, что при одинаковой массе m из трех колес момент инерции второго наибольший, а третьего — наименьший, т. е. $J_2 > J_1 > J_3$.

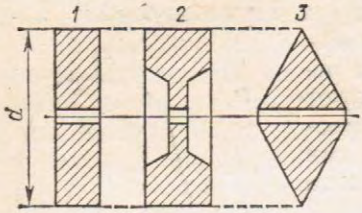


Рис. 1.172

Иногда для упрощения расчетов используют понятие р а д и у с а и н е р ц и и тела $i_z = \sqrt{J_z/m}$, откуда $i_z^2 = J_z/m$, и тогда момент инерции тела

$$J_z = m i_z^2. \qquad (1.210)$$

§ 1.59. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ

Воспользовавшись общей формулой (1.209), выведем формулы моментов инерции некоторых тел.

Момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной l **относительно оси, перпендикулярной стержню и расположенной у одного из его концов** (рис. 1.173). Выделим на расстоянии y от оси z элемент стержня длиной dy и массой dm. Принимая во внимание однородность стержня и постоянство поперечного сечения по всей длине, можно считать, что $dm = \gamma\, dy$, где $\gamma = m/l$ — масса единицы длины стержня. Тогда элементарный момент инерции $\rho^2\, dm = \gamma y^2\, dy$. Просуммируем их по всей длине стержня, т. е. в пределах от 0 до l:

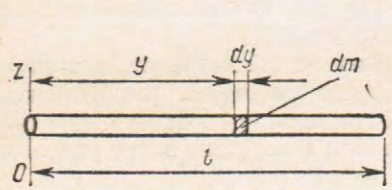


Рис. 1.173

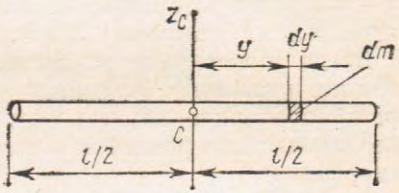


Рис. 1.174

$$J_z = \int_0^l \gamma y^2\, dy = \gamma \int_0^l y^2\, dy = \gamma l^3/3.$$

Подставим вместо γ ее значение m/l и получим окончательно

$$J_z = ml^2/3. \qquad (1.211)$$

Момент инерции этого же стержня относительно оси z_C, проходящей через середину стержня (рис. 1.174). Ось z_C называется центральной, так как проходит через центр тяжести тела. Поступаем так же, как и в предыдущем случае, и получаем то же значение элементарного момента инерции, но при суммировании их по всей длине стержня получим

$$J_{z_C} = \gamma \int_{-l/2}^{l/2} y^2\,dy = \gamma \frac{y^3}{3}\Big|_{-l/2}^{l/2} = \gamma\left(\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{24}\right) = \gamma\frac{l^3}{12}.$$

Помня, что $\gamma = m/l$, окончательно имеем

$$J_{z_C} = ml^2/12. \qquad (1.212)$$

Для моментов инерции тела относительно параллельных осей существует зависимость (теорема Гюйгенса)

$$J_z = J_{z_C} + me^2, \qquad (1.213)$$

где J_z — момент инерции относительно данной оси; J_{z_C} — момент инерции относительно центральной оси, параллельной данной; m — масса тела и e — расстояние между осями.

Зная формулу (1.211) и используя зависимость (1.213) при $e = l/2$, можно получить формулу (1.212).

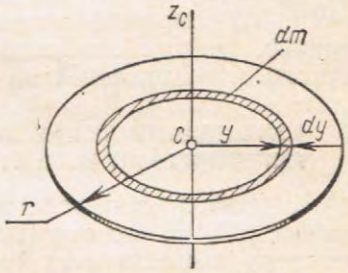


Рис. 1.175

Момент инерции тонкой круглой однородной пластинки радиуса r и массы m **относительно центральной оси z_C, перпендикулярной плоскости пластинки** (рис. 1.175). Выделим в пластинке элемент массой dm в виде кольца радиуса y и шириной dy. Площадь кольца ввиду малости dy можно принять равной $2\pi y\,dy$. Тогда элементарная масса $dm = \gamma \cdot 2\pi y\,dy$, где $\gamma = m/(\pi r^2)$ — масса единицы площади пластинки. Просуммируем элементарные моменты инерции пластинки $\rho^2\,dm = \gamma \cdot 2\pi y^3\,dy$ по всей площади, т. е. в пределах от 0 до r:

$$J_{z_C} = \int_0^r \gamma \cdot 2\pi y^3\,dy = 2\pi\gamma \int_0^r y^3\,dy = 2\pi\gamma r^4/4.$$

Заменим γ ее значением $m/(\pi r^2)$ и получим

$$J_{z_C} = mr^2/2. \qquad (1.214)$$

Если ввести в эту формулу диаметр диска $d = 2r$, то получим

$$J_{z_C} = md^2/8. \qquad (1.215)$$

Момент инерции сплошного однородного цилиндра массой m **относительно его геометрической оси z** (рис. 1.176) выражается

также формулами (1.214) и (1.215), так как цилиндр можно представить состоящим из тонких однородных дисков одного и того же радиуса r (диаметра $d=2r$).

Момент инерции полого цилиндра массой m **относительно геометрической оси** z выражается формулой (приводим ее без вывода).

$$J_z = m(r^2 + r_0^2)/2 = m(d^2 + d_0^2)/8, \qquad (1.216)$$

где $d=2r$ — наружный диаметр, а $d_0=2r_0$ — внутренний диаметр цилиндра (рис. 1.177). При $d_0=2r_0=0$ формула (1.214) пре-

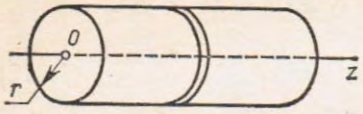


Рис. 1.176

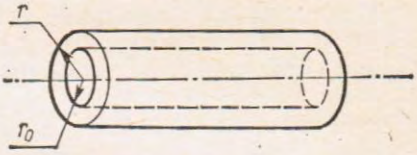


Рис. 1.177

вращается в формулы (1.214) или (1.215), а при $d_0=d$ (или $r_0=r$) — в формулу

$$J_z = mr^2 = md^2/4. \qquad (1.217)$$

Эту формулу используют в тех случаях, когда разность $d-d_0=2(r-r_0)$ ничтожно мала (цилиндр получен свертыванием, например, тонкого стального листа) и всю массу условно можно считать расположенной по поверхности цилиндра.

§ 1.60. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ

Кинетическая энергия твердого тела складывается из кинетических энергий его отдельных точек. При поступательном движении тела скорости всех его точек равны между собой и равны $\boldsymbol{v}_C$ — скорости центра масс тела (рис. 1.178). Поэтому легко понять, что кинетическая энергия тела при

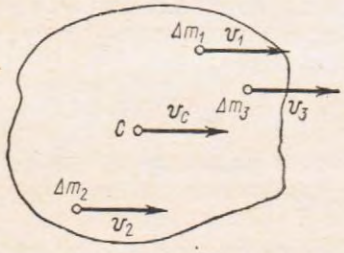


Рис. 1.178

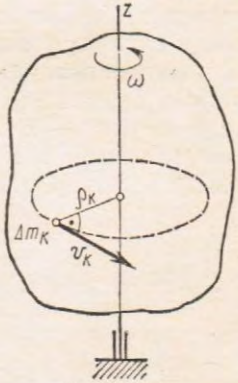


Рис. 1.179

поступательном движении

$$E_{к.п} = mv_C^2/2, \qquad (1.218)$$

где m — масса тела, v_C — значение скорости центра масс.

При вращательном движении тела с некоторой угловой скоростью ω (рис. 1.179) все его точки движутся по окружностям различных радиусов ρ_k и имеют скорости $v_k=\omega\rho_k$ [см. § 1.35, формула (1.127)]. Определив кинетическую энергию каждой точки $\Delta m_k\rho_k^2/2$ и сложив их по всему объему тела, получим

$$E_{\text{к. вр}}=\sum\frac{\Delta m_k v_k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum\Delta m_k\omega^2\rho_k^2=\frac{\omega^2}{2}\Sigma\,\Delta m_k\rho_k^2.$$

А так как $\sum\Delta m_k\rho_k^2=J_k$ — момент инерции тела относительно оси z, находим для кинетической энергии такое выражение:

$$E_{\text{к. пр}}=J_z\omega^2/2. \tag{1.219}$$

Кинетическая энергия тела при сложном его движении (при плоскопараллельном, в частности) *складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии вращательного движения с угловой скоростью вокруг оси, проходящей через центр масс,* т. е.

$$E_{\text{к}}=E_{\text{к. п}}+E_{\text{к. вр}}=mv_C^2/2+J_z\omega^2/2. \tag{1.220}$$

Кроме кинетической энергии мерой вращательного движения тела является величина

$$J_z\omega, \tag{1.221}$$

называемая кинетическим моментом вращающегося тела. Кинетический момент в СИ выражается в кг·м²/с.

Пример 1.28. Маховик массой $m=600$ кг и диаметром $d=3$ м укреплен на валу, установленном в подшипниках, и помещен в герметичном кожухе. Для определения момента трения $M_{\text{тр}}$ в подшипниках маховику придали частоту вращения $n_0=2400$ об/мин, а затем отсоединили привод. Спустя $t=10$ мин маховик перестал вращаться. Определить $M_{\text{тр}}$, считая его постоянным. Радиус инерции маховика $i_z=0{,}46\,d$.

Решение. 1. Частоте вращения маховика n_0 соответствует начальная угловая скорость

$$\omega_0=\pi n_0/30=\pi\cdot 2400/30=80\pi \text{ рад/с}.$$

2. Радиус инерции маховика $i_z=0{,}46\,d$; следовательно, его момент инерции

$$J_z=mi_z^2=600\,(0{,}46d)^2=1140 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

3. Искомый момент трения $M_{\text{тр}}=\text{const}$, значит после отключения привода маховик вращается равнозамедленно и через $t=10$ мин$=600$ с останавливается ($\omega=0$), успев повернуться на угол

$$\varphi=[(\omega_0+\omega)/2]\,t=(80\pi/2)\,600=24\,000\pi \text{ рад}.$$

4. Изменение кинетической энергии маховика равно работе момента трения, т. е.

$$-M_{\text{тр}}\varphi=J_z\omega^2/2-J_z\omega_0^2/2.$$

Отсюда, имея в виду, что конечная угловая скорость маховика $\omega=0$, получим

$$M_{\text{тр}}=J_z\omega_0^2/(2\varphi)=1140\,(80\pi)^2/(2\cdot 24\,000\pi)=478 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Раздел второй
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 2.1. ЗАДАЧИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Любая машина или постройка представляет собой более или менее сложную материальную конструкцию, которая, сохраняя форму и размеры отдельных элементов, должна выдерживать определенные, иногда очень значительные, нагрузки. В теоретической механике при определении реакций опор не возникало про-

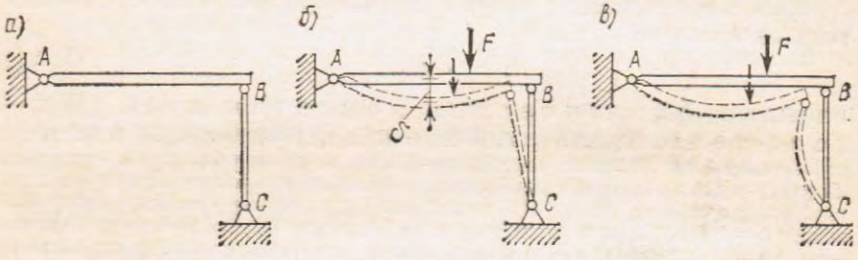


Рис. 2.1

блемы сохранения формы и размеров рассматриваемых в задачах элементов конструкций, так как они считались абсолютно твердыми — неизменяемыми. На самом деле под действием внешних сил все твердые материальные тела деформируются, т. е. их форма и размеры изменяются.

Представим себе балку AB (рис. 2.1, *а*), один конец которой шарнирно закреплен на неподвижной опоре, а второй также шарнирно опирается на вертикальный стержень BC. Если конструкцию нагрузить силой $\boldsymbol{F}$ (рис. 2.1, *б*), то она деформируется: балка изгибается, а стержень укорачивается и отклоняется от первоначального вертикального положения, как показано штриховыми линиями на рис. 2.1, *б*. После снятия нагрузки $\boldsymbol{F}$ (при условии, что под действием силы $\boldsymbol{F}$ не произойдет разрушения) конструкция либо полностью восстанавливает первоначальную форму, показанную на рис. 2.1, *а*, либо остается деформированной, хотя и в несколько меньшей степени, чем на рис. 2.1, *б*.

В первом случае под действием силы $\boldsymbol{F}$ в элементах конструкции возникали упругие деформации, а во втором помимо упругих по-

явились остаточные (пластические) деформации. Возникновение остаточных деформаций может привести к нарушению нормальной работы конструкции, и поэтому они недопустимы.

Способность конструкции (или отдельного ее элемента) выдерживать заданную нагрузку не разрушаясь и без появления остаточных деформаций называют прочностью.

Из рис. 2.1, *б* видно, что под действием силы F балка AB прогибается на величину δ, называемую стрелой прогиба. Если при упругой деформации стрела прогиба превысила определенное допустимое значение, то также может нарушиться нормальная работа конструкции.

Способность конструкции (или отдельного элемента) сопротивляться упругим деформациям называется жесткостью.

Стержень BC, поддерживающий балку, при некотором значении силы F, действующей на конструкцию, может внезапно изогнуться, как показано штриховыми линиями на рис. 2.1, *в*. В этом случае сжатый стержень теряет свое первоначальное прямолинейное состояние.

Способность конструкции (или отдельного элемента) сохранять первоначальную форму упругого равновесия называют устойчивостью.

В машиностроении или строительстве при проектировании и изготовлении какой-либо механической конструкции необходимо исходить из неизбежности возникновения упругих деформаций, предъявляя при этом к каждому элементу определенные требования в отношении прочности, жесткости и устойчивости. Сопротивление материалов, опираясь на законы и положения теоретической механики и математики, а также на результаты, получаемые при испытаниях конкретных материалов, разрабатывает приемы и методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость в целях обеспечения работоспособности конструкции при минимальной затрате материалов.

В сопротивлении материалов, как и в теоретической механике, решение задач начинается с выявления существенных факторов и отбрасывания несущественных, которые не влияют заметным образом на работу конструкции в целом. Такого рода упрощения необходимы, поскольку решение задач с полным учетом всех свойств реального объекта невозможно в силу их неисчерпаемости. Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, носит название *расчетной схемы*. Выбор расчетной схемы сводится в основном к схематизации геометрии реального объекта, системы сил, приложенных к элементу конструкции, и свойств материала. В сопротивлении материалов все многообразие форм элементов конструкций сведено к трем геометрическим схемам: брус, оболочка и массив.

Брусом называется тело, одно из измерений которого (длина) значительно превышает два других. В простейшем случае брус как геометрическое тело может быть получен перемещением плоской фигуры вдоль некоторой кривой (рис. 2.2) таким образом,

чтобы центр тяжести фигуры оставался на этой кривой, а плоскость была нормальна к ней. Кривая, вдоль которой перемещается центр тяжести плоской фигуры, называется *осью* бруса, а плоская фигура — его *поперечным сечением*. В зависимости от формы оси брус может быть прямым, кривым или пространственно изогнутым. Примером последнего может служить винтовая пружина (см. § 2.18). Кроме брусьев с неизменным поперечным сечением вдоль всей оси могут быть брусья с непрерывно изменяющимися сечениями (рис. 2.3, *а*) или с сечениями, форма и площадь которых

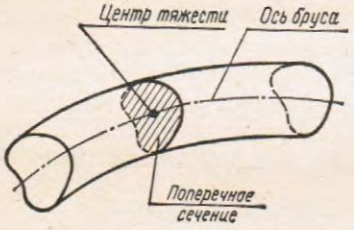


Рис. 2.2

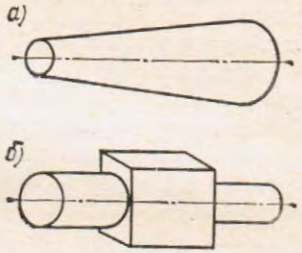


Рис. 2.3

меняется скачками (рис. 2.3, *б*), последние называются ступенчатыми брусьями.

К *оболочкам* относят тела, одно из измерений которых (толщина) во много раз меньше двух других размеров. Примером оболочек могут служить стенки баков, цистерн, корпуса ракет и т. п.

Массивом считается тело, все три размера которого имеют один порядок.

§ 2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ НАГРУЗОК

Выше (см. § 2.1) говорилось о том, что деформирование элементов конструкции происходит вследствие действия на них внешних сил. Из теоретической механики известно, что равновесная система внешних сил состоит из активных сил и реакций связей. Такую систему сил принято называть *нагрузкой* *. Нагрузки классифицируют по двум признакам — способу их приложения к элементу конструкции и характеру действия на него.

По способу их приложения к телу нагрузки делятся на поверхностные и объемные. *Поверхностные силы* приложены к участкам поверхности и характеризуют непосредственное контактное взаимодействие рассматриваемого элемента конструкции с окружающими телами. В свою очередь, поверхностные силы делятся на распределенные (см. § 1.17) и сосредоточенные. В буквальном смысле сосредоточенных сил нет, это схематизация. Считая силу

* В общем случае под нагрузкой понимают не только механическое усилие, но и любое другое действие (тепловое или физико-механическое), приводящее к появлению деформаций.

сосредоточенной, условно пренебрегают размерами площади взаимодействия соприкасающихся тел. Силы, распределенные по объему тела, такие, как силы тяжести, магнитные силы и силы инерции, относятся к *объемным силам*.

По характеру действия на тело нагрузки делятся на статические, повторно-переменные и динамические (ударные).

К *статическим* нагрузкам относятся такие, которые медленно возрастают от нуля и, достигнув некоторого конечного значения, далее остаются неизменными. Примером статической объемной нагрузки может служить система центробежных сил инерции, действующая на ротор электродвигателя в период его разгона и при дальнейшем равномерном вращении.

К *повторно-переменным* (циклическим) относятся нагрузки, многократно изменяющиеся во времени по какому-либо периодическому закону. К таким нагрузкам, в частности, относятся силы, действующие на зубья зубчатого колеса.

К *динамическим* (ударным) относятся нагрузки, прикладываемые внезапно или даже с некоторой скоростью в момент контакта. Примером такой нагрузки может служить сила, приложенная к телу в момент падения на него другого тела (забивание свай с помощью копра и т. д.).

§ 2.3. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

Для того чтобы наука о сопротивлении материалов могла рекомендовать общие теоретические основы расчета элементов конструкций, выполняемых из разнообразных материалов, необходимо исходить из ряда допущений об их свойствах, а также из допущений о характере деформаций.

Допущения о свойствах материалов:

1. Материал *однороден*, т. е. его свойства не зависят от размеров выделенного из тела объема. В действительности однородных материалов в природе нет. Например, структура металлов состоит из множества хаотически расположенных микроскопически мелких кристаллов (зерен). Размеры же рассчитываемых элементов конструкций, как правило, неизмеримо превышают размеры кристаллов, поэтому допущение об однородности материала здесь полностью применимо.

2. Материал представляет собой *сплошную среду* и непрерывно заполняет весь предоставленный ему объем. Это допущение вытекает непосредственно из первого — об однородности материала — и позволяет применять математический анализ.

3. Материал *изотропен*, т. е. физико-механические свойства одинаковы по всем направлениям. Таким образом, выделенный из сплошной среды элемент не зависит от ориентации относительно выбранной системы координат. Металлы благодаря своей мелкозернистой структуре считаются изотропными. Но есть много неизотропных — анизотропных — материалов. К ним относятся древесина, ткани, фанера, многие пластмассы. Однако в сопротив-

лении материалов рассматриваются в основном материалы изотропные.

4. Материал в определенных пределах нагружения тела обладает *идеальной упругостью*, т. е. после снятия нагрузки тело полностью восстанавливает первоначальные формы и размеры.

Допущения о характере деформации элементов конструкций:

1. Перемещения точек элемента конструкции, обусловленные его упругими деформациями, незначительны по сравнению с размерами самого тела. Согласно этому допущению, деформированный элемент конструкции (или вся конструкция целиком) несущест-

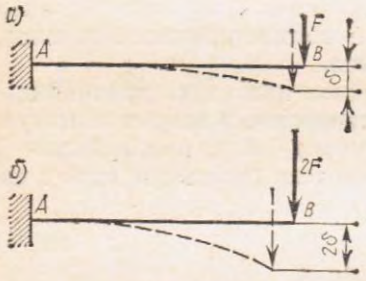


Рис. 2.4

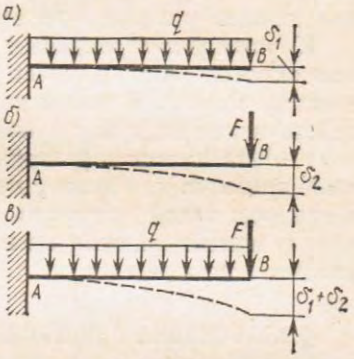


Рис. 2.5

венно отличается от недеформированного. Поэтому при составлении уравнений равновесия сил, действующих на деформированное тело, можно пренебрегать теми изменениями, которые произошли в расположении сил (см. рис. 2.1, *б*, *в*), т. е. следует исходить из первоначальной формы тела (элемента конструкции) и его начальных размеров. Это положение кратко называется *принципом начальных размеров*.

2. Перемещения точек упругого тела в известных пределах нагружения прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения. Например, если сила $\boldsymbol{F}$ вызвала перемещение точки B на расстояние δ (рис. 2.4, *а*), то сила $2\boldsymbol{F}$ вызовет перемещение точки B на расстояние 2δ (рис. 2.4, *б*). Конструкции, для которых справедливо это допущение, называются *линейно-деформируемыми*.

3. Для линейно-деформируемых конструкций справедлив известный из теоретической механики *принцип независимости действия сил* — результат действия нескольких сил не зависит от последовательности нагружения ими данной конструкции и равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности. Следовательно, если под действием равномерно распределенной силы точка B бруса (рис. 2.5, *а*) переместится на расстояние δ_1, а под действием сосредоточенной силы (рис. 2.5, *б*) — на расстояние δ_2, то при одновременном действии обеих сил перемещение точки B равно сумме перемещений δ_1 и δ_2 (рис. 2.5, *в*).

§ 2.4. МЕТОД СЕЧЕНИЙ. ВИДЫ НАГРУЖЕНИЙ

Растягивая руками резиновый жгут или сгибая толстую стальную проволоку, мы ощущаем сопротивление этих тел; иногда силы наших рук оказывается недостаточно, чтобы еще более растянуть жгут или изогнуть проволоку. Способность тела сопротивляться изменению первоначальной формы определяется силами сцепления между всеми смежными частицами тела, которые в отличие от внешних сил, приложенных к телу, называются *внутренними силами*. Внутренние силы (иногда их называют силами упругости), как показывают опыты, возрастают вместе с увеличением нагрузок, но до известного предела, после чего сцепление между частицами тела прекращается и тело разрушается.

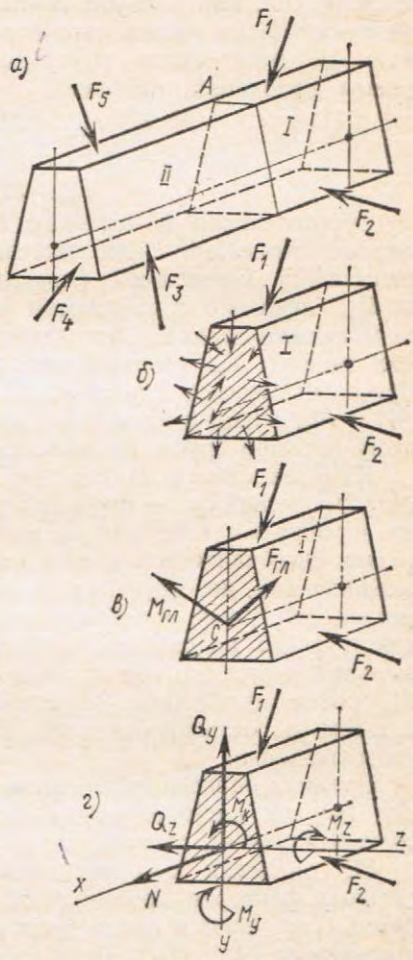


Рис. 2.6

Чтобы правильно рассчитать конструкцию на прочность или на жесткость, необходимо уметь определять внутренние силы по нагрузке. Для выявления внутренних сил в сопротивлении материалов применяется *метод сечений*, суть которого заключается в следующем.

Рассечем мысленно брус, нагруженный уравновешенной системой сил $\boldsymbol{F}_k$ (рис. 2.6, *а*), поперечным сечением A на части *I* и *II* и отбросим одну из них, например часть *II*. Чтобы сохранить равновесие оставшейся части бруса (рис. 2.6, *б*), заменим действие на нее отброшенной части системой сил, которые являются внутренними для целого бруса и внешними по отношению к отсеченной части. В результате приведения этой системы сил (см. § 1.13) к центру тяжести сечения получим главный вектор $\boldsymbol{F}_{гл}$ и главный момент $\boldsymbol{M}_{гл}$ (рис. 2.6, *в*). Выберем систему координатных осей x, y, z таким образом, чтобы ось x была направлена перпендикулярно сечению, т. е. совпадала с осью бруса, а оси y и z располагались в плоскости сечения, причем одна из осей (ось y) совпадала с ее осью

симметрии (рис. 2.6, *г*). Разложив главный вектор и главный момент на составляющие по выбранным осям, получим три силы $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Q}_y$, $\boldsymbol{Q}_z$ и три момента $M_к$, M_y, M_z, которые в совокупности называются *внутренними силовыми факторами*.

Шесть внутренних силовых факторов вместе с известными внешними силами на оставшейся части бруса образуют уравновешенную систему сил, для которой можно составить шесть уравнений равновесия. Легко видеть, что в каждое из этих уравнений входит один из неизвестных внутренних силовых факторов. Поэтому, решая уравнения, найдем:

$$\left.\begin{aligned} N &= \sum F_{кx}, \quad M_k = \sum M_x(\boldsymbol{F}_к), \\ Q_y &= \sum F_{кy}, \quad M_y = \sum M_y(\boldsymbol{F}_к), \\ Q_z &= \sum F_{кz}, \quad M_z = \sum M_z(\boldsymbol{F}_к). \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Составляющая $\boldsymbol{N}$ главного вектора внутренних сил, направленная перпендикулярно плоскости поперечного сечения бруса, называется *нормальной (продольной) силой*. Составляющие $\boldsymbol{Q}_y$ и $\boldsymbol{Q}_z$, лежащие в плоскости поперечного сечения, называются *поперечными силами*. Составляющий главного момента внутренних сил момент $\boldsymbol{M}_к$, возникающий в плоскости поперечного сечения бруса, называется *крутящим моментом*. Составляющие моменты $\boldsymbol{M}_y$ и $\boldsymbol{M}_z$, возникающие в плоскостях перпендикулярных поперечному сечению бруса, называются *изгибающими моментами*.

Из равенства (2.1) следует, что: нормальная сила N равна алгебраической сумме проекций на ось x внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса; каждая из поперечных сил (Q_y и Q_z) равна алгебраической сумме проекций на соответствующую ось внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса; крутящий момент $M_к$ равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на рассматриваемую часть бруса, относительно нормальной к сечению оси x; каждый из изгибающих моментов M_y и M_z равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на оставшуюся часть бруса, относительно осей y или z соответственно.

Правила определения знаков проекций или моментов внешних сил при их алгебраическом сложении сформулированы далее в соответствующих главах.

По аналогии с приведенными наименованиями внутренних силовых факторов производится *классификация видов нагружения бруса*. Так, если в поперечных сечениях бруса возникает только нормальная сила $\boldsymbol{N}$, то брус *растянут* (сила $\boldsymbol{N}$ направлена от сечения) или *сжат* (сила $\boldsymbol{N}$ направлена к сечению). Если в поперечном сечении возникает только момент $\boldsymbol{M}_к$, то брус в данном сечении работает на *кручение*. Если в поперечном сечении возникает только изгибающий момент M_z (или $\boldsymbol{M}_y$), то происходит *чистый изгиб*. Если в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (например, $\boldsymbol{M}_z$) возникает и поперечная сила $\boldsymbol{Q}_y$, то это *поперечный изгиб*. Возможны случаи, когда брус работает на кручение и изгиб или растяжение одновременно.

Таким образом, метод сечений позволяет определить внутренние силовые факторы и виды нагружения. Практически метод сечений сводится к выполнению следующих операций:

1) разрезаем брус на две части;

2) отбрасываем одну из частей (целесообразно отбросить часть, на которую действует большее число внешних сил, или часть, содержащую заделку);

3) заменяем действие отброшенной части на оставленную шестью внутренними силовыми факторами;

4) определяем значения внутренних силовых факторов из условий равновесия для отсеченной части бруса;

5) устанавливаем вид нагружения.

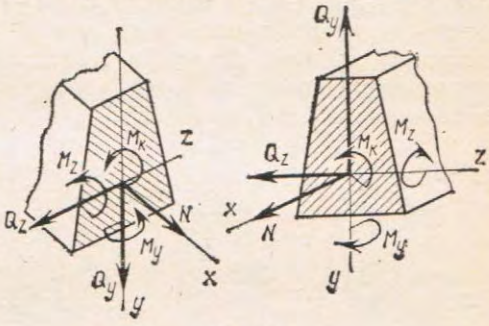


Рис. 2.7

Как говорилось выше, внутренние силы определяют взаимодействие между частями бруса, причем это взаимодействие подчиняется аксиоме статики о равенстве действия и противодействия. Поэтому внутренние силовые факторы, возникающие в сечении справа, равны внутренним силовым факторам в сечении слева, но направлены в противоположные стороны (рис. 2.7).

§ 2.5. НАПРЯЖЕНИЯ

Метод сечений позволяет выявить внутренние силовые факторы. Но для оценки прочности необходимо уметь определять внутренние силы в любой точке сечения рассматриваемого бруса. Поэтому введем числовую меру интенсивности внутренних сил — *напряжение*.

Рассмотрим брус, к которому приложена некоторая нагрузка. Брус под действием нагрузки находится в равновесии. Применяя метод сечений, рассечем брус поперечной плоскостью, отбросим левую часть бруса, заменим действие отброшенной части на рассматриваемую системой внутренних сил. Выделим вокруг произвольной точки малую площадку ΔA (рис. 2.8, *а*). Равнодействующую внутренних сил в пределах этой площадки обозначим $\Delta \boldsymbol{F}$. Отношение

$$\Delta \boldsymbol{F}/\Delta A = \boldsymbol{p}_{ср} \qquad (2.2)$$

называется средним напряжением. Вектор среднего напряжения совпадает по направлению с вектором равнодействующей $\Delta \boldsymbol{F}$.

При постепенном уменьшении площадки ΔA изменяются как модуль, так и направление равнодействующей внутренних сил $\Delta \boldsymbol{F}$, а следовательно, вектор $\boldsymbol{p}_{ср}$ постепенно приближается к истинному значению напряжения $\boldsymbol{p}$ в заданной точке (рис. 2.8, *б*). Числовое

значение этого напряжения выражается равенством

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta F / \Delta A. \qquad (2.3)$$

Согласно формулам (2.2) и (2.3), единицей напряжения служит единица силы, деленная на единицу площади. В Международной системе единиц (СИ) единица силы — Н, единица площади — м², значит единица напряжения в этой системе — Н/м², названная паскалем, т. е. 1 Па=1Н/м². Паскаль — очень мелкая единица напряжения, поэтому более употребительной единицей является мегапаскаль: 1 МПа=10^6 Па.

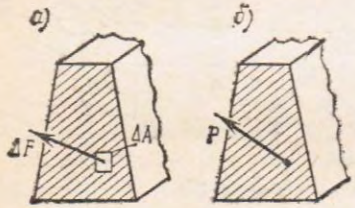


Рис. 2.8

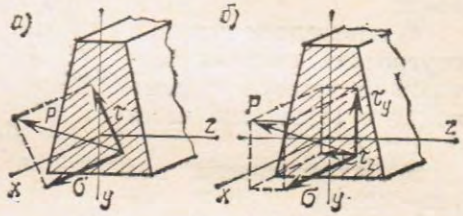


Рис. 2.9

Вектор $\boldsymbol{p}$ полного напряжения в точке сечения можно разложить на два составляющих вектора: $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 2.9, *а*). Вектор $\boldsymbol{\sigma}$, направленный перпендикулярно сечению, называется *нормальным напряжением*. Вектор $\boldsymbol{\tau}$, лежащий в плоскости сечения, называется *касательным напряжением*. Поскольку векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ взаимно перпендикулярны, зависимость между числовыми значениями напряжений p, σ и τ выражается формулой

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \qquad (2.4)$$

Чаще оказывается целесообразным, сообразуясь с выбранными осями координат x, y, z (рис. 2.9, *б*), разложить вектор $\boldsymbol{p}$ не на две, а на три составляющие вектора: $\boldsymbol{\sigma}$ (нормальное напряжение), параллельную оси x, $\boldsymbol{\tau}_y$ и $\boldsymbol{\tau}_z$ (касательные напряжения), параллельные соответственно осям y и z. В этом случае

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \qquad (2.5)$$

Между внутренними силовыми факторами (см. § 2.4) и напряжениями σ, τ_y и τ_z существуют определенные зависимости, к установлению которых мы перейдем в следующих главах. Здесь же заметим следующее.

Наличие нормального напряжения σ в любой точке поперечного сечения обусловлено возникновением в этом сечении нормальной силы $\boldsymbol{N}$ или изгибающих моментов M_z и M_y. Наличие касательных напряжений τ или τ_y и τ_z обусловлено внутренними силовыми факторами, возникающими в плоскости сечения, т. е. поперечными силами $\boldsymbol{Q}_y$, $\boldsymbol{Q}_z$ или крутящим моментом $M_к$.

Глава 2
РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

§ 2.6. НОРМАЛЬНЫЕ СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ БРУСА

Вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — нормальная сила N, называется *растяжением или сжатием*. Прямой брус, работающий на растяжение (сжатие), называется *стержнем*.

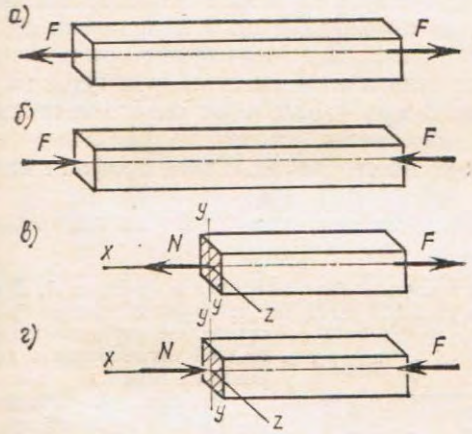


Рис. 2.10

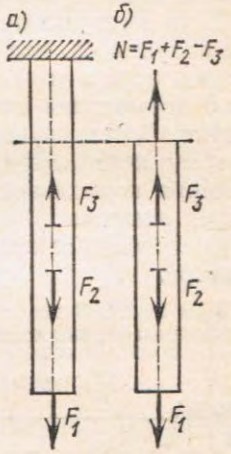


Рис. 2.11

Брус растянут, если внешние силы $\boldsymbol{F}$, приложенные к его концам, действуют вдоль оси бруса и направлены в стороны от бруса (рис. 2.10, *а*). При действии осевых нагрузок $\boldsymbol{F}$, направленных к брусу, он сжат (рис. 2.10, *б*). При таких нагружениях в поперечных сечениях возникает только продольная сила $\boldsymbol{N}$. Действительно, если согласно методу сечений разрезать растянутый брус и отбросить, например, его левую часть (рис. 2.10, *в*), то для уравновешивания внешней силы $\boldsymbol{F}$ достаточно в сечении приложить только один внутренний силовой фактор — нормальную силу $\boldsymbol{N}$, направив ее по оси x от сечения. Согласно первому из уравнений (2.1),

$$N = \sum F_{kx} = F.$$

Остальные внутренние силовые факторы в данном случае равны нулю (проекции силы $\boldsymbol{F}$ на ось y и на ось z равны нулю и моменты силы $\boldsymbol{F}$ относительно каждой из осей x, y, z также равны нулю). Поэтому нормальная сила $\boldsymbol{N}$ есть равнодействующая внутренних сил в данном сечении. Аналогичный результат получим, разрезав сжатый брус (рис. 2.10, *г*), с той лишь разницей, что в последнем случае нормальная сила $N=F$ направлена к сечению.

Если брус нагружен не двумя, как на рис. 2.10, *а*, а бо́льшим числом осевых сил, и по одну сторону от выбранного сечения имеются силы, направленные в противоположные стороны (рис. 2.11, *б*), то целесообразно договориться о правиле знаков для проекций внешних сил при определении нормальной силы в сечении: *проекции внешних сил, направленных от сечения, положительны и, наоборот, проекции внешних сил, направленных к сечению, отрицательны.*

Это правило справедливо для любой оставленной части бруса — правой или левой (при горизонтальном положении бруса), нижней или верхней (при вертикальном расположении бруса).

Если в результате алгебраического сложения проекции внешних сил получилось, что $N>0$, то нормальная сила направлена от сечения и брус в этом сечении испытывает растяжение; при значении $N<0$ нормальная сила направлена к сечению и брус испытывает сжатие. В тех случаях, когда при переходе от одного сечения к другому нормальная сила изменяется, строят график изменения значения нормальной силы N по его длине. Такие графики называются *эпюрами*.

Построение эпюры нормальных сил рассмотрим на конкретном примере.

Пример 2.1. Защемленный в сечении D брус нагружен в сечениях A, B и C осевыми силами, как показано на рис. 2.12, *а*. Пренебрегая силой тяжести бруса, определить нормальные силы по всей длине бруса и построить их эпюру.

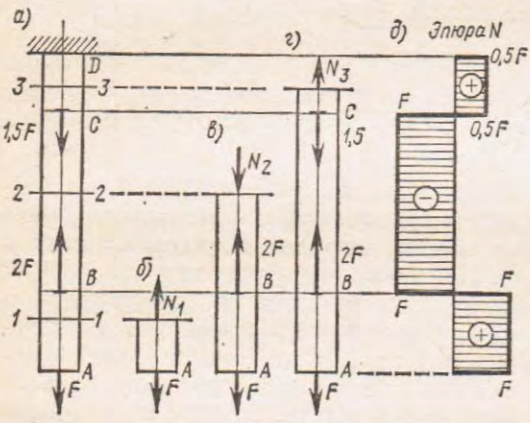


Рис. 2.12

Решение. 1. Сечениями A, B и C, в которых приложены нагрузки, брус разделен на три участка: AB, BC и CD.

2. Разрежем брус по некоторому сечению *1—1* на участке AB. Отбросив верхнюю часть (рис. 2.12, *б*), определим в сечении *1—1* нормальную силу, обозначив ее N_1. На оставленную часть бруса действует только одна сила $\boldsymbol{F}$, направленная от сечения *1—1*. Согласно принятому правилу знаков, ее проекцию на ось бруса считаем положительной. Поэтому

$$N_1 = F.$$

Нормальная сила $N_1>0$, значит вектор N_1 нужно направить от сечения *1—1*. Сечение *1—1* может быть выбрано в любом месте на участке AB; следовательно, нормальная сила на этом участке постоянна, а брус на участке AB растянут.

3. Разрежем брус по некоторому сечению *2—2* на участке BC, отбросив верхнюю часть (рис. 2.12, *в*), и обозначим N_2 искомую нормальную силу. На оставленную нижнюю часть бруса действуют две силы. Проекция силы $\boldsymbol{F}$ положительна (сила $\boldsymbol{F}$ направлена от сечения), а проекция силы $2\boldsymbol{F}$ отрицательна ($2\boldsymbol{F}$ направлен к сечению *2—2*). Поэтому

$$N_2 = F - 2F = -F.$$

Нормальная сила $N_2<0$, значит вектор $\boldsymbol{N}_2$ направлен к сечению *2—2* и брус на участке *BC* сжат.

4. Разрежем брус по сечению *3—3* на участке *CD*. Отбросив верхнюю часть (отбрасываем каждый раз верхнюю часть потому, что реакция заделки в сечении *D* неизвестна), находим нормальную силу N_3 в сечении *3—3* (рис. 2.12, *г*):

$$N_3 = F - 2F + 1{,}5F = 0{,}5F;$$

$N_3>0$, значит вектор $\boldsymbol{N}_3$ следует направить от сечения *3—3*, а участок *CD* бруса растянут.

5. Переходим к построению эпюры *N* (рис. 2.12, *д*). Для этого параллельно оси бруса проводим тонкую начальную или *базовую линию*, перпендикулярно которой в определенном масштабе вправо откладываем отрезки, изображающие положительные значения продольной силы, а влево — отрицательные. Получившаяся ступенчатая фигура, ограниченная основной линией и заштрихованная перпендикулярно базовой линии, и есть искомая эпюра нормальных сил по длине бруса. «Читая» эпюру на рис. 2.12, *д*, например, сверху вниз, видим: на участке *DC* брус растянут, нормальная сила, равная $0{,}5F$, постоянна до сечения *C* (эпюра *N* на участке параллельна базовой линии); при переходе через сечение *C* эпюра делает «скачок», равный абсолютному значению приложенной в этом сечении силы; правая (положительная) часть скачка ($+0{,}5F$) изображает значение нормальной силы чуть выше сечения *C*, а левая (отрицательная) часть скачка ($-F$) изображает значение нормальной силы чуть ниже сечения *C* (т. е. относится к участку *CB*), а далее постоянное отрицательное значение нормальной силы сохраняется во всех поперечных сечениях бруса вплоть до сечения *B*; при переходе через сечение *B* эпюра снова испытывает скачок от значения $-F$ до $+F$, характеризующий переход от сжатого участка *CB* к растянутому *BA*. Абсолютное значение скачка равно силе $2F$, приложенной к брусу в этом сечении. В заключение заметим, что скачки на эпюрах всегда по абсолютному значению равны модулям внешних сил, приложенных в этом месте к брусу.

Переходим теперь к определению напряжений в поперечных сечениях бруса.

Эта задача решается с помощью *гипотезы плоских сечений*, высказанной Я. Бернулли старшим (1654—1705). Применительно к рассматриваемому виду нагружения гипотеза гласит: перпендикулярное оси недеформированного бруса плоское сечение *A* (рис. 2.13, *а*) остается таким же плоским и перпендикулярным оси и при растяжении (сжатии) бруса (рис. 2.13, *б*). Исходя из того что в растянутом (сжатом) брусе поперечные сечения остаются параллельными друг другу, естественно предположить, что внутренние силы распределены по сечению равномерно (рис. 2.13, *в*), а так как нормальная сила $\boldsymbol{N}$ является равнодействующей внутренних сил в поперечном сечении, нормальное напряжение в любой точке сечения

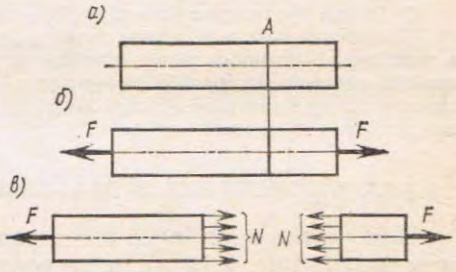


Рис. 2.13

$$\sigma = N/A, \qquad (2.6)$$

где A — площадь поперечного сечения. Нормальное напряжение направлено так же, как и нормальная сила: при растяжении бруса — от сечения, при сжатии — к сечению.

Если нормальные напряжения в разных сечениях бруса не одинаковы либо из-за изменения нормальных сил вдоль оси бруса (см. пример 2.1), либо из-за изменения площади поперечных сечений, то строят эпюру нормальных напряжений (эпюра σ).

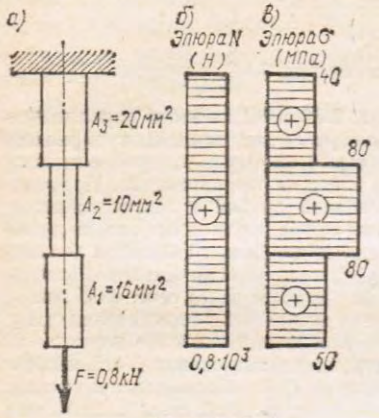


Рис. 2.14

Пример 2.2. Трехступенчатый брус с площадями поперечных сечений ступеней A_1, A_2 и A_3 нагружен силой F, как показано на рис. 2.14, *а*. Определить нормальные напряжения в поперечных сечениях и построить эпюру σ по длине бруса.

Решение. 1. Брус растянут силой $F=0{,}8$ кН$=0{,}8\cdot10^3$ Н. Применяя метод сечений, определяем, что в любом сечении бруса $N=F=0{,}8\cdot10^3$ Н. Эпюра N изображена на рис. 2.14, *б*.

2. Площади поперечных сечений ступеней, заданные в мм², выразим в м²: $A_1=16$ мм²$=16\cdot10^{-6}$ м², $A_2=10$ мм²$=10\cdot10^{-6}$ м², $A_3=20$ мм²$=20\cdot10^{-6}$ м². Подставляя значения величин в формулу (2.6), находим нормальные напряжения:

в поперечном сечении нижней ступени

$$\sigma_1=N/A_1=0{,}8\cdot10^3/(16\cdot10^{-6})=50\cdot10^6\ \text{Па}=50\ \text{МПа};$$

в поперечном сечении средней ступени

$$\sigma_2=N/A_2=0{,}8\cdot10^3/(10\cdot10^{-6})=80\cdot10^6\ \text{Па}=80\ \text{МПа};$$

в поперечном сечении верхней ступени

$$\sigma_3=N/A_3=0{,}8\cdot10^3/(20\cdot10^{-6})=40\cdot10^6\ \text{Па}=40\ \text{МПа}.$$

3. Эпюра нормальных напряжений по длине бруса изображена на рис. 2.14, *в*. Построение эпюры не может вызвать затруднений. Нормальные напряжения в поперечных сечениях одной ступени не изменяются. Поэтому эпюра σ для каждой ступени изображается отрезком, параллельным базовой линии; расстояние между этими отрезками и базовой линией пропорционально нормальным напряжениям в сечениях ступени.

§ 2.7. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ. ЗАКОН ГУКА

При растяжении бруса его первоначальная длина l увеличивается на Δl (рис. 2.15, *а*), а первоначальный поперечный размер d уменьшается на Δd (рис. 2.15, *б*). Величина Δl называется абсолютным удлинением бруса, а величина Δd — абсолютным поперечным укорочением. При сжатии бруса его длина укорачивается на Δl, а поперечный размер увеличивается на Δd. Рассматривая любую из этих величин как разность между начальным (до нагружения) и конечным (после нагружения) размерами, им следует приписывать противоположные знаки: при растяжении бруса $\Delta l>0$, $\Delta d<0$, при сжатии $\Delta l<0$, $\Delta d>0$.

О степени деформирования бруса нельзя судить по значениям Δl или Δd, так как последние зависят не только от внешних сил, но и от начальных размеров бруса. Деформирование бруса при растяжении (сжатии) характеризуют величины

$$\varepsilon = \pm \Delta l / l \tag{2.7}$$

и

$$\varepsilon' = \mp \Delta d / d^*, \tag{2.8}$$

где ε — *продольная деформация*; ε' — *поперечная деформация* бруса. Из формул (2.7) и (2.8) видно, что ε и ε' — величины безразмерные.

Экспериментально доказано, что продольная и поперечная деформации пропорциональны друг другу, т. е.

$$|\varepsilon'| = \mu |\varepsilon|, \tag{2.9}$$

где зависящий от материала коэффициент пропорциональности μ называется *коэффициентом Пуассона* **. Его значение для разных материалов колеблется в пределах 0. . .0,5; у пробки $\mu = 0$ (при растяжении или сжатии пробочного брусочка его поперечные размеры практически не изменяются); у каучука (резины) значение μ близко к 0,5 (при растяжении резинового бруса его поперечные размеры заметно уменьшаются, при сжатии — заметно увеличиваются); для стали $\mu = 0{,}25...0{,}3$.

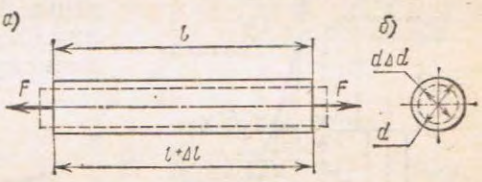


Рис. 2.15

В пределах упругих деформаций между нормальным напряжением и продольной деформацией существует прямо пропорциональная зависимость, носящая название *закона Гука*:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{2.10}$$

Коэффициент пропорциональности E называется модулем упругости, и его значение выражается в единицах напряжения, так как ε — величина безразмерная.

Значения E для некоторых материалов (МПа):

Стали всех марок	$2{,}1 \cdot 10^5$
Медь техническая	$1{,}2 \cdot 10^5$
Бронза оловянистая	$1 \cdot 10^5$
Алюминиевые сплавы	$0{,}7 \cdot 10^5$
Каучук (резина)	$7{,}85 \approx 8$

Модуль упругости характеризует жесткость материала, т. е. способность сопротивляться деформациям: согласно закону Гука [см. формулу (2.10)], при одних и тех же значениях нормального

* Если поперечное сечение бруса — прямоугольник с размерами $a \times b$, то $\varepsilon' = |\Delta a / a| = |\Delta b / b|$.

** Французский ученый С. Д. Пуассон (1781—1840) внес крупный вклад в науку прочности.

напряжения в поперечных сечениях брусьев их продольные деформации ε тем меньше, чем больше модуль упругости E.

Если в равенстве (2.10) заменить ε выражением из формулы (2.7)

$$\sigma = E\,\Delta l/l,$$

то получим выражение

$$\Delta l = \sigma l/E. \qquad (2.11)$$

Заменив здесь σ его выражением из формулы (2.6), получим

$$\Delta l = Nl/AE. \qquad (2.12)$$

Стоящее в знаменателе произведение AE называется жесткостью сечения бруса при растяжении (сжатии), а выражение AE/l — *жесткостью бруса при растяжении*.

При решении некоторых практических задач возникает необходимость наряду с удлинениями при растяжении (сжатии) учитывать также и температурные удлинения $\Delta l_t = \alpha t l$, где α — коэффициент линейного расширения материала. В этом случае

$$\varepsilon = \sigma/E + \alpha t$$

и

$$\Delta l = Nl/AE + \alpha t l. \qquad (2.13)$$

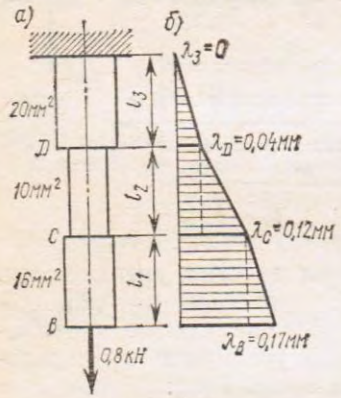


Рис. 2.16

Пример 2.3. Определить полное удлинение бруса, рассмотренного в примере 2.2 (см. рис. 2.14), если длины ступеней бруса $l_1=l_2=l_3=200$ мм, $E=2\times10^5$ МПа.

Решение. 1. При решении задачи в примере 2.2 построена эпюра σ (см. рис. 2.14, *в*), из которой видно, что в поперечном сечении верхней ступени $\sigma_3=40$ МПа$=40\cdot10^6$ Па, средней ступени $\sigma_2=80$ МПа$=80\cdot10^6$ Па и нижней $\sigma_1=50$ МПа$=50\cdot10^6$ Па. Длины ступеней и модуль упругости известны. Поэтому для определения удлинения бруса целесообразно воспользоваться формулой (2.11).

2. Так как $E=2\cdot10^5$ МПа$=2\cdot10^{11}$ Па, $l_1=l_2=l_3=200$ мм$=0{,}2$ м, удлинение ступеней бруса:

верхней $\Delta l_3=\sigma_3 l_3/E=40\cdot10^6\cdot0{,}2/(2\cdot10^{11})=4\cdot10^{-5}$ м$=0{,}04$ мм;
средней $\Delta l_2=\sigma_2 l_2/E=80\cdot10^6\cdot0{,}2/(2\cdot10^{11})=8\cdot10^{-5}$ м$=0{,}08$ мм;
нижней $\Delta l_1=\sigma_1 l_1/E=50\cdot10^6\cdot0{,}2/(2\cdot10^{11})=5\cdot10^{-5}$ м$=0{,}05$ мм.

3. Определив удлинение ступеней, можно построить эпюру перемещений сечений бруса. Для этого рядом с чертежом бруса (рис. 2.16, *а*) параллельно его оси проводим базовую линию, а перемещения сечений будем изображать перпендикулярными ей отрезками, взятыми в определенном масштабе.

Перемещение сечения в заделке равно нулю, т. е. $\lambda_3=0$; перемещение сечения D равно удлинению верхней ступени бруса, т. е. $\lambda_D=\Delta l_3=0{,}04$ мм; перемещение сечения C равно сумме удлинений верхней и средней ступеней бруса, т. е. $\lambda_C=\Delta l_3=\Delta l_2=0{,}04+0{,}08=0{,}12$ мм; перемещение сечений B равно сумме удлинений всех трех ступеней бруса, иначе говоря, это и есть полное удлинение бруса Δl, т. е. $\lambda_B=\Delta l=\Delta l_3+\Delta l_2+\Delta l_1=0{,}04+0{,}08+0{,}05=0{,}17$ мм.

Соединив концы отрезков, изображающих перемещения рассмотренных сечений прямыми, получим эпюру перемещений по всей длине бруса (рис. 2.16, *б*).

§ 2.8. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Напряженное состояние в точке характеризуется всем бесчисленным множеством нормальных и касательных напряжений, возникающих на площадках, которые можно провести через эту точку.

Для исследования напряженного состояния бруса при растяжении силами, действующими вдоль его оси (одноосное растяжение), выберем какую-либо точку B (рис. 2.17, *а*) и изобразим ее в виде малого элемента в форме прямоугольного параллелепипеда отдельно от бруса (рис. 2.17, *б*). Если предположить, что брус состоит из бесконечно большого числа очень тонких продольных волокон и считать, что все эти волокна не надавливают друг на друга, а только растягиваются (гипотеза о ненадавливании волокон), то можно сделать вывод, что на гранях параллелепипеда, параллельных поперечным сечениям бруса, возникают только нормальные напряжения σ, остальные грани от напряжений свободны.

Разрежем выделенный элемент по сечению (на рис. 2.17, *б* оно заштриховано), нормаль On к которому образует с осью x угол α, и отбросим часть элемента правее сечения. Оставленная левая часть (рис. 2.17, *в*) сохраняет равновесие, так как сила σdA, действующая на перпендикулярную оси x площадку dA, уравновешивается силой $p dA_\alpha$, действующей на наклоненную к оси x площадку $dA_\alpha = dA/\cos\alpha$, т. е.

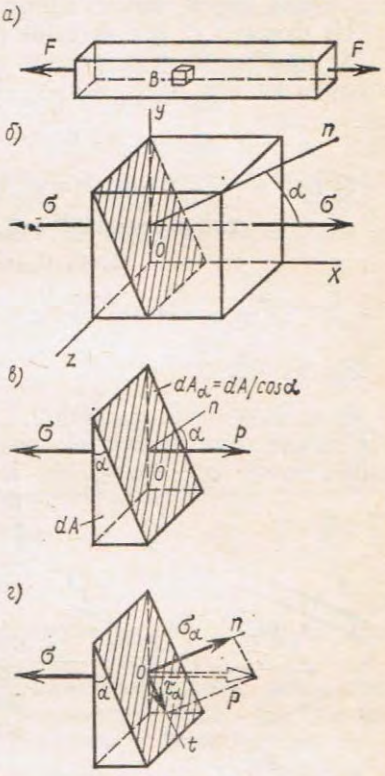


Рис. 2.17

$$\sigma\, dA = p\, dA/\cos\alpha.$$

Следовательно, возникшее на наклонной площадке полное напряжение

$$p = \sigma\cos\alpha. \qquad (2.14)$$

Разложив напряжение p на две составляющие по нормали On и касательной Ot к наклонной площадке (рис. 2.17, *г*), находим

$$\sigma_\alpha = p\cos\alpha \quad \text{и} \quad \tau_\alpha = p\sin\alpha.$$

Подставим сюда вместо p его значение из уравнения (2.14) и с учетом того, что $\sin\alpha\cos\alpha=0{,}5\sin 2\alpha$, получим:

$$\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha; \tag{2.15}$$

$$\tau_\alpha=(\sigma/2)\sin 2\alpha. \tag{2.16}$$

Таким образом, зная нормальное напряжение σ в поперечном сечении растянутого (сжатого) бруса, можно по формулам (2.15) и (2.16) определить нормальное σ_α и касательное τ_α напряжения в сечении бруса, наклоненном к оси бруса под любым углом α.

Из формул (2.15) и (2.16) следует:

а) при $\alpha=0^\circ$ (поперечное сечение бруса)

$$\cos^2\alpha=\cos^2 0^\circ=1,\quad \sin 2\alpha=\sin 0^\circ=0,$$

$$\text{т. е. } \sigma_{0^\circ}=\sigma,\quad \tau_{0^\circ}=0;$$

б) при $\alpha=90^\circ$ (продольное сечение бруса)

$$\cos^2\alpha=\cos 90^\circ=0,\quad \sin 2\alpha=\sin 180^\circ=0,$$

$$\text{т. е. } \sigma_{90^\circ}=0,\quad \tau_{90^\circ}=0;$$

в) при $\alpha=45^\circ$ $\cos^2\alpha=\cos^2 45^\circ=(\sqrt{2}/2)^2=\frac{1}{2}$,

$\sin 2\alpha=\sin 90^\circ=1$,

т. е. $\sigma_{45^\circ}=\sigma/2$, $\tau_{45^\circ}=\sigma/2$.

Значит, при одноосном растяжении максимальное нормальное напряжение $\sigma_{max}=\sigma=N/A$ возникает в поперечных сечениях бруса; максимальное касательное напряжение $\tau_{max}=\tau_{45^\circ}=\sigma/2$ возникает в сечениях, наклоненных к оси бруса под углом 45°.

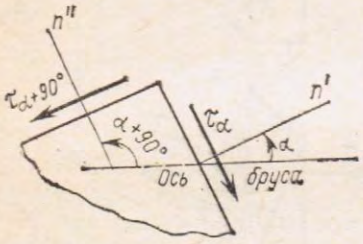


Рис. 2.18

Кроме того, из равенства (2.16) следует, что переход от произвольной площадки с наклоном α к площадке с наклоном $\alpha+90^\circ$ (рис. 2.18) никак не отражается на абсолютном значении касательных напряжений. Действительно, если

$$|\tau_\alpha|=\left|\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha\right|,\quad \text{то } |\tau_{\alpha+90^\circ}|=$$

$$=\left|\frac{\sigma}{2}\sin(2/\alpha)+90^\circ)\right|=\left|\frac{\sigma}{2}\sin(2\alpha+180^\circ)\right|=\left|\frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha\right|=|\tau_\alpha|.$$

Следовательно,

$$|\tau_\alpha|=|\tau_{\alpha+90^\circ}|.$$

Это равенство выражает **закон парности касательных напряжений:** *касательные напряжения, возникающие в двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по модулю и направлены либо от ребра, либо к ребру, образуемому площадками.*

§ 2.9. СТАТИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ. ОСНОВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При выборе материала для какого-либо элемента конструкции в последующих расчетах необходимо знать механические свойства материала, определяющие его прочность, упругость, твердость и пластичность. Необходимые сведения о различных механических свойствах материалов получают экспериментально в процессе механических испытаний на растяжение, сжатие, срез, кручение и изгиб.

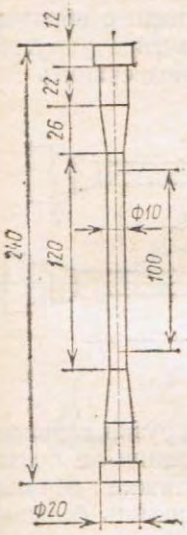


Рис. 2.19

Самыми распространенными являются испытания на растяжение. Для них из испытуемого материала изготовляют стандартные образцы, один из которых изображен на рис. 2.19. Образцы испытывают на разрывных машинах, в которых необходимы осевые нагрузки, растягивают их и доводят до разрыва. Поведение об-

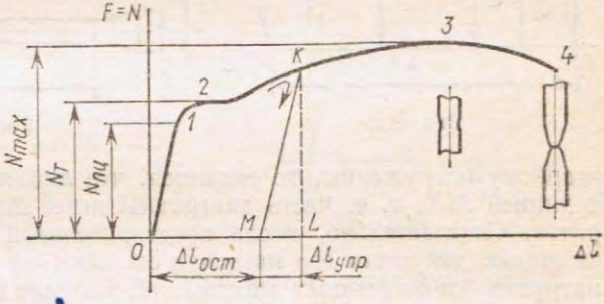


Рис. 2.20

разцов по мере роста нагрузки фиксируется на бумажной ленте с помощью особого записывающего устройства.

На рис. 2.20 изображена примерная диаграмма, записанная при испытании образца из низкоуглеродистой стали. По оси абсцисс в определенном масштабе зафиксирован рост удлинения Δl образца, а по оси ординат — возникающая в его поперечном сечении нормальная сила N, численно равная осевой нагрузке F, прилагаемой к образцу. Характерные точки на диаграмме отмечены цифрами 1, 2, 3 и 4.

В начале испытания (до отметки *1* с ординатой $N_{пц}$) удлинение Δl растет пропорционально силе N, тем самым подтверждается справедливость закона Гука. Далее удлинение Δl возрастает непропорционально силе N. При некотором значении нормальной силы $N_т$ (отметка *2*) образец удлиняется без увеличения нагрузки. Это явление называется текучестью металла.

По окончании стадии текучести материал образца снова начинает сопротивляться нагрузке до отметки *3* с ординатой N_{max}, после которой наблюдается снижение сопротивляемости образца нагрузке. Это обстоятельство объясняется тем, что на образце

начинает появляться местное утончение (шейка) и в дальнейшем диаграмма фиксирует уже растяжение не всего образца, а только его участка в зоне образовавшейся шейки. Момент окончательного разрушения образца отмечен цифрой 4.

Если после перехода через стадию текучести, например в момент, отмеченный на диаграмме точкой K (рис. 2.20), образец разгрузить, то процесс разгрузки изобразится отрезком KM, параллельным отрезку в начале испытания. Как видим, после разгрузки остаточное удлинение $\Delta l_{ост}$ не стало равным удлинению образца, выраженному отрезком OL, а уменьшилось на значение упругого удлинения $\Delta l_{упр}$. Теперь если этот же образец подвергнуть по-

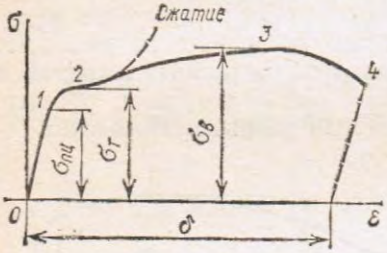


Рис. 2.21

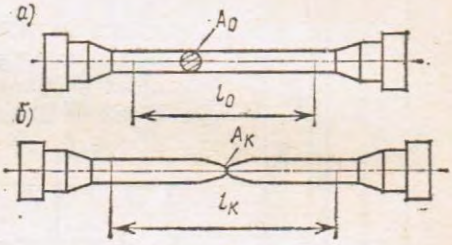


Рис. 2.22

вторному нагружению, то окажется, что линия нагрузки совпадет с линией MK, т. е. часть диаграммы левее этой линии не повторится. Следовательно, после предварительной вытяжки образца за стадию текучести его материал способен воспринимать большие нагрузки без остаточных деформаций. Явление повышения упругих свойств материала в результате предварительной вытяжки выше предела текучести называется *наклепом*.

Нормальные силы, возникающие в образце, и его удлинения не могут служить объективными критериями для оценки свойств материала, так как зависят от абсолютных размеров самого образца.

Чтобы получить механические характеристики материала, диаграмму, снятую при испытании образца, нужно перестроить в *условную диаграмму растяжения* * в координатах (ε, σ), не зависящих от абсолютных размеров образца (рис. 2.21). Для этого все ординаты и абсциссы на диаграмме в координатах (Δl, N) (см. рис. 2.20) необходимо разделить соответственно на начальную расчетную длину l_0 и начальную площадь поперечного сечения A_0 образца (рис. 2.22, *а*).

Разделив ординату $N_{пц}$ на A_0, получим *предел пропорциональности* $\sigma_{пц}=N_{пц}/A_0$, т. е. наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука; разделив ординату $N_т$ на A_0, получим *предел текучести* $\sigma_т=N_т/A_0$, т. е. напряжение, при котором происходит рост пластической деформации при неизменной нагрузке;

* Диаграмма зависимости напряжения от деформации впервые была построена Я. Бернулли (1654—1705).

разделив N_{max} на A_0, получим *предел прочности (временное сопротивление)* $\sigma_в = N_{max}/A_0$, т. е. условное напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой образцом до разрушения.

При испытании некоторых пластических материалов (среднеуглеродистая сталь, медь, алюминий) на диаграмме растяжения не образуется ясно выраженной стадии текучести (рис. 2.23). Для таких материалов вводится условный предел текучести, равный напряжению, при котором продольная деформация образца $\varepsilon = 0{,}002$, т. е. 0,2%. Условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$.

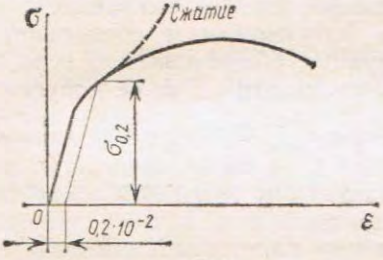


Рис. 2.23



Рис. 2.24

Пластичные свойства материала оцениваются остаточной деформацией при разрыве

$$\delta = [(l_к - l_0)/l_0]\,100\,\%,$$

где $l_к$ и l_0 — длины расчетной части образца после разрыва и до начала испытания (рис. 2.22, *б*).

При испытании на сжатие пластические материалы до предела текучести ведут себя так же, как и при растяжении, но далее пластическая деформация растет медленнее. Образец постепенно сплющивается. На рис. 2.21 и 2.23 зависимость между σ и ε при сжатии образцов показана штриховой линией.

При испытании хрупких материалов (например, чугунных образцов) установлено, что они способны выдерживать гораздо большие нагрузки при сжатии, чем при растяжении. Вид диаграмм при испытании чугунных образцов показан на рис. 2.24. Сплошной линией изображена зависимость между σ и ε при растяжении, штриховой линией — при сжатии. По этим диаграммам определяют пределы прочности при растяжении ($\sigma_{вр}$) и при сжатии ($\sigma_{вс}$). Для хрупких материалов

$$\sigma_{вс} > \sigma_{вр}.$$

Аналогичная диаграмма, но с более высокими ординатами, получается для закаленных сталей.

§ 2.10. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

При проектировании элемента конструкции необходимо определить размеры, обеспечивающие его безопасную работу при заданных нагрузках. Для успешного решения этой задачи необходимо исходить из того, чтобы наибольшее расчетное напряжение в поперечном сечении элемента конструкции, возникшее при заданной нагрузке, было ниже того предельного напряжения, при котором возникает опасность появления пластической деформации или опасность разрушения.

Отношение предельного напряжения $\sigma_{пред}$ к расчетному σ называется *коэффициентом запаса прочности* s:

$$s = \sigma_{пред}/\sigma. \tag{2.17}$$

При расчете элемента конструкции коэффициент запаса прочности задается заранее. Задаваемый заранее коэффициент запаса называется *нормативным* или *допускаемым* и обозначается $[s]$.

Прочность элемента конструкции обеспечивается, если действительный коэффициент запаса прочности не ниже допускаемого, т. е.

$$s \geqslant [s]. \tag{2.18}$$

Неравенство (2.18) выражает условие прочности элемента конструкции.

Разделив предельное напряжение на нормативный коэффициент запаса, получим *допускаемое напряжение* $[\sigma]$:

$$\sigma_{пред}/[s] = [\sigma]. \tag{2.19}$$

Тогда условие прочности можно выразить неравенством

$$\sigma \leqslant [\sigma], \tag{2.20}$$

т. е. прочность элемента конструкции обеспечивается, если наибольшее напряжение, возникающее в нем, не превышает допускаемого.

Для пластических материалов как при растяжении, так и при сжатии предельным напряжением является предел текучести $\sigma_т$. Поэтому для них допускаемое напряжение получают, исходя из предела текучести $\sigma_т$:

$$[\sigma] = \sigma_т/[s], \tag{2.21}$$

причем в этом случае $[s]=1{,}4...2$.

Для хрупких материалов допускаемое напряжение растяжения $[\sigma_р]$ и допускаемое напряжение сжатия $[\sigma_с]$ получают, исходя из пределов прочности $\sigma_{вр}$ или $\sigma_{вс}$:

$$[\sigma_р] = \sigma_{вр}/[s] \quad и \quad [\sigma_с] = \sigma_{вс}/[s], \tag{2.22}$$

в этом случае $[s]=2{,}5...5$, а иногда и выше.

Условие прочности (2.20) применительно к расчетам на прочность при растяжении (сжатии) записывается в таком виде:

$$\sigma = N/A \leqslant [\sigma]. \tag{2.23}$$

Исходя из этого условия, производят три вида расчетов.

Проектный расчет. При этом расчете известны нагрузки, действующие на брус, заданы или выбраны материал, допускаемое напряжение $[\sigma]$ или нормативный запас прочности $[s]$. Размеры поперечного сечения бруса, обеспечивающие требуемую прочность, определяем следующим образом: полагая $\sigma=[\sigma]$, из уравнения (2.23) получаем расчетную формулу

$$A \geqslant N/[\sigma]. \tag{2.24}$$

Определив из этой формулы требуемую площадь поперечного сечения, в зависимости от формы (круг, квадрат и др.) находим его размеры.

Определение допускаемой нагрузки. В этом случае известны размеры бруса и его материал, а требуется определить максимально допустимую нагрузку. Для этого, приняв $\sigma=[\sigma]$, из условия (2.23) находим

$$[N] \leqslant A[\sigma]. \tag{2.25}$$

Затем с помощью метода сечения по найденному допускаемому значению продольной силы $[N]$ определяем допускаемое значение нагрузки.

Проверочный расчет. При этом расчете нагрузка бруса, его материал и размеры известны и требуется проверить, выполняется ли условие (2.23). Для этого определяем наибольшее расчетное напряжение $\sigma=N/A$ в поперечном сечении бруса и сравниваем с допускаемым. Наибольшее расчетное напряжение не должно быть больше допускаемого, расчетное напряжение считают неопасным, если оно превышает допускаемое, но не более чем на 5%. Поперечное сечение бруса, в котором возникает наибольшее расчетное напряжение при растяжении (сжатии), называется *опасным*.

Пример 2.4. Проверить прочность бруса, рассмотренного в примере 2.2, если материал бруса — сталь Ст3 ($\sigma_т=240$ МПа), а допускаемый коэффициент запаса прочности $[s]=1{,}5$.

Решение 1. 1. Зная, что в данном случае предельное напряжение $\sigma_{пред}=\sigma_т=240$ МПа, а наибольшее расчетное напряжение $\sigma=80$ МПа, находим действительный коэффициент запаса прочности:

$$s=\sigma_{пред}/\sigma=240/80=3.$$

2. Допускаемый коэффициент запаса $[s]=1{,}5$, значит

$$s=3 > [s]=1{,}5.$$

Условие прочности выполняется.

Решение 2. 1. Из решения примера 2.2 известно, что наибольшее расчетное напряжение $\sigma=80$ МПа возникает в поперечных сечениях средней ступени.

2. Находим допускаемое напряжение для бруса по формуле (2.21):

$$[\sigma]=\sigma_т/[s]=240/1{,}5=160 \text{ МПа}.$$

3. $\sigma=80$ МПа $<[\sigma]=160$ МПа.

Условие прочности выполняется, но брус нагружен лишь на 50%.

Пример 2.5. Однородная жесткая плита AB силой тяжести $G=1{,}2$ кН нагружена силой $F=8$ кН (рис. 2.25, *а*). Определить из условия прочности диаметр стержня CD, удерживающего плиту в горизонтальном положении; $\alpha=45°$, $[\sigma]=150$ МПа.

Решение. 1. Применяя метод сечений, рассечем стержень CD. Отбросив верхнюю его часть вместе с шарниром D, заменим их действие на оставшуюся часть нормальной силой N (рис. 2.25, *б*). Сила тяжести плиты приложена посередине ее длины.

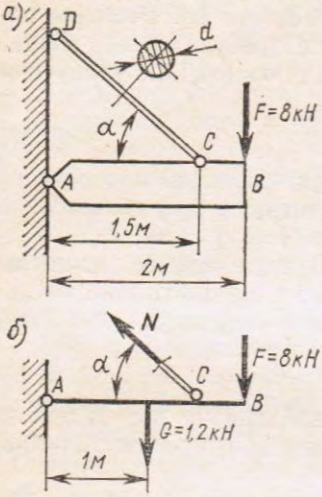


Рис. 2.25

2. Для определения силы N составим уравнение моментов относительно точки A всех сил, действующих на плиту:

$$-G \cdot AB/2 + N \cdot AC \sin\alpha - F \cdot AB = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{G \cdot AB/2 + F \cdot AB}{AC \sin\alpha} = \frac{1{,}2 \cdot 1 + 8 \cdot 2}{1{,}5 \sin 45^\circ} = 16{,}2 \text{ кН}.$$

3. Площадь поперечного сечения стержня, обеспечивающую его прочность, находим по расчетной формуле (2.24), имея в виду, что $N = 16{,}2$ кН $= 16{,}2 \cdot 10^3$ Н и $[\sigma] = 150$ МПа $= 150 \cdot 10^6$ Па:

$$A \geqslant N/[\sigma] = 16{,}2 \cdot 10^3/(150 \cdot 10^6) = 0{,}108 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 108 \text{ мм}^2.$$

4. Из формулы площади круга находим диаметр стержня:

$$d = \sqrt{4A/\pi} = \sqrt{4 \cdot 108/\pi} = 11{,}8 \text{ мм}.$$

Округляя до четного числа, принимаем значение диаметра $d = 12$ мм.

Пример 2.6. Из условия прочности стержней *1* и *2* рычажного механизма (рис. 2.26, *а*) определить допускаемую нагрузку F, если диаметры стальных стержней $d = 4$ мм и $[\sigma] = 140$ МПа.

Решение. 1. По расчетной формуле (2.25), выражая d в м и $[\sigma]$ в Па, находим максимально допускаемое значение продольной силы:

$$[N] = A[\sigma] = (\pi d/4)^2 [\sigma] = (\pi \cdot 0{,}004^2/4)\, 140 \cdot 10^6 = 1760 \text{ Н}.$$

2. Нормальные силы в поперечных сечениях стержней, возникающие при эксплуатации механизма, выразим через нагрузку F. Для этого рассечем оба стержня и изобразим (рис. 2.26, *б*, *в*) рычаги DEC и AB отдельно друг от друга.

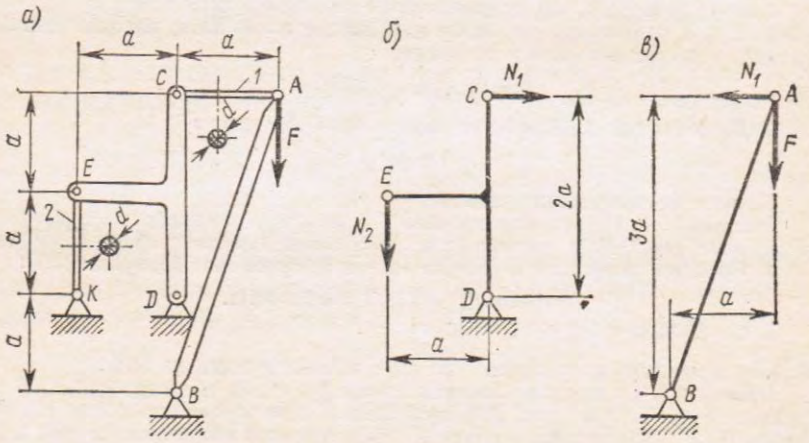


Рис. 2.26

Нормальные силы N_1 и N_2 в стержнях рассматриваем как реакции связей, приложенные к рычагам.

3. Из условия равновесия рычага AB (рис. 2.26, *в*), т. е. из уравнения моментов сил $N_1 3a - Fa = 0$ относительно точки B, имеем

$$N_1 = F/3.$$

Из условия равновесия рычага DEC (рис. 2.26, *б*), т. е. из уравнения моментов сил $N_2 a - N_1 2a = 0$ относительно точки D, получим

$$N_2 = 2N_1 = (2/3)\,F.$$

4. Значение допускаемой нагрузки определяем исходя из условия прочности более нагруженного стержня 2: $[N_2] = (2/3)F = 1760$ Н, откуда

$$[F] = 3 \cdot 1760/2 = 2640 \text{ Н}.$$

При этой нагрузке механизма стержень 1 недогружен. По формуле $\sigma_1 = N_1/A$ легко подсчитать, что в поперечном сечении стержня *1* нормальное напряжение

$$\sigma_1 = 70 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70 \text{ МПа}.$$

§ 2.11. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Механическая система, для которой реакции связей и внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью уравнений равновесия и метода сечений, называется *статически неопределимой*. Статически неопределимые системы отличаются от статически определимых бóльшим числом наложенных связей.

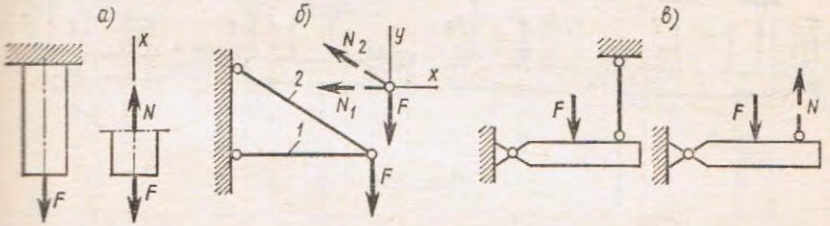


Рис. 2.27

На рис. 2.27 показаны статически определимые системы, нормальные силы N в которых определяются с помощью одного уравнения проекций на ось x (*а*), двух уравнений проекций на оси x и y (*б*), одного уравнения моментов относительно неподвижного шарнира (*в*). На рис. 2.28 показаны статически неопределимые системы. Нормальная сила N в поперечном сечении бруса, жестко заделанного с обоих концов (рис. 2.28, *а*), не может быть определена из уравнения проекций на ось x, так как в него входят две неизвестные величины — нормальная сила N и реакция R. Системы с числом неизвестных сил, на единицу превышающих число уравнений статики, которые можно составить для этой системы, называются один раз статически неопределимыми. Чтобы решить задачу, необходимо составить дополнительное уравнение перемещений из условия, что общая длина бруса остается неизменной.

Система на рис. 2.28, *б* также один раз статически неопределима, так как в два уравнения проекций сил, которые можно составить

в данном случае, входят три неизвестные величины: N_1, N_2 и N_3. Система на рис. 2.28, *в* два раза статически неопределима — в те же два уравнения статики входят четыре неизвестные. Для решения этих задач в первом случае нужно составить одно дополнительное уравнение перемещений, а во втором — два, исходя из условия, что при изменении длины стержней узел A остается для них общим.

Система на рис. 2.28, *г* один раз статически неопределима и к уравнению моментов сил относительно точки A, содержащему две неизвестные силы (N_1 и N_2), нужно дополнительно составить одно уравнение перемещений. На рис. 2.28, *д* изображена два раза ста-

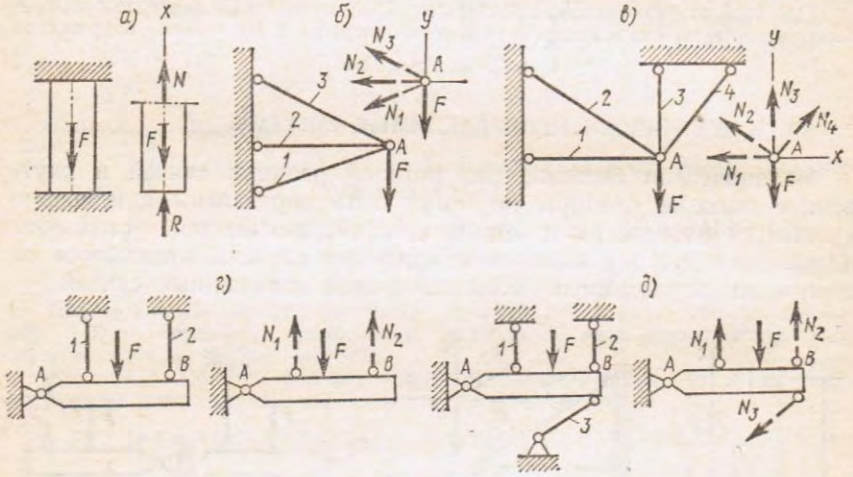


Рис. 2.28

тически неопределимая система и дополнительных уравнений перемещений необходимо составить два. В подобных случаях уравнения перемещений составляют из условия, что места закрепления стержней на жесткой балке AB остаются на одной прямой.

Вообще говоря, если число неизвестных сил системы на n превышает число уравнений статики, которые можно составить для нее, то система называется n раз статически неопределимой и для решения задачи необходимо составить n уравнений перемещений.

Пример 2.7. Брус постоянного поперечного сечения площадью A жестко закреплен с обоих концов и нагружен силой F, как показано на рис. 2.29, *а*. Определить напряжения, возникшие в поперечных сечениях верхней и нижней частях бруса.

Решение. 1. Действие связей на брус изобразим реакциями R_1 и R_2 (рис. 2.29, *б*). Для образовавшейся системы сил составим уравнение статики

$$R_1 + R_2 = F,$$

в которое входит две неизвестные силы. Система один раз статически неопределима.

2. Под действием силы F верхняя часть бруса растянулась на Δl_1, а нижняя часть укоротилась на Δl_2 (рис. 2.29, *в*, *г*, *д*). Так как общая длина бруса осталась

неизменной, то

$$|\Delta l_1| = |\Delta l_2|.$$

Это и есть уравнение перемещений.

3. Из рис. 2.29, *г*, *д* следует, что

$$|\Delta l_1| = \left|\frac{N_1 a}{AE}\right| = \left|\frac{R_1 a}{AE}\right| \quad \text{и} \quad |\Delta l_2| = \left|\frac{N_1 (l-a)}{AE}\right| = \left|\frac{R_2 (l-a)}{AE}\right|.$$

Левые части этих равенств равны между собой, значит равны и правые части, т. е.

$$R_1 a = R_2 (l-a).$$

4. Решая это уравнение совместно с уравнением статики, находим

$$R_1 = F(l-a)/l \text{ и } R_2 = Fa/l.$$

5. Напряжения в поперечных сечениях верхней (растянутой) части бруса

$$\sigma_1 = N_1/A = R_1/A = F(l-a)/(Al).$$

6. Напряжения в поперечных сечениях нижней (сжатой) части бруса

$$\sigma_2 = N_2/A = -R_2/A = -Fa/(Al).$$

7. Сопоставляя полученные значения напряжений в частях бруса, легко заметить, что

$$|\sigma_1|/|\sigma_2| = (l-a)/a.$$

8. Эпюра напряжений по длине бруса показана на рис. 2.29, *е*.

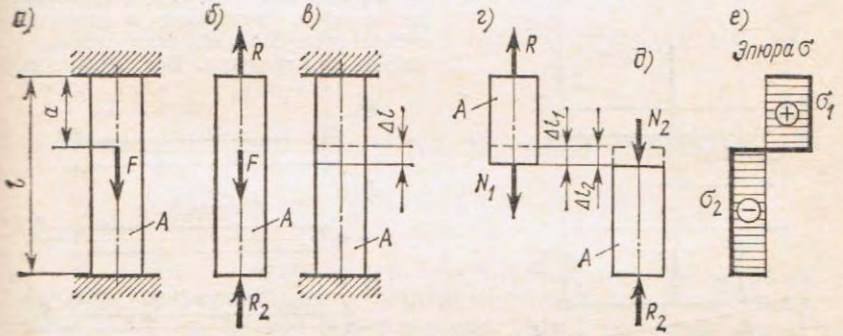


Рис. 2.29

Пример 2.8. Жесткий брус удерживается в равновесии двумя стальными стержнями круглого поперечного сечения одного и того же диаметра (рис. 2.30, *а*). Определить необходимые диаметры этих стержней, если $[\sigma] = 150$ МПа.

Решение. 1. Рассекая стержни и заменяя действие их отброшенных частей на жесткий брус нормальными силами N_1 и N_2, получаем расчетную схему (рис. 2.30, *б*), для которой запишем уравнение статики (уравнение моментов сил относительно точки A):

$$N_1 \cdot OB - F \cdot OC + N_2 \cdot OD = 0.$$

После подстановки числовых значений всех известных величин ($F = 80$ кН, $OB = 0{,}4$ м, $OC = 1$ м и $OD = 2$ м) уравнение статики примет вид

$$N_1 + 5N_2 = 200.$$

2. Под действием силы F стержни 1 и 2 удлинятся соответственно на $\Delta l_1 = N_1 l_1/AE$ и $\Delta l_2 = N_2 l_2/AE$ (рис. 2.30, *б*).

Из подобия треугольников OBB_1 и ODD_1 получим уравнение перемещений

$$\Delta l_1/\Delta l_2 = OB/OD.$$

Подставив сюда выражения Δl_1, Δl_2 из п. 2, *а* также числовые значения $l_1=1$ м, $l_2=1{,}5$ м, $AB=0{,}4$ м и $AD=2$ м, получим

$$N_1 \cdot 1/(N_2 \cdot 1{,}5)=0{,}4/2, \text{ откуда } N_1=0{,}3N_2.$$

3. Решив совместно уравнения статики и перемещений, найдем

$$N_2=37{,}7 \text{ кН и } N_1=11 \text{ кН}.$$

4. Из условия прочности более нагруженного стержня 2 по расчетной формуле (2.24) находим требуемую площадь поперечного сечения:

$$A_2=\frac{N_2}{[\sigma]}=\frac{37{,}7 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6}=0{,}251 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2=251 \text{ мм}^2.$$

5. Диаметр стержня

$$d_2=\sqrt{4A/\pi}=\sqrt{4 \cdot 251/\pi}=17{,}9 \text{ мм}^2.$$

6. Округляя до четного числа, принимаем $d_1=d_2=d=18$ мм.

В статически неопределимых системах иногда необходимо считаться с напряжениями, возникающими при изменении температуры системы в целом или отдельных ее элементов. Так, например, в стержне, жестко заделанном с обоих концов в неподатливых стенках (рис. 2.31, *а*), при нагревании возникают напряжения сжатия (рис. 2.31, *б*), а при охлаждении — напряжения растяжения (рис. 2.31, *в*).

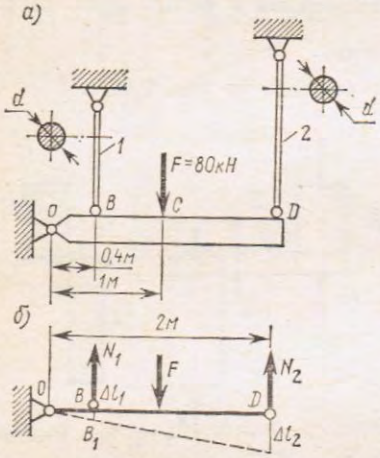


Рис. 2.30

Пример 2.9. Определить, какие внутренние силы возникнут в стержневой системе (рис. 2.32, *а*), если стержень *2* нагреть на t градусов. Все стержни изго-



Рис. 2.31

товлены из одного материала и имеют одинаковые площади поперечных сечений.

Решение. 1. При деформировании системы в стержнях возникают нормальные силы N_1, N_2 и N_3. Выбрав оси x и y, как показано на рис. 2.32, *б*, составим два уравнения статики:

$$-N_1 \sin \beta+N_3 \sin\beta=0,$$
$$N_1 \cos \beta+N_2+N_3 \cos \beta=0.$$

Из первого уравнения ясно, что $N_1=N_3$. Поэтому второе уравнение статики примет вид

$$N_2=-2N_1 \cos \beta.$$

2. При нагревании стержень *2* удлиняется на Δl_2 и вытягивает стержни *1* и *3* соответственно на Δl_1 и Δl_2 (рис. 2.32, *в*).

Так как стержни изготовлены из одного материала, имеют одинаковые площади поперечных сечений и длины, то при $N_1=N_3$ удлинения стержней *1* и *3* также равны между собой, т. е. $\Delta l_1=\Delta l_3$. Из рис. 2.32, *в* получаем уравнение пере-

мещений

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \beta.$$

3. Удлинение первого (и третьего) стержня происходит под действием силы, действующей со стороны стержня *2*. Поэтому

$$\Delta l_1 = N_1 l_1 / AE = \\ = N_1 \cdot l_2 / (AE \cos \beta).$$

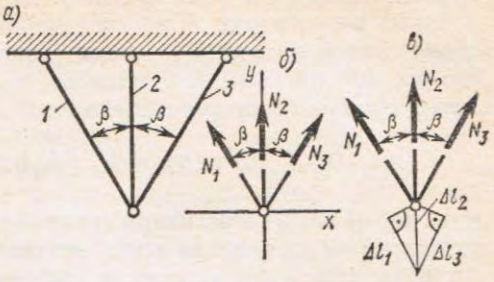


Рис. 2.32

Удлинение второго стержня происходит под влиянием температуры и действия на него стержней *1* и *3*. Поэтому по формуле (2.13) находим

$$\Delta l_2 = N_2 l_2 / AE + \alpha l_2 t.$$

4. Подставляя значения Δl_1 и Δl_2 в уравнение перемещений из п. 2, получаем

$$N_1 / (AE \cos \beta) = N_2 \cos \beta / AE + \alpha t \cos \beta.$$

5. Решая уравнение перемещений совместно с уравнением статики из п. 1, находим

$$N_1 = N_3 = \frac{AE\alpha t \cos^2 \beta}{1 + 2\cos^3 \beta} \text{ и } N_2 = -\frac{2AE\alpha t \cos^3 \beta}{1 + 2\cos^3 \beta}.$$

Таким образом, стержень *2* сжат, а стержни *1* и *3* растянуты.

Глава 3
ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ НА СРЕЗ И СМЯТИЕ

§ 2.12. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ФОРМУЛЫ

Если два бруса соединить между собой штифтом, а затем нагрузить направленными в противоположные стороны силами F (рис. 2.33, *а*), то при значительных силах или небольшом диаметре штифта он может быть разрушен по сечению, расположенному в плоскости соприкасания поверхностей соединяемых брусьев (рис. 2.33, *б*). Такое разрушение соединительных деталей (штрифта, болта, шпильки, заклепки, шпонки), происходящее под действием нагрузок, перпендикулярных их собственным осям (поперечные нагрузки), называется *срезом*.

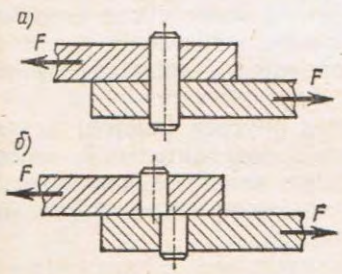


Рис. 2.33

Практические расчеты соединительных деталей на срез носят условный характер и основываются на трех допущениях: в поперечном сечении возможного среза детали возникает только один внутренний силовой фактор — поперечная сила Q; касательные на-

пряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по сечению равномерно; если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и др.), то считается, что все они нагружены одинаково. Исходя из этих допущений условие прочности при расчете на срез запишется в таком виде:

$$\tau_{ср} = Q/(iA_{ср}) \leqslant [\tau_{ср}], \qquad (2.26)$$

где $\tau_{ср}$ — расчетное напряжение среза в поперечном сечении детали; Q — поперечная сила, возникающая в этом сечении; $A_{ср}$ — площадь поперечного сечения срезаемой детали (площадь среза); i — число соединительных деталей; $[\tau_{ср}]$ — допускаемое напряжение при расчетах на срез, зависящее от материала соединительной детали и условий работы конструкции.

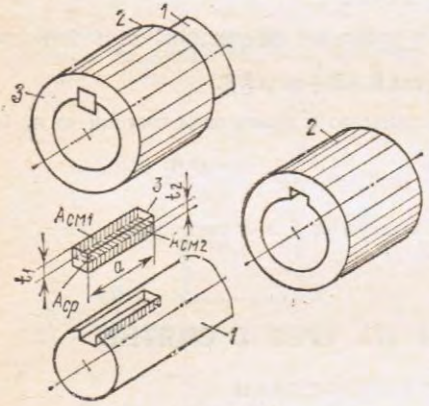


Рис. 2.34

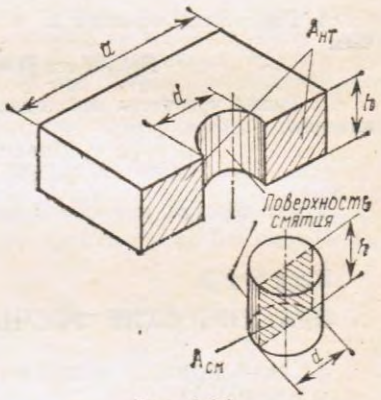


Рис. 2.35

При расчете болтов, штифтов, шпонок и прочего принимают $[\tau_{ср}] = (0{,}25...0{,}35)\sigma_т$ или $[\tau_{ср}] = (0{,}55...0{,}60)\ [\sigma]$.

Из условия прочности (2.26) можно производить три вида расчетов: а) проверочный; б) проектный (определение числа соединительных деталей при заданных размерах либо определение размеров детали при заданном их числе); в) определение допускаемой нагрузки.

При небольшой толщине соединяемых брусьев (листов) и значительной нагрузке между поверхностью соединительной детали и стенками отверстия возникает большое взаимное давление, в результате которого стенка отверстия может обмяться, форма отверстия изменится и соединение разрушится.

Давление, возникшее между поверхностями соединительной детали и отверстия, называется напряжением смятия $\sigma_{см}$.

Расчеты на смятие, так же как и расчеты на срез, носят условный характер. Считают, что силы давления распределены по поверхности смятия равномерно и перпендикулярны им. Отсюда

условие прочности на смятие имеет такой вид:

$$\sigma_{см} = F/(iA_{см}) \leqslant [\sigma_{см}], \qquad (2.27)$$

где F/i — нагрузка на один соединительный элемент (i — число элементов); $A_{см}$ — площадь смятия; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение смятия. Для низкоуглеродистой стали $[\sigma_{см}]=60...120$ МПа.

Если поверхность смятия плоская, как, например, при соединении вала *1* и втулки *2* призматической шпонкой *3* (рис. 2.34), то площадь смятия определяется непосредственно как произведение длины на ширину:

$$A_{см_1} = t_1 a \quad \text{и} \quad A_{см_2} = t_2 a.$$

Если поверхность смятия цилиндрическая, то в расчетную формулу (2.27) подставляется условная площадь смятия, равная площади проекции поверхности на диаметральную плоскость. На рис. 2.35 условная площадь смятия $A_{см}=dh$.

Кроме проверки деталей на смятие при относительно небольшой ширине соединяемых листов или пластин их проверяют на разрыв по поперечному сечению, ослабленному отверстиями. На рис. 2.35 площадь ослабленного поперечного сечения (площадь «нетто») $A_{нт}=(a-d)h$.

§ 2.13. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 2.10. Проверить прочность стержня на растяжение, его головки на срез и опорной поверхности под головкой на смятие (рис. 2.36, *а*), если $[\sigma_р]=110$ МПа, $[\tau_{ср}]=60$ МПа и $[\sigma_{см}]=120$ МПа.

Решение. 1. Диаметр стержня $d=5$ мм$=0{,}005$ м; следовательно, площадь поперечного сечения стержня $A=\pi d^2/4=\pi(5\cdot10^{-3})^2/4=19{,}7\cdot10^{-6}$ м^2, а нормальная сила в этом сечении $N=2$ кН$=2000$ Н.

По формуле (2.23) рабочее напряжение в поперечном сечении

$$\sigma = N/A = 2000/(19{,}7\cdot10^{-6}) = 102\cdot10^6 \text{ Па} = 102 \text{ МПа} < [\sigma_р].$$

2. Головка стержня может быть срезана по цилиндрической поверхности диаметром $d=5\cdot10^{-3}$м и высотой $h=2\cdot10^{-3}$м (рис. 2.36, *б*), т. е. $A_{ср}=\pi dh=\pi\cdot5\cdot2\cdot10^{-6}=31{,}4\cdot10^{-6}$ м^2. Следовательно, по формуле (2.26) при $Q=F$ рабочее напряжение среза

$$\tau_{ср} = Q/A_{ср} = 2000/(31{,}4\cdot10^{-6}) = 63{,}8\cdot10^6 \text{ Па} = 63{,}8 \text{ МПа} > [\tau_{ср}].$$

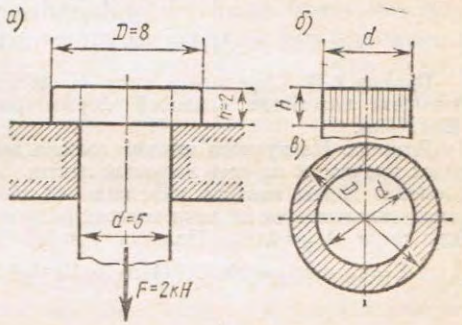


Рис. 2.36

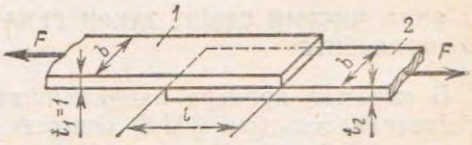


Рис. 2.37

Перегрузка составляет (3,8/60) 100%=6,33%, что недопустимо. Необходимо либо снизить нагрузку, либо взять стержень с более высокой головкой.

3. Поверхность контакта между головкой стержня и опорой имеет форму плоского кольца (рис. 2.36, *в*), т. е. $A_{см}=\pi(D^2-d^2)/4$. Рабочее напряжение смятия по формуле (2.27)

$$\sigma_{см}=\frac{F}{\pi(D^2-d^2)/4}=\frac{2000\cdot4}{\pi(8^2-5^2)\,10^{-6}}=65\cdot10^6\ \text{Па}=65\ \text{МПа}<[\sigma_{см}].$$

Пример 2.11. Дюралюминиевая пластина *1* толщиной $t_1=1$ мм склеена карбинольным клеем со стеклопластиковой пластиной *2* (рис. 2.37). Определить толщину t_2 пластинки *2*, ширину b обеих пластинок и длину l клеевого шва, если $F=500$ Н, допускаемые напряжения: для дюралюминия $[\sigma_р]_д=100$ МПа, для стеклопластика $[\sigma_р]_с=75$ МПа, для клеевого шва $[\tau_{ср}]_{кл}=5$ МПа.

Решение. 1. Находим ширину b листов из условия прочности дюралюминиевого листа. Поперечное сечение листа *1* — прямоугольник площадью $A_1=t_1b$, нормальная сила в этом сечении N_1F. По расчетной формуле (2.24), $t_1b\geqslant N_1/[\sigma_р]_д$, откуда

$$b\geqslant N_1/[(\sigma_р]_д\,t_1)=500/(100\cdot10^6\cdot1\cdot10^{-3})=$$
$$=5\cdot10^{-3}\ \text{м}=5\ \text{мм}.$$

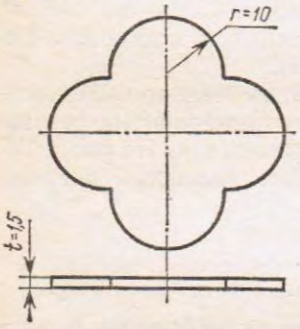


Рис. 2.38

2. Толщину t_2 листа *2* находим из условия его прочности. Площадь поперечного сечения $A_2=t_2b$; продольная сила N_2F. По формуле (2.24), $t_2b\geqslant N_2/[\sigma_р]_с$, откуда

$$t_2\geqslant N_2/([\sigma_р]_с\,b)=500/(75\cdot10^6\cdot5\cdot10^{-3})=$$
$$=1{,}33\cdot10^{-3}\ \text{м}=1{,}33\ \text{мм}.$$

3. Длину клеевого шва определяем из условия прочности соединения на срез. Площадь клеевого шва $A_{кл}=bl$. Сдвигающая сила $Q=F$. Из условия прочности (2.26), полагая $\tau_{ср}=[\tau_{ср}]$ и $A_{ср}=A_{кл}$, имеем $bl\geqslant Q/[\tau_{ср}]_{кл}$, откуда

$$l\geqslant Q/(b\,[\tau_{ср}]_{кл})=500/(5\cdot10^{-3}\cdot5\cdot10^6)=20\cdot10^{-3}\ \text{м}=20\ \text{мм}.$$

Пример 2.12. Определить силу F, действующую на пуансон штампа при штамповке пластинок заданной формы (рис. 2.38) из латунной ленты ($\tau_в=240$ МПа).

Решение. На пуансон штампа должна действовать сила $F=\tau_в A_{ср}$, где $\tau_в$ — предел прочности на срез латунной ленты, $A_{ср}$ — площадь среза, равная произведению длины контура пластинки на толщину листа. Длина контура пластинки складывается из длин четырех полуокружностей радиуса r. Значит, площадь среза $A_{ср}=4\pi rt_1$. Полагая $\tau_в=240\cdot10^6$ Па, определяем силу F:

$$F=\tau_в\cdot4\pi rt_1=240\cdot10^6\cdot4\cdot\pi\cdot10\cdot10^{-3}\cdot1{,}5\cdot10^{-3}=45\,300\ \text{Н}=45{,}3\ \text{кН}.$$

Глава 4
КРУЧЕНИЕ

§ 2.14. ЧИСТЫЙ СДВИГ. ЗАКОН ГУКА ПРИ СДВИГЕ

В качестве примера напряженного состояния в точке бруса рассматривалось (см. § 2.8) одноосное напряженное состояние и в связи с этим был установлен закон парности касательных напряжений. Рассмотрим еще одно напряженное состояние, носящее название *чистый сдвиг* (рис. 2.39, *а*). При чистом сдвиге на четы-

рех гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения, а две грани свободны от напряжений. Согласно закону парности, касательные напряжения τ на всех четырех площадях равны по абсолютной величине, но направлены по смежным граням либо от ребра, либо к ребру. Легко доказать, что выделенный элемент при сдвиге находится в равновесии (рис. 2.39, *а*).

На вертикальных площадках $dA_в = dz \cdot dy$ действуют силы $\tau(dz \cdot dy)$, образующие пару с моментом относительно оси z

$$\tau(dz \cdot dy)\, dx;$$

на горизонтальных площадках $dA_г = dx \cdot dz$ действуют силы $\tau(dx \cdot dz)$, образующие пару с моментом относительно оси z

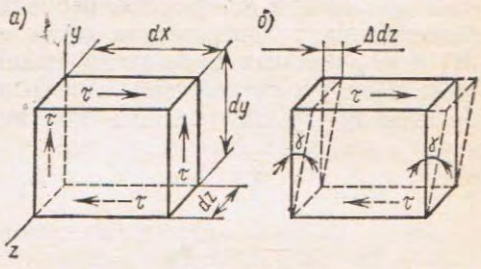


Рис. 2.39

$$-\tau(dx \cdot dz)\, dy,$$

а алгебраическая сумма моментов пар относительно оси z

$$\tau\, dz \cdot dy \cdot dx - \tau\, dx \cdot dz \cdot dy = 0.$$

Деформация сдвига состоит в том, что под действием внешних сил первоначальная форма выделенного элемента искажается (рис. 2.39, *б*), т. е., например, горизонтальные площадки сдвигаются относительно друг друга на расстояние Δdz, называемое абсолютным сдвигом, и угол $\pi/2$ между смежными площадками изменяется на величину γ. Этот угол не зависит от размеров выделенного элемента, поэтому он является мерой деформации сдвига и называется *углом сдвига* или *угловой деформацией*. Установлено, что касательные напряжения и угол сдвига в пределах упругих деформаций связаны между собой прямой пропорциональной зависимостью

$$\tau = G\gamma, \qquad (2.28)$$

которая называется законом Гука при сдвиге. Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига* и характеризует жесткость материала при сдвиге.

Для одного и того же материала между модулем упругости E, модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ существует следующая зависимость:

$$G = E/[2(1+\mu)]. \qquad (2.29)$$

По этой формуле, зная E и μ, легко найти G. Например, для стали $\mu = 0{,}25$ и $G_{ст} = 0{,}4E_{ст}$. Обычно для стали принимают $G = 0{,}8 \cdot 10^5$ МПа.

§ 2.15. КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР

Кручением называется такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — крутящий момент. Чтобы получить такой вид нагружения в простейшем случае, брус необходимо нагрузить действующими в плоскостях, перпендикулярных его оси, и в противоположных направлениях двумя парами сил (2.40, *а*), моменты M_1 и M_2 которых называются внешними скручивающими моментами. Для упрощения дальнейшего изложения считаем, что алгебраическая сумма внешних моментов, приложенных к брусу,

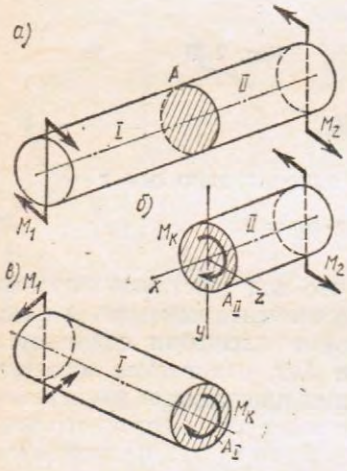


Рис. 2.40

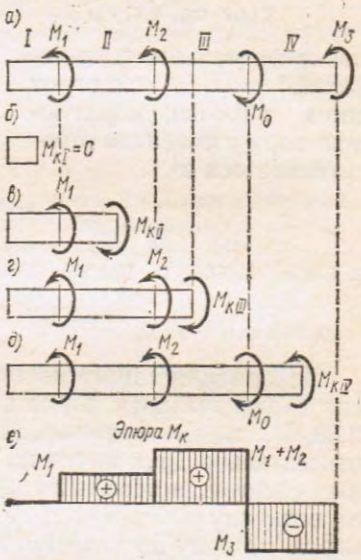


Рис. 2.41

равна нулю, т. е. брус находится в равновесии (в состоянии покоя или равномерного вращения).

Разрежем брус по сечению A на части I и II (рис. 2.40, *а*) и, отбросив часть I, рассмотрим равновесие оставленной части II. Из рис. 2.40, *б* видим, что равновесие обеспечивается возникновением только крутящего момента $M_к$; алгебраические суммы проекций внешних сил, образующих пару, на каждую из осей равны нулю, равны нулю и моменты пары сил относительно осей y и z. Следовательно, из равенства (2.1) получим

$$N=0; \quad Q_y=0; \quad Q_z=0; \quad M_z=0; \quad M_y=0$$

и лишь крутящий момент

$$M_к=M_2.$$

Разрезав брус по сечению A и отбросив часть II (рис. 2.40, *в*), видим, что в сечении A_I крутящий момент $M_к=M_1$ ни численно, ни по знаку не изменился, так как при равновесии бруса $M_1=M_2$.

В тех случаях, когда на брус действует не два, а несколько скручивающих моментов, целесообразно при вычислении крутящих моментов принять такое правило знаков: при рассмотрении любой из оставленных частей бруса со стороны сечения внешние моменты, действующие по ходу часовой стрелки, считаем положительными, действующие против хода часовой стрелки — отрицательными.

Для получения наглядной картины изменения крутящих моментов в различных сечениях строят их эпюру по всей длине бруса. Порядок построения эпюры крутящих моментов $M_к$ рассмотрим на примере.

На рис. 2.41, *а* изображен брус, нагруженный четырьмя моментами. Из условия равновесия бруса следует, что $M_1+M_2+M_3-M_0=0$. Сечениями, в которых приложены скручивающие моменты, брус разделен на четыре участка: I, II, III и IV. Рассечем брус на участке I и, отбросив часть бруса правее сечения, видим (рис. 2.41, *б*), что оставленная левая часть не нагружена. Значит, $M_{к\,I}=0$. Рассечем брус на участке II, отбросим правую часть бруса и рассмотрим левую часть со стороны сечения. Из рис. 2.41, *в* увидим, что $M_{к\,II}=M_1$ (если смотреть со стороны сечения, то момент M_1 действует по ходу стрелки часовой). Рассматривая далее левую часть бруса со стороны сечения на участке III (рис. 2.41, *г*), видим, что $M_{к\,III}=M_1+M_2$. Из рассмотрения левой части бруса со стороны сечения на участке IV (рис. 2.41, *д*) следует $M_{к\,IV}=M_1+M_2-M_0$. Из условия равновесия всех четырех скручивающих моментов ($M_0=M_1+M_2+M_3$) ясно, что $-M_0+M_1+M_2<0$. Поэтому $M_{к\,IV}<0$.

На рис. 2.41, *е* результаты вычислений изображены в виде эпюры. На любом участке между сечениями бруса, нагруженными скручивающими моментами, крутящие моменты остаются постоянными. При переходе от одного участка к другому на эпюре возникают скачки, численно равные моментам внешних скручивающих пар.

Эпюру $M_к$ можно было бы строить и справа налево. Тогда, отбрасывая каждый раз левую часть бруса, мы получили бы для участка IV $M_{к\,II}=-M_3$ (из условия равновесия внешних моментов следует, что $M_3=-M_0+M_1+M_2$), для участка III $M_{к\,III}=-M_3+M_0$ (легко видеть, что $-M_3+M_0=M_1+M_2$) и т. д.

§ 2.16. КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО ПРЯМОГО БРУСА. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ФОРМУЛЫ

Зависимости между величинами, характеризующими кручение бруса, представляются в наиболее простом виде при круглом поперечном сечении бруса. Рассматривая кручение круглого прямого бруса, исходим из трех допущений: выбранное в брусе до нагружения поперечное сечение остается плоским и перпендикулярным оси и после нагружения (гипотеза Я. Бернулли, см. гл. 2); рас-

стояния между поперечными сечениями при нагружении бруса не изменяются; радиусы поперечных сечений бруса не искривляются.

Представим себе заделанный одним концом в неподатливой стенке брус круглого поперечного сечения радиуса r, на цилиндрической поверхности которого вдоль образующих нанесены прямые линии (рис. 2.42, *а*). Если свободный конец бруса нагрузить моментом M_0, то брус деформируется (скручивается) и линии на цилиндрической поверхности принимают вид винтовых линий (рис. 2.42, *б*). Для того чтобы исследовать деформированное состояние бруса, выделим из него на расстоянии x от заделки элемент длиной dx и изобразим этот элемент отдельно в увеличенном виде (рис. 2.43).

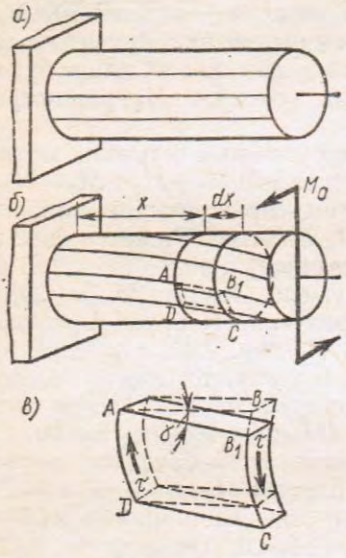


Рис. 2.42

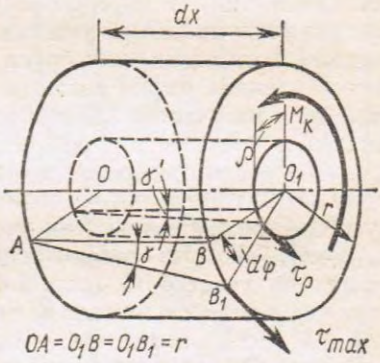


Рис. 2.43

Предположим, что левое сечение выделенного элемента повернулось на некоторый угол φ, тогда правое сечение, расположенное несколько дальше от неподвижного сечения бруса в заделке, повернулось на угол $\varphi+d\varphi$. Угол $d\varphi=B\hat{O}_1B_1$ называется *углом закручивания* выделенного элемента. Этот угол зависит от длины элемента dx и поэтому при одном и том же деформированном состоянии может быть различным.

Деформация бруса при кручении характеризуется величиной

$$\varphi_0 = d\varphi/dx, \qquad (2.30)$$

называемой *относительным углом закручивания*. Это угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними.

Если у поверхности выделенного элемента вырезать слой AB_1CD (см. рис. 2.42, *б*, *в*), который из-за малости размеров можно считать призмой, то этот призматический элемент находится в состоянии чистого сдвига, т. е. $\angle BAB_1$ на цилиндрической поверхности элемента (рис. 2.43) является углом сдвига γ. Приближенно можно

считать $\smile BB_1 = d\varphi \cdot r = \gamma \cdot dx$, отсюда с учетом равенства (2.30)

$$\gamma = (d\varphi/dx)\, r = \varphi_0 r. \qquad (2.31)$$

Чтобы выразить максимальные касательные напряжения τ_{max} в крайних точках поперечного сечения бруса, найденное значение γ подставим в выражение (2.28):

$$\tau_{max} = G\varphi_0 r. \qquad (2.32)$$

Если мысленно вырезать призматический элемент на расстоянии ρ от оси бруса, то угол сдвига у этого элемента $\gamma' < \gamma$ (рис. 2.43) и тогда в любой точке поперечного сечения на расстоянии ρ от центра

$$\tau_\rho = G\varphi_0 \rho. \qquad (2.33)$$

Равенство (2.33) выражает линейный закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению при кручении. Распределение касательных напряжений по сечению согласно этому закону показано на рис. 2.44, *а*. Максимальные касательные напряжения кручения τ_{max} возникают у края сечения, а по мере приближения к центру убывают до нуля. Таким образом, в большей степени сопротивляются кручению те части бруса, которые расположены ближе к его поверхности. Поэтому для экономии материала брусья, работающие на кручение, иногда изготовляют пустотелыми. Поперечное сечение такого бруса для полого вала имеет форму плоского кругового кольца, распределение касательных напряжений в нем показано на рис. 2.44, *б*. Касательные

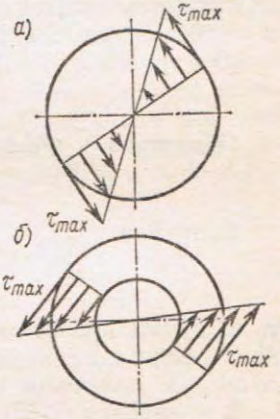


Рис. 2.44

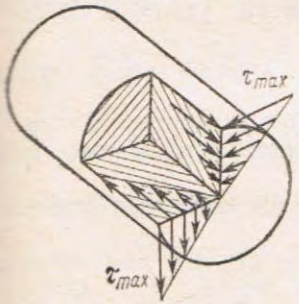


Рис. 2.45

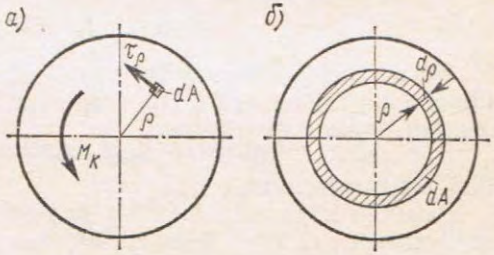


Рис. 2.46

напряжения вследствие закона парности возникают и в продольных сечениях бруса (рис. 2.45).

Зная закон распределения касательных напряжений по сечению, установим зависимость между возникшим в нем крутящим

моментом $M_к$, относительным углом закручивания φ_0 и максимальными касательными напряжениями τ_{max}.

Пусть в некотором сечении (рис. 2.46, *а*) возник крутящий момент $M_к$, который, как известно из предыдущего параграфа, можно определить через внешние моменты. На некотором расстоянии ρ от центра выберем в сечении бесконечно малую площадку dA и допустим, что напряжение по этой площадке τ_ρ. Тогда с учетом равенства (2.33) элементарный крутящий момент

$$dM_к = \tau_\rho \, dA \cdot \rho = G\varphi_0 \rho^2 \, dA.$$

Суммируя элементарные крутящие моменты $dM_к$ по всей площади и учитывая, что G и φ_0 — величины постоянные, получаем

$$M_к = G\varphi_0 \int_A \rho^2 \, dA.$$

Обозначив $\int_A \rho^2 dA$ через J_p, получим

$$M_к = G\varphi_0 J_p. \tag{2.34}$$

Величина

$$\int_A \rho^2 \, dA = J_p, \tag{2.35}$$

т. е. сумма произведений всех элементарных площадок поперечного сечения на квадраты их расстояний от центра, называется *полярным моментом инерции сечения*.

В уравнении (2.35) ρ выражается в м, см или мм, а dA — в м^2, см^2 или мм^2; следовательно, полярный момент инерции выражается в м^4, см^4 или мм^4.

Из равенства (2.34) получаем выражение относительного угла закручивания

$$\varphi_0 = M_к/(GJ_p). \tag{2.36}$$

Полный угол закручивания бруса (значение углового перемещения при кручении)

$$\varphi = M_к l/(GJ_p). \tag{2.37}$$

Легко видеть, что эта формула в принципе аналогична формуле (2.21) для удлинения Δl. Произведение GJ_p называется *жесткостью сечения бруса при кручении*.

В формуле (2.36) φ_0 выражается в рад/м или рад/мм, в формуле (2.37) φ выражается в рад.

Заменив в равенстве (2.34) произведение $G\varphi_0$ его выражением из формулы (2.32) ($G\varphi_0 = \tau_{max}/r$), получим $M_к = \tau_{max} J_p/r$. Откуда максимальные касательные напряжения

$$\tau_{max} = M_к r/J_p. \tag{2.38}$$

Отношение полярного момента инерции сечения к его радиусу называется *полярным моментом сопротивления* и обозначается W_p:

$$W_p = J_p/r, \tag{2.39}$$

где W_p выражается в м³, см³ или мм³. Таким образом,

$$\tau_{max} = M_к / W_p. \qquad (2.40)$$

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса равно частному от деления крутящего момента на полярный момент сопротивления.

При вычислении значений φ_0, φ и τ_{max} соответственно по формулам (2.36), (2.37) и (2.38) кроме крутящего момента $M_к$, модуля сдвига G, длины l нужно знать значение полярного момента инерции J_p или полярного момента сопротивления W_p, которые зависят от формы и размеров сечения.

Чтобы получить формулу полярного момента инерции круга, выделим в его площади на расстоянии ρ от центра элемент dA в виде плоского кольца шириной $d\rho$ (рис. 2.46, *б*). Если пренебречь разницей между длинами внешнего и внутреннего контуров кольцевого элемента, то его площадь $dA = 2\pi\rho d\rho$. Подставляя значение dA в выражение (2.35) и принимая во внимание, что при интегрировании по всей площади ρ изменяется от 0 до $d/2$ (где d — диаметр круглого сечения), получаем

$$J_p = \int_A \rho^2 \, dA = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 \, d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2}.$$

Отсюда

$$J_p = \pi d^4 / 32. \qquad (2.41)$$

Аналогично, для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_0^4) = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4), \qquad (2.42)$$

где d — наружный, а d_0 — внутренний диаметры кольца; $c = d_0/d$.

Подставляя в формулу (2.39) значения J_p из равенств (2.41) и (2.42) и имея в виду, что $r = d/2$, получаем полярные моменты сопротивления круглого сечения

$$W_p = \pi d^3 / 16 \qquad (2.43)$$

и кольцевого сечения

$$W_p = \left(\frac{\pi d^3}{16}\right)(1 - c^4). \qquad (2.44)$$

§ 2.17. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

Условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{max} = M_к / W_p \leqslant [\tau_к]. \qquad (2.45)$$

Предел текучести при кручении связан с пределом текучести при растяжении зависимостью $\tau_т \approx (0{,}55 \ldots 0{,}60)\sigma_т$, для пластичных материалов принимают $[\tau_к] \approx (0{,}55 \ldots 0{,}60)\,[\sigma_р]$.

По условию прочности при кручении (2.45) выполняют три вида расчетов.

Проектный расчет. Определив крутящий момент в сечении бруса и приняв $\tau_{max}=[\tau_к]$, находим требуемое значение полярного момента сопротивления:

$$W_p = M_к/[\tau_к]. \quad (2.46)$$

Затем, исходя из формулы поперечного сечения (круг или кольцо), находим диаметр бруса из формулы (2.43) или (2.44). Полученное значение диаметра в миллиметрах следует округлить до ближайшего большого четного числа или числа, оканчивающегося на 5.

Расчет допускаемой нагрузки. Определив полярный момент сопротивления сечения бруса и приняв $\tau_{max}=[\tau_к]$, находим допускаемое значение крутящего момента:

$$[M_к] = W_p[\tau_к]. \quad (2.47)$$

Затем, исходя из схемы нагружения, находим максимально допустимую нагрузку.

Проверочный расчет. Определив максимальный крутящий момент в поперечном сечении бруса и полярный момент сопротивления сечения, находим $\tau_{max}=M_к/W_p$ и сравниваем его с $[\tau_к]$.

Условие жесткости бруса при кручении состоит в том, чтобы относительный угол закручивания φ_0 не превосходил некоторого заданного допускаемого значения $[\varphi_0]$, т. е.

$$\varphi_0 = M_к/(GJ_p) \leqslant [\varphi_0]. \quad (2.48)$$

В Международной системе единиц (СИ) допускаемый угол закручивания $[\varphi_0]$ выражается в рад/м, но в практике часто допускаемый угол закручивания задается в град/м. Тогда это значение нужно перевести в единицы СИ, умножив на отношение $\pi/180°$, т. е.

$$[\varphi_0] = \frac{\pi}{180°}[\varphi_0^\circ]. \quad (2.49)$$

По условию жесткости (2.48) выполняют тоже три вида расчетов: проверочный — непосредственно по расчетной формуле (2.48); проектный — по расчетной формуле

$$J_p = M_к/(G[\varphi_0]). \quad (2.50)$$

Далее, в зависимости от формы сечения (круг или кольцо) по найденному значению J_p из формул (2.41) или (2.42) определяют диаметр d или диаметры d и d_0.

Расчет допускаемой нагрузки выполняют по формуле

$$[M_к] = GJ_p[\varphi_0]. \quad (2.51)$$

Объектом расчетов на прочность или жесткость часто становится брус, который называется валом. На вал при передаче мощности всегда действуют по крайней мере два скручивающих момента (иногда три и больше). При расчете валов необходимо помнить известную из теоретической механики формулу (1.193), выражаю-

щую зависимость между вращающим (скручивающим) моментом $M_{вр}$, передаваемой мощностью P и угловой скоростью ω:

$$M_{вр} = P/\omega, \tag{2.52}$$

а также формулу, выражающую зависимость между угловой скоростью ω (рад/с) и частотой вращения n (об/мин):

$$\omega = \pi n/30. \tag{2.53}$$

Пример 2.13. Определить диаметр вала для передачи мощности $P=50$ кВт при частоте вращения $n=300$ об/мин, если $[\tau_к]=30$ МПа и $[\varphi_0^\circ]=3$ град/м, $G=0{,}8\cdot10^5$ МПа.

Решение. 1. При передаче заданной мощности вал нагружен двумя скручивающими моментами, каждый из которых определяют по формуле (2.52): $M_1=M_2=P/\omega$. Так как $\omega=\pi n/30$ и $P=50\cdot10^3$ Вт, то

$$M_1 = M_2 = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30\cdot50\cdot10^3}{\pi\cdot300} = 1{,}59\cdot10^3 \text{ Н}\cdot\text{м} = 1590 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

2. В каком угодно сечении вала между приложенными к нему внешними моментами M_1 и M_2 (рис. 2.40, *а*) крутящий момент $M_к$ равен любому из них, т. е.

$$M_к = M_1 = M_2 = 1590 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

3. Определим диаметр $d_п$ вала из условия прочности. Выразив допускаемое напряжение $[\tau_к]$ в паскалях, по расчетной формуле (2.46) находим требуемый полярный момент сопротивления:

$$W_р = M_к/[\tau_к] = 1590/(30\cdot10^6) = 53\cdot10^{-6} \text{ м}^3 = 53\cdot10^3 \text{ мм}^3.$$

Из формулы (2.43) находим диаметр вала, удовлетворяющий условию прочности:

$$d_п = \sqrt[3]{16W_р/\pi} = \sqrt[3]{16\cdot53\cdot10^3/\pi} = 10\sqrt[3]{270} = 64{,}6 \text{ мм}.$$

Округляя до целого числа мм, принимаем $d_п=65$ мм.

4. Определяем диаметр $d_ж$ вала из условия жесткости. По формуле (2.49) находим допускаемый угол закручивания:

$$[\varphi_0] = (\pi/180^\circ)\,[\varphi_0^\circ] = \pi\cdot3/180 = 0{,}0525 \text{ рад/м}.$$

По расчетной формуле (2.50) находим требуемый полярный момент инерции сечения, выразив модуль сдвига G в паскалях:

$$J_р = \frac{M_к}{G\,[\varphi_0]} = \frac{1590}{0{,}8\cdot10^5\cdot10^6\cdot0{,}0525} = 0{,}380\cdot10^{-6} \text{ м}^4 = 38\cdot10^4 \text{ мм}^4.$$

Из формулы (2.41) находим диаметр вала, удовлетворяющий условию жесткости

$$d_ж = \sqrt[4]{32J_р/\pi} = \sqrt[4]{32\cdot38\cdot10^4/\pi} = 10\sqrt[4]{386} = 44{,}3 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_ж=45$ мм.

5. Из двух найденных значений диаметра вала необходимо взять большее, так как оно удовлетворяет обоим условиям. Таким образом, конструктивный диаметр вала $d=65$ мм.

§ 2.18. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРУЖИНЫ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Цилиндрические винтовые пружины относятся к упругим элементам, широко применяемым в машиностроении и приборостроении. Их используют в качестве амортизаторов или аккумуляторов

механической энергии, в установках передачи сил давления и в механизмах возврата детали в исходное положение.

Здесь кратко рассмотрены некоторые расчетные формулы винтовых пружин растяжения (рис. 2.47, *а*) и сжатия (рис. 2.47, *б*). Эти пружины можно рассматривать как пространственно изогнутые брусья. Они характеризуются следующими параметрами: диаметром проволоки d, из которой навита пружина, средним диаметром витка D, т. е. диаметром винтовой линии, образуемой осью проволоки, числом витков i и углом подъема витков α. Винтовые пружины растяжения навиваются без просветов между витками, пружины сжатия — с просветами.

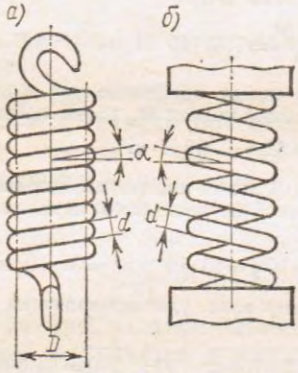


Рис. 2.47

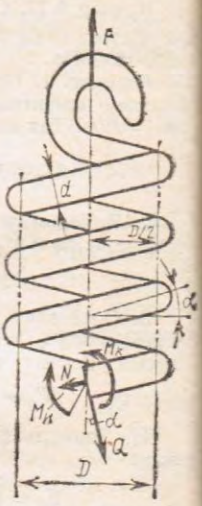


Рис. 2.48

Если рассечь один из витков растянутой пружины поперечным сечением (рис. 2.48) и отбросить нижнюю часть пружины, то увидим, что внешняя сила $\boldsymbol{F}$ уравновешивается четырьмя внутренними силовыми факторами, нормальной $N=F\sin\alpha$, поперечной $Q=\boldsymbol{F}\cos\alpha$ силами, изгибающим $M_и=(FD/2)\sin\alpha$ и крутящим $M_к=(FD/2)\cos\alpha$ моментами. На практике чаще всего используются пружины с небольшим углом подъема $\alpha\leqslant 10°$. Для таких пружин нормальная сила и изгибающий момент не имеют существенного значения и расчет ведется только по касательным напряжениям, считая, что поперечная сила $Q=F$ и крутящий момент $M_к=FD/2$ (принимая, что при $\alpha\leqslant 10°$ $\cos\alpha\approx 1$).

Касательные напряжения, обусловленные поперечной силой Q, распределены по сечению равномерно, их эпюра изображена на рис. 2.49, *а*. Касательные напряжения, обусловленные крутящим моментом, достигают наибольшего значения у края сечения, их эпюра изображена на рис. 2.49, *б*. Из суммарной эпюры касательных напряжений (рис. 2.49, *в*) видно, что максимальное напряжение возникает в точках сечения, расположенных ближе к оси пружины, т. е. на внутренней части контура сечения витка:

$$\tau_{max}=\tau_{M_к\,max}+\tau_Q=M_к/W_р+Q/A.$$

Имея в виду, что в данном случае $M_к=FD/2$, $W_p=\pi d^3/16$, $Q=F$ и $A=\pi d^2/4$, получим

$$\tau_{max}=8FD/(\pi d^3)+4F/(\pi d^2)=$$
$$=[8FD/(\pi d^3)][1+d/(2D)].$$

Отношение $D/d=c$ называется *индексом пружины*; введя эту величину в последнее равенство, получим

$$\tau_{max}=[8FD/(\pi d^3)][1+1/(2c)].$$

При обычных значениях индекса c в пределах 4...12 $1/(2c)\leqslant$ $\leqslant 0{,}125$, поэтому вторым слагаемым в квадратных скобках можно

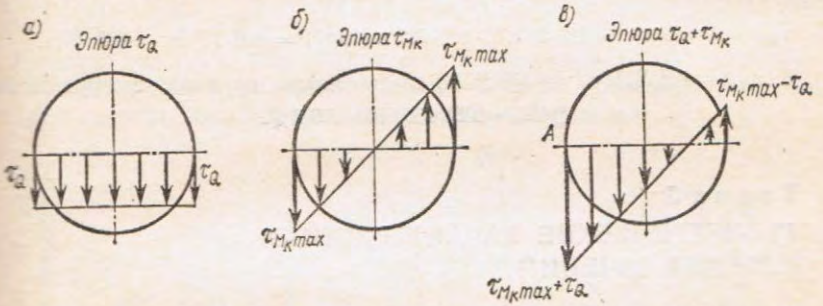


Рис. 2.49

пренебречь, т. е. учитывать лишь напряжения кручения и вести расчет по приближенной формуле

$$\tau_{max}=8FD/(\pi d^3)=8Fc/(\pi d^2).$$

Кроме индекса c прочность пружины зависит от угла подъема ее витков. Желая учесть и это, в формулу вводят коэффициент

$$k=1+1{,}5/c \qquad (2.54)$$

и тогда условие прочности пружины можно записать так:

$$\tau_{max}=k8Fc/(\pi d^2)\leqslant[\tau], \qquad (2.55)$$

где допускаемое напряжение $[\tau]=400...1000$ МПа, так как для изготовления пружин применяют высококачественные углеродистые и легированные марки сталей.

Диаметр пружины d из условия прочности (2.55) выражается формулой

$$d=\sqrt{8kFc/(\pi[\tau])}=1{,}6\sqrt{(c+1{,}5)F/[\tau]}. \qquad (2.56)$$

Под действием нагрузки F пружина растяжения удлиняется, а пружина сжатия укорачивается. Удлинение или укорочение (осадка) пружины определяется по формуле, приводимой без вывода:

$$\lambda=8FD^3i/(Gd^4)=8Fc^3i/(Gd), \qquad (2.57)$$

где i — число витков пружины.

Пример 2.14. Размеры пружины конусной фрикционной муфты следующие: $D=75$ мм, $d=10$ мм, $i=4$. Проверить прочность пружины, если в рабочем состоянии она сжата на 30 мм и $[\tau]=450$ МПа, $G=0{,}8\cdot10^5$ МПа.

Решение. 1. Находим индекс пружины: $c=D/d=75/10=7{,}5$.

2. Из формулы (2.57), полагая $\lambda=30$ мм$=3\cdot10^{-2}$ м, $d=10$ мм$=10^{-2}$ м, $G=0{,}8\cdot10^5$ МПа$=0{,}8\cdot10^{11}$ Па, находим силу, сжимающую пружину:

$$F=\frac{\lambda Gd}{8c^3i}=\frac{3\cdot10^{-2}\cdot0{,}8\cdot10^{11}\cdot10^{-2}}{8\cdot7{,}5^3\cdot4}=\frac{3\cdot8\cdot10^9}{8\cdot75^3\cdot4}=1{,}78\cdot10^3\text{ Н}.$$

3. По формуле (2.54) определяем значение коэффициента k:

$$k=1+1{,}5/c=1+1{,}5/7{,}5=1{,}2.$$

4. По формуле (2.55) находим максимальное напряжение, возникающее в пружине:

$$\tau_{max}=k\cdot8Fc/\pi d^2=1{,}2\cdot8\cdot1{,}78\cdot10^3\cdot7{,}5/\pi\,(10^{-2})^2=408\cdot10^6\text{ Па}=408\text{ МПа}.$$

5. $\tau_{max}=408$ МПа$<[\tau]=450$ МПа; следовательно, пружина недогружена на

$$[(450-408)/450]\,100\approx9{,}3\%.$$

Глава 5
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

§ 2.19. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ

С некоторыми геометрическими характеристиками сечений мы знакомы. Любое сечение бруса имеет определенную геометрическую форму и площадь. В формулы для определения координат центра тяжести сечения (см. § 1.24) входит алгебраическая сумма произведений элементарных площадей на координаты их центров тяжести; эта величина называется *статическим моментом сечения*. В интегральной форме статические моменты сечения S_x и S_y относительно осей x и y можно представить так:

$$S_x=\int_A y\,dA \quad\text{и}\quad S_y=\int_A x\,dA. \tag{2.58}$$

Из формул статики следует:

$$S_x=Ay_C \quad\text{и}\quad S_y=Ax_C, \tag{2.59}$$

где A — площадь сечения; x_C и y_C — координаты центра тяжести сечения. Легко заметить, что при $y_C=0$, когда ось x проходит через центр тяжести сечения, $S_x=0$, и при $x_C=0$, когда ось y проходит через центр тяжести сечения, $S_y=0$: *статические моменты сечения относительно центральных осей равны нулю.*

В § 2.16 при исследовании зависимости между крутящим моментом и касательными напряжениями возникла еще одна геометрическая характеристика — полярный момент инерции сечения J_p. Появление этой величины обусловлено неравномерностью распределения касательных напряжений по сечению при кручении.

Познакомимся с новыми геометрическими характеристиками сечения — осевыми и центробежными моментами инерции относительно координатных осей (рис. 2.50).

Представим себе, что сечение разделено на множество элементарных площадок dA (на рис. 2.50 изображена одна из них), координаты которых x и y. Тогда интегралы

$$J_x = \int_A y^2\,dA \quad \text{и} \quad J_y = \int_A x^2\,dA \tag{2.60}$$

называются *моментами инерции сечения* относительно осей x или y, а интеграл

$$J_{xy} = \int_A xy\,dA \tag{2.61}$$

принято называть *центробежным моментом инерции* сечения.

Так же как и полярный момент инерции, осевые и центробежные моменты инерции выражаются в м^4, см^4 и мм^4.

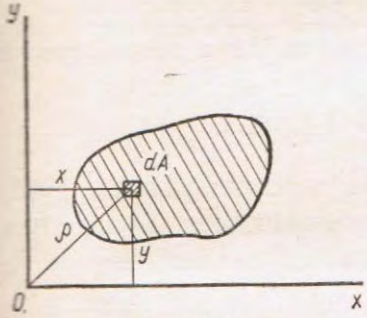


Рис. 2.50

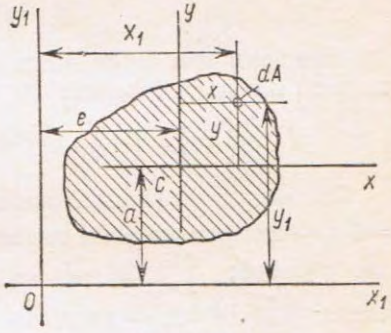


Рис. 2.51

Значение площадки сечения положительно, поэтому независимо от знака координаты x или y *осевые моменты всегда положительны*, а центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от расположения сечения относительно осей x или y.

Расстояние ρ между элементарной площадкой dA и началом координат связано с координатами площадки очевидной зависимостью (рис. 2.50)

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Умножив на dA обе части этого равенства, а затем проинтегрировав их по всей площади сечения:

$$\int_A \rho^2\,dA = \int_A x^2\,dA + \int_A y^2\,dA,$$

получим важную зависимость между осевыми и полярным моментами инерции

$$J_p = J_x + J_y. \tag{2.62}$$

Сумма осевых моментов инерции сечения относительно взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей. Моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, называются центральными.

Между моментами инерции сечения относительно параллельных осей, из которых одна центральная, существует важная зависимость, используемая далее в расчетах. Расположим сечение в осях координат x_1Oy_1, а затем через центр тяжести C сечения проведем оси $Cx \parallel Ox_1$ и $Cy \parallel Oy_1$ (рис. 2.51). Координаты элементарной площадки dA сечения в осях x_1Oy_1 связаны с координатами в центральных осях равенствами

$$y_1 = y + a \quad \text{и} \quad x_1 = x + e,$$

где a и e — расстояние между осями.

Возведем обе части первого равенства во вторую степень:

$$y_1^2 = y^2 + a^2 + 2ay.$$

Умножим обе части этого равенства на dA и проинтегрируем по всей площади сечения:

$$\int_A y_1^2\,dA = \int_A y^2\,dA + a^2\int_A dA + 2a\int_A y\,dA.$$

Рассматривая каждый интеграл в отдельности, видим: $\int_A y_1^2 dA = J_{x1}$ — момент инерции сечения относительно оси, параллельной центральной; $\int_A y^2 dA = J_x$ — центральный момент инерции сечения; $\int_A dA = A$ — площадь сечения; $\int_A y dA = S_x = 0$ — статический момент сечения относительно центральной оси, как известно, равен нулю.

Следовательно, в окончательном виде последнее равенство запишется так:

$$J_{x1} = J_x + a^2A. \tag{2.63}$$

Аналогично из равенства $x_1 = x + e$ получим

$$J_{y1} = J_y + e^2A. \tag{2.64}$$

Таким образом, момент инерции сечения относительно оси, параллельной центральной, всегда больше центрального момента инерции на произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения.

§ 2.20. ПОНЯТИЕ О ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ

Оси, относительно которых осевые моменты инерции сечения принимают экстремальные значения, а центробежный момент равен нулю, называются *главными*.

Допустим, что некоторое сечение расположено в осях x_1Oy_1, как показано на рис. 2.52, *а*. Ясно, что центробежный момент инерции $J_{x1y1}>0$, так как при таком положении сечения все элементарные центробежные моменты инерции $x_iy_i\mathrm{d}A_i>0$. При постепенном повороте осей (рис. 2.52, *б*) значение J_{x1y1} станет уменьшаться, так как для площадок $\mathrm{d}A_i$ над осью x_1 элементарные центробежные моменты инерции $x_iy_i\mathrm{d}A_i>0$, а для площадок $\mathrm{d}A_к$ ниже оси x_1 $x_к y_к \mathrm{d}A_к<0$, поскольку у этих площадок $y_к<0$. Наконец, при определенном положении осей центробежный момент инерции $J_{x1y1}=0$. Оси x_1Oy_1 в этот момент занимают положение главных осей (рис. 2.52, *б*).

Практическое значение имеют не любые главные оси,

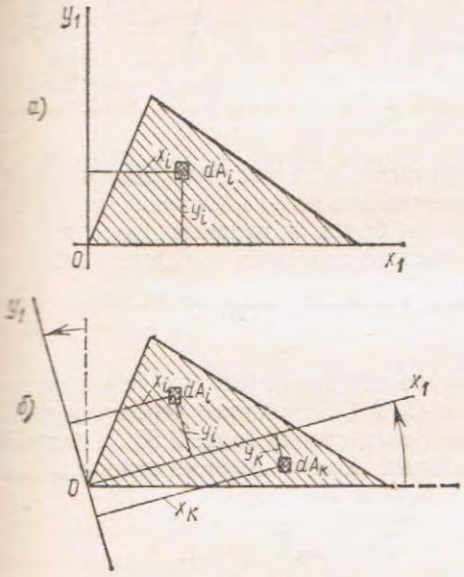


Рис. 2.52

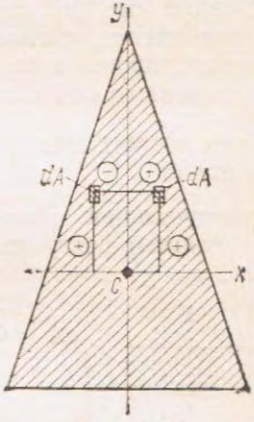


Рис. 2.53

а только главные центральные оси. Положение главных центральных осей совсем просто находить для симметричных сечений. Центр тяжести симметричного сечения обязательно лежит на оси симметрии. Поэтому, если совместить с осью симметрии одну из осей координат, а другую провести к ней перпендикулярно через центр тяжести, получим систему главных центральных осей (рис. 2.53). По одну сторону оси симметрии имеется площадка $\mathrm{d}A$ с элементарным центробежным моментом инерции $+xy\,\mathrm{d}A$, по другую сторону оси симметрии имеется площадка $\mathrm{d}A$ с элементарным центробежным моментом $-xy\,\mathrm{d}A$ и при суммировании их по всему сечению $J_{xy}=0$. Относительно одной из главных центральных осей момент инерции сечения максимален, а относительно второй — минимален. Для сечения на рис. 2.53 $J_{max}=J_x$ и $J_{min}=J_y$ (см. далее § 2.21).

Если сечение имеет две оси симметрии (например, прямоугольник), то обе они являются главными центральными, так как их пересечение определяет положение центра тяжести сечения. Мно-

гие сечения имеют по две, три (и более) пары осей симметрии, которые можно принимать за главные центральные оси. Например, у квадрата (рис. 2.54) таких осей симметрии две пары, у правильного шестиугольника — три пары, а у круга — бесчисленное множество пар.

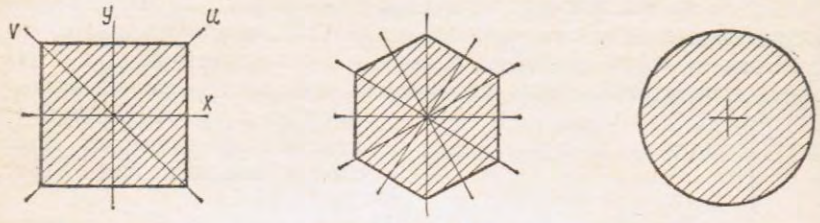


Рис. 2.54

Моменты инерции сечения относительно главных центральных осей называются *главными центральными моментами инерции*. Плоскости, проведенные через ось бруса и главные оси инерции его поперечного сечения, называются *главными плоскостями*.

§ 2.21. ОСЕВЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПРОСТЕЙШИХ СЕЧЕНИЙ

Прямоугольник. Прямоугольное сечение имеет две оси симметрии, и главные центральные оси C_x и C_y проходят через середины параллельных сторон (рис. 2.55). Главный центральный момент инерции относительно оси x

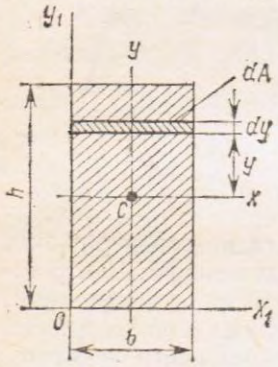


Рис. 2.55

$$J_x = \int_A y^2 \, dA.$$

Элементарную площадку dA в этом случае можно представить в виде полоски во всю ширину сечения и толщиной dy, значит $dA = b \cdot dy$. Подставив под знак интеграла значение dA и проинтегрировав по всей площади, т. е. в пределах изменения ординаты y от $-h/2$ до $+h/2$, получим

$$J_x = \int_A y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \, dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \, dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{+h/2} =$$
$$= \frac{bh^3}{24} - \left(-\frac{bh^3}{24} \right).$$

Окончательно

$$J_x = bh^3/12. \qquad (2.65)$$

Аналогично получим формулу главного центрального момента инерции прямоугольника относительно оси y:

$$J_y = b^3 h/12. \qquad (2.66)$$

Иногда необходимо знать моменты инерции прямоугольника относительно осей x_1 и y_1, параллельных главным центральным. Для получения этих значений воспользуемся формулами (2.63) и (2.64):

$$J_{x1} = J_x + a^2 A = bh^3/12 + (h/2)^2\, bh,$$
$$J_{y1} = J_y + e^2 A = b^3 h/12 + (b/2)^2\, bh,$$

т. е.

$$J_{x1} = bh^3/3 \quad \text{и} \quad J_{y1} = b^3 h/3. \tag{2.67}$$

Легко понять, что для квадрата, т. е. при $h=b$, формулы (2.65) и (2.66) примут вид

$$J_x = J_y = b^4/12, \tag{2.68}$$

а формулы (2.67) — вид

$$J_{x1} = J_{y1} = b^4/3. \tag{2.69}$$

Равнобедренный треугольник. Центр тяжести равнобедренного треугольника лежит на его оси симметрии на расстоянии $y_C = h/3$

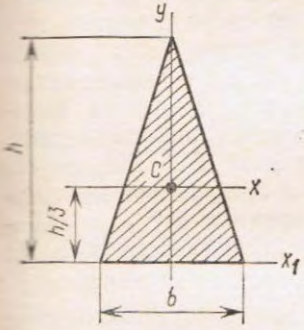


Рис. 2.56

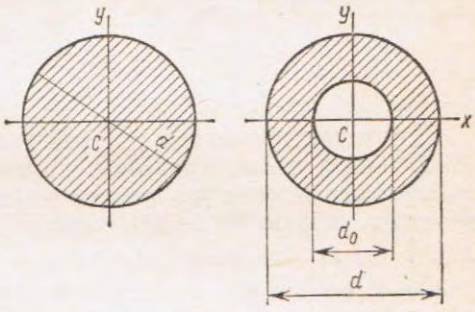


Рис. 2.57

от основания (рис. 2.56). Главные центральные моменты инерции сечения, имеющего форму равнобедренного треугольника, таковы:

$$J_x = bh^3/36; \quad J_y = b^3 h/48. \tag{2.70}$$

Момент инерции треугольного сечения относительно оси x_1, проходящей вдоль основания b,

$$J_{x1} = bh^3/12. \tag{2.71}$$

Круг, кольцо. Для круга или кольца (рис. 2.57) главные центральные моменты инерции относительно осей x и y равны между собой. Поэтому из равенства (2.62), выражающего зависимость между осевыми и полярным моментами инерции, получаем

$$J_p = 2J_x = 2J_y \quad \text{или} \quad J = J_x = J_y = J_p/2.$$

Подставив значение J_p из формулы (2.41), получим для круглого сечения

$$J = \pi d^4/64. \tag{2.72}$$

Для кольцевого сечения после подстановки из формулы (2.42) получим

$$J = (\pi d^4/64)(1 - c^4), \qquad (2.73)$$

где

$$c = d_0/d.$$

Следует заметить, что если у сечения два главных центральных момента инерции равны между собой (к таким сечениям относятся круг, кольцо, квадрат и т. п.), то у этих сечений любая центральная ось — главная и все центральные моменты инерции одинаковы.

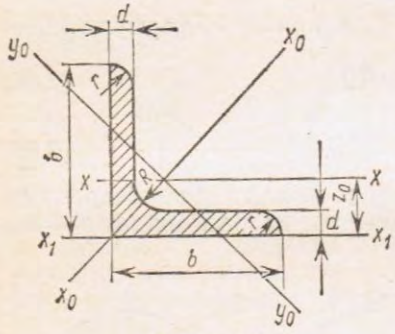


Рис. 2.58

Во многих конструкциях для отдельных элементов используются стальной прокат, форма и размеры которого предусмотрены соответствующими ГОСТами. Для проката с поперечными сечениями, отличными от таких простых геометрических фигур, как прямоугольник или круг, разработаны таблицы, содержащие все необходимые для расчетов характеристики.

Для стали прокатной угловой равнополочной (ГОСТ 8509—72) (рис. 2.58) в таблице указаны: размеры (мм) b, d, R и r; площадь поперечного сечения (см²); масса 1 м длины проката (кг); J_x и J_{x1} — моменты инерции площадей сечений относительно осей x и x_1; $J_{x_0 max}$ и $J_{y_0 min}$ — моменты инерции относительно главных центральных осей (см⁴); значение z_0 (см), определяющее положение центра тяжести профиля относительно оси x_1, совмещенной с внешней гранью полки профиля.

Для стали прокатной неравнополочной (ГОСТ 8510—72) (рис. 2.59) кроме размеров B, b, d, R и r, площади поперечного сечения и массы 1 м проката приведены моменты инерции относительно осей x, y, x_1 и y_1 (J_x, J_y, J_{x1} и J_{y1}), а также значения x_0 и y_0, определяющие положение центра тяжести сечения в осях x_1 и y_1.

ГОСТ 8239—72 на стальные двутавровые балки (рис. 2.60) содержит данные о всех размерах, площади сечения и массе 1 м балки; значения J_x и J_y — моментов инерции относительно осей x и y, которые для этого сечения — главные центральные оси, а также значения W_x и W_y — моментов сопротивления сечения относительно тех же осей (см³).

ГОСТ 8240—72 на стальные швеллеры с уклоном внутренних граней полок (рис. 2.61) содержит данные о размерах h, b, d, t, R, r, площади, массе, J_x, J_y, J_{y1}, W_x, W_y, а также значения z_0, определяющие положение центра тяжести относительно оси y_1. В каждом из четырех ГОСТов нумерация профилей соответствует основному размеру, выраженному в сантиметрах. Так, № 7,5 равнополочного уголка относится к профилю, у которого b=75 мм; № 6,3/4,0 не-

равнополочного уголка относится к профилю с размерами полок $B=63$ мм и $b=40$ мм; № 20 двутавра относится к профилю высотой $h=200$ мм, аналогична и нумерация швеллеров.

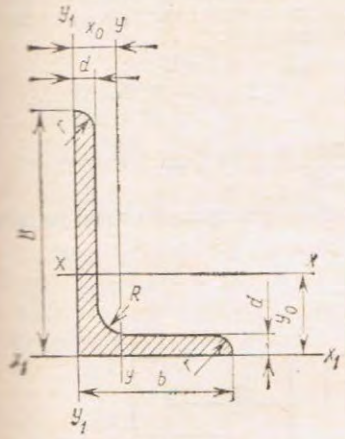


Рис. 2.59

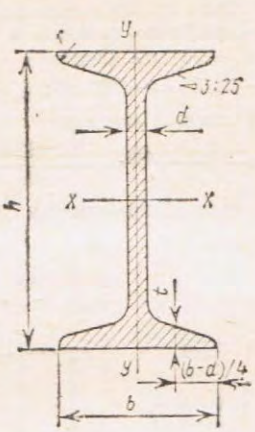


Рис. 2.60

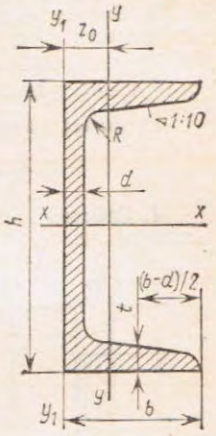


Рис. 2.61

Пример 2.15. Определить главные центральные моменты инерции сечения, составленного из двух швеллеров № 18 (рис. 2.62).

Решение. 1. Сечение, составленное из профилей двух швеллеров, имеет две оси симметрии, с которыми и совместим главные центральные оси x и y.

2. Ось x является главной центральной осью каждого из двух швеллеров. Поэтому для определения главного центрального момента инерции сечения относительно этой оси достаточно сложить моменты каждого из профилей относительно той же оси. По таблице ГОСТ 8240—72 находим $J_{1x}=J_{2x}=1090$ см^4.

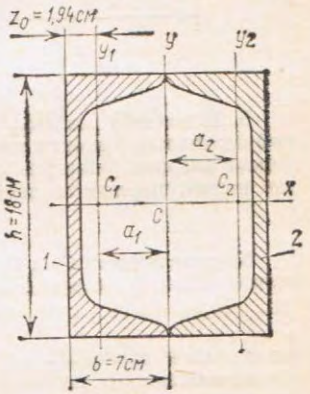


Рис. 2.62

Момент инерции всего сечения относительно оси x

$$J_x=J_{1x}+J_{2x}=2J_{1x}=2\cdot 1090=2180 \text{ см}^4.$$

3. Главная центральная ось сечения y параллельна осям C_1y_1 и C_2y_2 (рис. 2.62) — главным центральным осям каждого из профилей *1* и *2*. Для определения главного момента инерции сечения воспользуемся формулой (2.64):

$$J_y=(J_{1y}+a_1^2A_1)+(J_{2y}+a_2^2A_2),$$

где (по ГОСТ 8240—72) $J_{1y}=J_{2y}=86$ см^4; расстояния между осями $a_1=a_2=b-z_0=7-1{,}94=5{,}06$ см; площади профилей $A_1=A_2=20{,}7$ см^2. Следовательно,

$$J_y=2\left(J_{1y}+a_1^2A_1\right)=2\left(86+5{,}06^2\cdot 20{,}7\right)=1232 \text{ см}^4.$$

4. Главные центральные моменты инерции сечения $J_{max}=J_x=2180$ см^4 и $J_{min}=J_y=1232$ см^4.

Пример 2.16. Определить главные центральные моменты инерции сечения, форма и размеры которого показаны на рис. 2.63, *а*.

Решение. 1. Сечение имеет одну ось симметрии, которую и примем за главную центральную ось y. Чтобы определить положение второй центральной оси (оси x),

сначала необходимо определить положение центра тяжести сечения на оси y, т. е. ординату y_C относительно оси x_0 (рис. 2.63, *б*).

2. Для определения ординаты центра тяжести разобьем сечение на два прямоугольника *I* и *II*, считая, что прямоугольник *II* вырезан из прямоугольника *I*.

3. Определим площади прямоугольников, а также ординаты y_1 и y_2 их центров тяжести C_1 и C_2, выражая размеры в сантиметрах:

$$A_1 = b_1 h_1 = 36 \cdot 50 = 1800 \text{ см}^2; \quad y_1 = h_1/2 = 50/2 = 25 \text{ см};$$

$$A_2 = -b_2 h_2 = -24 \cdot 30 = -720 \text{ см}^2; \quad y_2 = h_1 - h_2/2 = 50 - 30/2 = 35 \text{ см}.$$

Ордината центра тяжести сечения

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{1800 \cdot 25 - 720 \cdot 35}{1800 - 720} = 18{,}3 \text{ см}.$$

4. Отметим положение центра тяжести C на оси y и проведем главную центральную ось x.

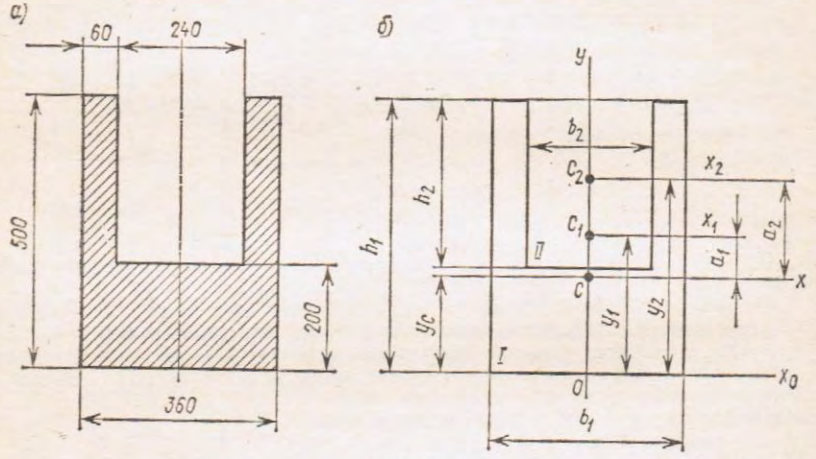


Рис. 2.63

5. Используя разбивку сечения на прямоугольники *I* и *II*, определим главный центральный момент инерции относительно оси x. В данном случае искомый момент инерции равен разности моментов инерции прямоугольников *I* и *II*, так как второй вырезан из первого, т. е.

$$J_x = J_{1x} - J_{2x}.$$

Центры тяжести C_1 и C_2 прямоугольников *I* и *II* не лежат на главной оси x, поэтому для определения моментов инерции J_{1x} и J_{2x} используем формулу (2.64):

$$J_{ix} = J_{xi} + a_i^2 A_i,$$

где в данном случае $J_{xi} = b_i h_i^3/12$ — моменты инерции прямоугольников относительно собственных центральных осей (осей C_1x_1 и C_2x_2), A_i — площади прямоугольников и a_i — расстояния между осями. Последние легко находятся из рис. 2.63, *б*:

$$a_1 = y_1 - y_C = 25 - 18{,}3 = 6{,}7 \text{ см},$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 35 - 18{,}3 = 16{,}7 \text{ см}.$$

Таким образом,

$$J_x = J_{x1} - J_{x2} = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1^2 A_1 - \left(\frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2\right) =$$

$$= \frac{36 \cdot 50^3}{12} + 6{,}7^2 \cdot 1800 - \frac{24 \cdot 30^3}{12} - 16{,}7^2 \cdot 720 \approx 201\,000 \text{ см}^4.$$

6. Находим J_y — главный центральный момент инерции относительно оси y, которая в данном случае является главной осью для обоих прямоугольников *I* и *II*. Значит,

$$J_y = J_{y1} + J_{y2} = \frac{b_1^3 h_1}{12} - \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{36^3 \cdot 50}{12} - \frac{24^3 \cdot 30}{12} = 160\,000 \text{ см}^4.$$

7. $J_{max} = J_x = 201\,000$ см^4 и $J_{min} = J_y = 160\,000$ см^4.

Глава 6
ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

§ 2.22. ПРЯМОЙ ИЗГИБ ЧИСТЫЙ И ПОПЕРЕЧНЫЙ

Прямым чистым изгибом называют такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент. Если кроме изгибающего момента возникает поперечная сила, то имеет место

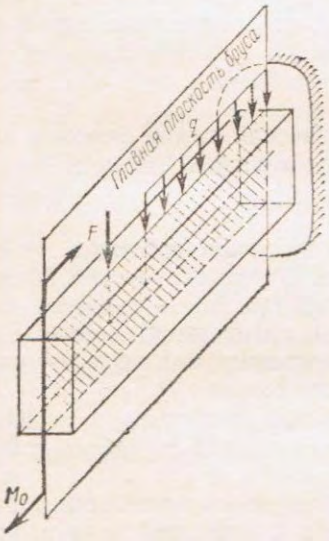


Рис. 2.64

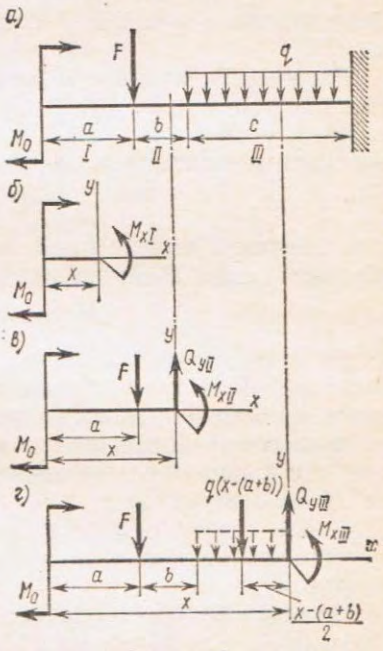


Рис. 2.65

прямой поперечный изгиб. Все внешние силы при прямом изгибе бруса действуют в его главной плоскости (рис. 2.64), искривление оси бруса происходит в той же плоскости.

Брусья, работающие на изгиб, называют *балками*. На расчетной схеме балку принято заменять ее осью. При этом все силы должны быть приведены к оси балки, а силовая плоскость (плоскость действия нагрузки) — совпадать с плоскостью чертежа.

Придав балке, представленной на рис. 2.64, условное изображение (рис. 2.65, *а*), определим внутренние силовые факторы в ее поперечных сечениях. В соответствии с местом приложения нагрузок — пары сил с моментом M_0, сосредоточенной силы $\boldsymbol{F}$ и равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q — разделим балку на три участка: *I*, *II* и *III*. Рассечем балку на участке *I* сечением, расположенным на расстоянии x от места приложения момента M_0, и отбросим правую часть балки (рис. 2.65, *б*). Тогда на основании уравнения (2.1)

$$Q_{yI}=0,$$

поскольку проекции сил, образующих пару, на ось x равны нулю и равновесие оставшейся части балки обеспечивается одним изгибающим моментом M_z. При изменении x от 0 до a, т. е. в любом сечении на участке *I* (при $0\leqslant x\leqslant a$), изгибающий момент

$$M_{zI}=M_0.$$

Следовательно, участок *I* балки находится в состоянии чистого изгиба.

Рассечем балку на участке *II* сечением, расположенным на расстоянии x [теперь $a\leqslant x\leqslant(a+b)$] от левого конца балки, и, отбросив ее правую часть (рис. 2.65, *в*), найдем, что поперечная сила равна проекции внешней силы на ось y, т. е.

$$Q_{yII}=-F,$$

а изгибающий момент равен алгебраической сумме момента пары и момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно центра тяжести сечения:

$$M_{zII}=M_0-F(x-a).$$

Действие момента $F(x-a)$ противоположно действию момента M_0, поэтому он взят со знаком минус. Балка на участке *II* находится в состоянии поперечного изгиба, так как в сечениях этого участка возникают поперечная сила и изгибающий момент. Заметим, что в данном случае значение поперечной силы $Q_{y\,II}$ на участке *II* не зависит от x, т. е. в любом сечении $Q_{y\,II}=-F=\text{const}$. Числовое значение изгибающего момента находится в линейной зависимости от x, т. е. изменяется при переходе от одного сечения к другому.

Рассечем балку на участке *III* сечением на расстоянии x [$(a+b)\leqslant x\leqslant(a+b+c)$] от левого ее конца и, отбросив правую часть (рис. 2.65, *г*) найдем поперечную силу:

$$Q_{yIII}=-F-q(x-(a+b))$$

и изгибающий момент: $M_{z\,III}=M_0-F(x-a)-q(x-(a+b))[x-(a+b)/2]$
или

$$M_{z\,III}=M_0-F(x-a)-q[x-(a+b)]^2/2.$$

На этом участке возникает тоже поперечный изгиб. Причем из-за наличия здесь равномерно распределенной нагрузки попе-

речная сила зависит от места сечения на участке: по мере передвижения сечения вправо (при возрастании x) увеличивается абсолютное значение второго слагаемого $q(x-(a+b))$; изгибающий момент меняется в зависимости от x по параболическому закону.

Между изгибающим моментом M_z, поперечной силой Q и интенсивностью q равномерно распределенной нагрузки существуют следующие дифференциальные зависимости:

$$dM_z/dx = Q \tag{2.74}$$

— производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе;

$$dQ/dx = -q \tag{2.75}$$

— производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности равномерно распределенной нагрузки, взятой с обратным знаком.

Справедливость этих зависимостей можно проверить для значений M_z и Q_y, найденных, например, для участка *III* балки (рис. 2.65, *г*), которым можно придать такой вид:

$$M_{z\,III} = M_0 - Fx + Fa - qx^2/2 + xq(a+b) - q(a+b)^2/2,$$
$$Q_{y\,III} = -F - qx + q(a+b).$$

Продифференцируем первое выражение по x, имея в виду, что M_0, F, a, b и q — величины постоянные:

$$dM_z/dx = -F - qx + q(a+b) = Q_{y\,III}.$$

Продифференцировав выражение поперечной силы, получим

$$dQ_y/dx = -q^*.$$

Из дифференциальных зависимостей (2.74) и (2.75) следует: 1) если $M_z = \text{const}$, $Q=0$; 2) если $Q=\text{const}$, то $q=0$, а M_z изменяется по линейному закону, причем при $Q>0$ M_z возрастает, а при $Q<0$ — убывает; 3) если Q изменяется по линейному закону, то M_z изменяется по параболическому закону.

§ 2.23. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Определяя поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z в различных сечениях балки (рис. 2.65), мы видим, что их значения изменяются по длине балки в зависимости от вида нагрузок и места их приложения. При расчетах часто бывает важно знать изменение Q и M_z в сечениях по всей длине балки, а этого можно достичь построением эпюр.

Исходя из того, что при поперечном изгибе направление внешних сил перпендикулярно оси балки, а при ее рассечении можно

---

* Если действие равномерно распределенной нагрузки совпадает с положительным направлением оси y, то $dQ/dz = q$.

отбросить любую часть — правую или левую, сформулируем следующие правила определения значений Q_y и M_z.

Поперечная сила Q_y в произвольном поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме значений внешних сил, приложенных к балке по одну сторону от сечения, при этом *силам, поворачивающим относительно сечения оставленную часть балки по ходу часовой стрелки, приписывается знак плюс* (рис. 2.66, *а*), *а силам, поворачивающим относительно сечения оставленную часть балки против хода часовой стрелки, приписывается знак минус* (рис. 2.66, *б*).

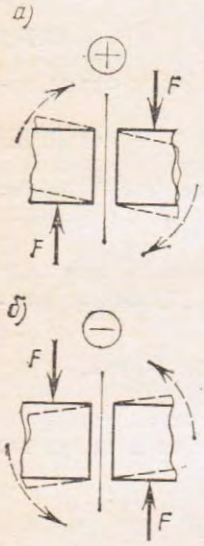


Рис. 2.66

Изгибающий момент M_z в произвольном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от сечения, относительно той точки оси бруса, через которую проходит сечение, при этом *внешним моментам, изгибающим ось балки выпуклостью вниз, приписывается знак плюс* (рис. 2.67, *а*), *а моментам, изгибающим ось балки выпуклостью вверх,— знак минус* (рис. 2.67, *б*).

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр Q_y и M_z при типовых нагружениях балки.

Балка, защемленная одним концом (консоль) и нагруженная двумя численно равными силами, как показано на рис. 2.68, *а*, имеет участки *I* и *II*. Применяя метод сечений и используя правило знаков (рис. 2.66 и 2.67), находим, что на участке *I* (рис. 2,68, *б*) поперечная сила

$$Q_{y\,I} = F,$$

т. е. не зависит от x. Следовательно, эпюра Q_y на участке *I* изобразится отрезком прямой, параллельной базовой линии.

На участке *II* (рис. 2.68, *б*) поперечная сила

$$Q_{y\,II} = F - F = 0.$$

Эпюра Q_y по всей длине балки изображена на рис. 2.68, *г*. Изгибающий момент на участке *I* (рис. 2.68, *б*)

$$M_{z\,I} = Fx,$$

т. е. при изменении x от 0 до ($0 \leqslant x \leqslant a$) значение $M_{z\,I}$ равномерно увеличивается от 0 до Fa, т. е. $M_{zA}=0$, $M_{zB}=Fa$.

На участке *II* (рис. 2.68, *в*) значение изгибающего момента

$$M_{z\,II} = Fx - F(x-a) = Fa.$$

Эпюра M_z по всей длине балки изображена на рис. 2.68, *д*. Как видим, в поперечных сечениях балки на участке *II* возникает только один внутренний силовой фактор — изгибающий момент; следовательно, участок *II* находится в состоянии чистого изгиба.

Эпюры Q_y и M_z на рис. 2.68 иллюстрируют справедливость следствий 2 и 1, сформулированных в § 2.22: на участке I $Q_{yI}=F=\text{const}$, причем $Q_{yI}>0$, а M_{zI} возрастает по линейному закону; на участке II $Q_{yII}=0$ и значение $M_{zII}=Fa=\text{const}$.

Двухопорная балка нагружена между опорами *A* и *B* силой *F* (рис. 2.69, *а*). В отличие от предыдущего случая здесь предварительно необходимо определить реакции R_A и R_B опор балки. Из уравнения моментов

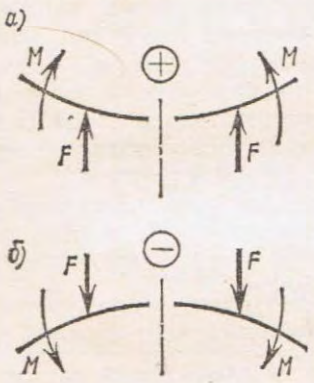


Рис. 2.67

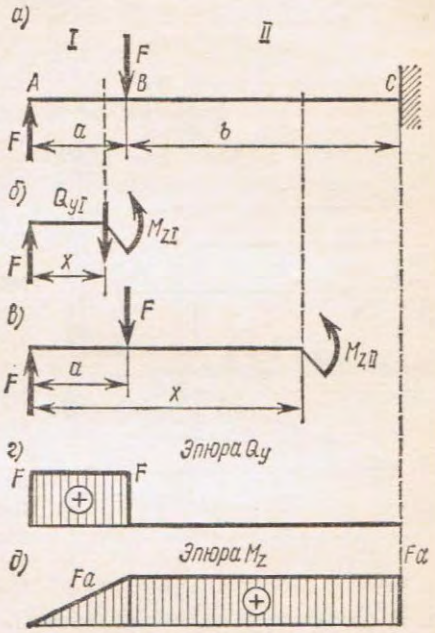


Рис. 2.68

относительно опоры B находим $R_A=Fb/(a+b)$, а из уравнения моментов относительно опоры A находим $R_B=Fa/(a+b)$.

Балка имеет два участка. Рассекая балку на участке I и отбрасывая часть балки правее сечения, находим

$$Q_{yI}=R_A=Fb/(a+b) \quad \text{и} \quad M_{zI}=R_Ax=[Fb/(a+b)]\,x.$$

Таким образом, на участке I поперечная сила постоянна и равна $Fb/(a+b)$ (рис. 2.69, *б*), а изгибающий момент при изменении x от 0 до a ($0\leqslant x\leqslant a$) увеличивается от 0 до $Fab/(a+b)$ (рис. 2.69, *в*).

Рассекая балку на участке II и отбрасывая часть балки правее сечения, находим:

$$Q_{yII}=R_A-F=Fb/(a+b)-F=-Fa/(a+b),$$
$$M_{zII}=R_Ax-F\,(x-a)=[Fb/(a+b)]\,x-F\,(x-a).$$

Поперечная сила на участке II имеет значение, равное $-Fa/(a+b)=-R_B$ (рис. 2.69, *б*). На участке II x изменяется в пределах $a\leqslant x\leqslant(a+b)$. Поэтому при $x=a$ изгибающий момент $M_{zC}=Fab/(a+b)$, а при $x=a+b$

$$M_{zB}=[Fb/(a+b)]\,(a+b)-F\,(a+b-a)=0,$$

т. е. при изменении x от 0 до $(a+b)$ изгибающий момент убывает от $Fab/(a+b)$ до 0 (рис. 2.69, *в*).

Эпюры Q_y и M_z на рис. 2.69 иллюстрируют справедливость следствия 2 (см. § 2.22): равномерно распределенной нагрузки на балке нет ($q=0$) и на каждом из обоих участков балки Q_y сохраняет постоянное значение, поэтому M_z на том и на другом участке изменяется по линейному закону, но $Q_{y\,I}>0$ и на участке I M_z возрастает, а $Q_{y\,II}<0$ и на участке II M_z убывает.

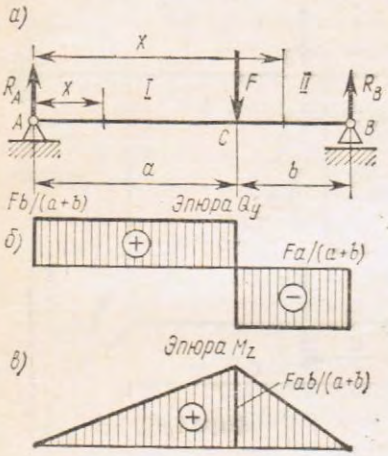


Рис. 2.69

Двухопорная балка нагружена между опорами парой сил, момент которой M (рис. 2.70, *а*). Действующую на балку пару сил можно уравновесить только парой. Поэтому реакции опор образуют пару сил ($\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$) и $R_A=R_B=M/(a+b)$.

Рассекая балку на участке I, а затем на участке II и отбрасывая в обоих случаях правую часть балки, получаем

$$Q_{y\,I}=Q_{y\,II}=R_A=M/(a+b),$$

т. е. значение поперечной силы Q_y по всей длине балки постоянно (рис. 2.70, *б*). Изгибающий момент на участке I

$$M_{z\,I}=R_A x=[M/(a+b)]\,x$$

и при изменении x от 0 до a $(0\leqslant x\leqslant a)$ значение изгибающего момента увеличивается от 0 до $Ma/(a+b)$.

Изгибающий момент на участке II

$$M_{z\,II}=R_A x-M=\frac{M}{(a+b)}\,x-M.$$

При $x=a$ получим $M_{x\,C\,II}=[M/(a+b)]a-M=-Mb/(a+b)$; при $x=a+b$ $M_{xB}=[M/(a+b)](a+b)-M=0$.

Следовательно, при изменении x в пределах $a\leqslant x\leqslant(a+b)$ значение $M_{z\,II}$ увеличивается от $-Mb/(a+b)$ до 0.

Таким образом, в сечении балки, где приложена пара сил с моментом M, на эпюре M_z возникает скачок от $Ma/(a+b)$ до $-Mb/(a+b)$ (рис. 2.70, *в*), т. е. на значение момента приложенной пары.

Эпюры на рис. 2.70 еще раз иллюстрируют справедливость положения, что при $Q=\text{const}>0$ изгибающий момент M_z возрастает по линейному закону (см. § 2.22, следствие 2).

Двухопорная балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q, как показано на рис. 2.71, *а*. Реакции опор A и B этой балки: $R_A=(2/3)\,qa$ и $R_B=(4/3)\,qa$. Как и в предыдущих случаях, балка имеет два участка.

На участке I $Q_{yI}=R_A=(2/3)\,qa=\text{const}$;

$$M_z=R_Ax=(2/3)\,qax$$

и при изменении x в пределах $0\leqslant x\leqslant a$ изгибающий момент увеличивается по линейному закону от $M_{zA}=0$ в сечении над опорой A до $M_{zC}=(2/3)\,qa^2$ в сечении, проходящем через точку C.

На участке II $Q_{y\,II}=R_A-q(x-a)=(2/3)\,qa-q(x-a)$;

$M_{z\,II}=R_Ax-q(x-a)(x-a)/2=(2/3)qax-q(x-a)^2/2$.

Как видим, на участке II и поперечная сила и изгибающий момент изменяются в зависимости от x. При изменении x в интервале

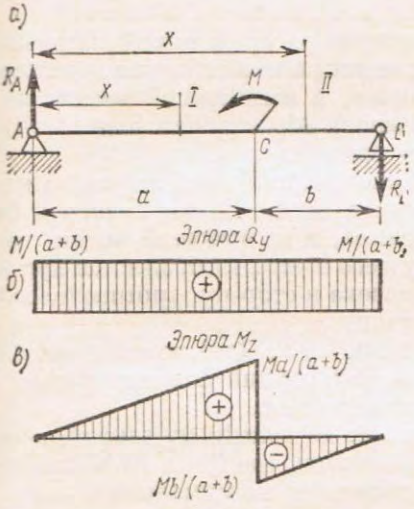


Рис. 2.70

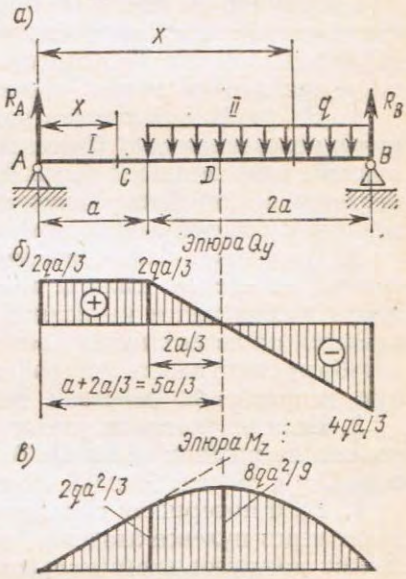


Рис. 2.71

$a\leqslant x\leqslant 3a$ поперечная сила изменяется по линейному закону от $Q_{yC}=(2/3)qa$ в сечении, проведенном через точку C, до $Q_{yB}=(2/3)qa\cdot 3a-q(3a-a)=-(4/3)qa$ в сечении над опорой B, проходя в некотором сечении балки через нулевое значение (рис. 2.71, *б*). Положение сечения, где $Q_y=0$, необходимо определить, так как исходя из дифференциальной зависимости (2.74) в сечении, где поперечная сила изменяет знак, переходя от $Q_y>0$ к $Q_y<0$, изгибающий момент достигает максимального значения.

Из уравнения $Q_{y\,II}=(2/3)\,qa-q(x-a)=0$ следует, что сечение D, в котором $Q_y=0$ (рис. 2.71, *а*, *б*), отстоит от левой опоры A на расстоянии

$$x=a+(2/3)\,a=(5/3)\,a.$$

Изгибающий момент, как видно из приведенного выше равенства, есть квадратичная функция от x, поэтому на участке, нагру-

женном равномерно распределенной нагрузкой, эпюра изгибающего момента изображается параболой:

при $x=a$ в сечении C $M_{zC}=(2/3)\,qa^2$;

при $x=(5/3)\,a$ в сечении D $M_{zD}=(2/3)\,qa\,(5/3)a-(q/2)[(5/3)\,a-a]^2=(8/9)\,qa^2$;

при $x=3a$ в сечении B $M_{zB}=(2/3)\,qa\cdot 3a-(a/2)\,(3a-a)^2=2qa^2-2qa^2=0$ (рис. 2.71, *в*).

Построение эпюры иллюстрирует справедливость следствий 2 и 3 из § 2.22, вытекающих из дифференциальных зависимостей между M_z, Q_y и q.

Сформулируем основные правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, которые являются как следствиями дифференциальных зависимостей q, Q и M_z, так и вытекают непосредственно из метода сечений.

1. На участке балки без равномерно распределенной нагрузки ($q=0$) поперечная сила $Q=\text{const}$ и ее эпюра изображается отрезком прямой, параллельным базовой линии, а изгибающий момент изменяется по линейному закону и эпюра M_z изображается наклоненным к базовой линии отрезком прямой.

2. На участке балки, несущем равномерно распределенную нагрузку, поперечная сила Q изменяется по линейному закону и ее эпюра изображается наклонной прямой, а изгибающий момент изменяется по квадратичному закону и его эпюра изображается дугой параболы, выпуклость которой обращена в сторону, противоположную направлению действия нагрузки.

3. Если на участках, указанных в п. 1 и 2, $Q>0$, то изгибающий момент возрастает; если $Q<0$, то изгибающий момент убывает; если $Q=0$, то изгибающий момент постоянен.

4. Если поперечная сила, изменяясь по линейному закону, проходит через нулевое значение, то в сечении, где $Q=0$, изгибающий момент достигает экстремального значения: максимального — при переходе от $Q>0$ к $Q<0$ и минимального — при переходе от $Q<0$ к $Q>0$.

5. Если границей участка балки служит точка приложения сосредоточенной силы $\boldsymbol{F}$, то эпюра Q в этом месте изменяется скачкообразно на значение $\boldsymbol{F}$, а на эпюре M_z возникает излом, т. е. происходит резкое изменение угла наклона отрезка прямой или дуги параболы.

6. Если границей участка балки служит точка приложения сосредоточенной пары сил, то на эпюре Q это не отражается, а на эпюре M_z возникает скачок, равный значению момента пары.

7. Если границей участка служит начало или окончание действия равномерно распределенной нагрузки, то на эпюре Q возникает излом (переход от параллельного к базовой линии отрезка к наклонному или, наоборот, от наклонного к параллельному), а на эпюре M_z прямолинейный и параболический участки сопрягаются плавно (прямолинейный участок является касательным к дуге параболы в их общей точке).

8. В сечении на свободном или шарнирно опертом конце балки изгибающий момент равен нулю, если в этом месте не приложена сосредоточенная пара сил. Поперечная сила в этом сечении равна внешней сосредоточенной силе.

9. В сечении, совпадающем с заделкой, значения Q и M_z, получившиеся на эпюрах, равны соответственно опорной реакции и реактивному моменту.

При построении эпюр Q и M_z рекомендуется придерживаться такой последовательности:

1. Найти опорные реакции (для консоли их можно не находить).

2. Разбить брус на участки, границами которых являются сечения, в которых приложены сосредоточенные силы и пары и начинается или заканчивается распределенная нагрузка. Такие сечения принято называть *характерными*.

3. Применяя метод сечений, построить эпюру поперечных сил. Если поперечная сила, изменяясь непрерывно, проходит через нулевое значение, то необходимо определить абсциссу сечения, где Q обращается в нуль.

4. Вычислить в характерных сечениях значения изгибающих моментов и по найденным ординатам построить эпюру M_z.

Пример 2.17. Построить эпюры Q_y и M_z для двухопорной балки, нагруженной, как показано на рис. 2.72, *а*.

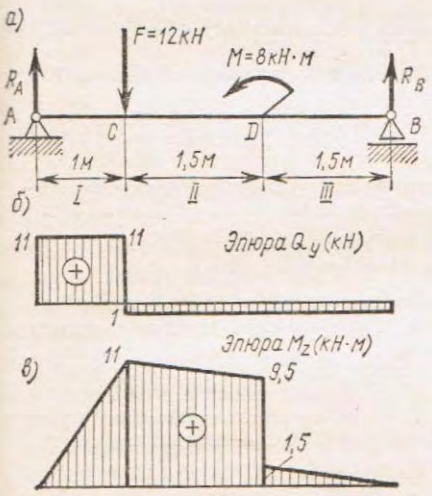


Рис. 2.72

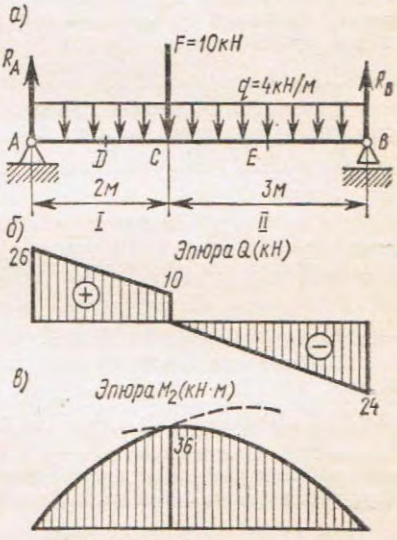


Рис. 2.73

Решение. 1. Определяем реакции опор R_A и R_B. Из уравнения моментов относительно точки B — $R_A \cdot AB + F \cdot CB + M = 0$ находим

$$R_A = (F \cdot CB + M)/AB = (12 \cdot 3 + 8)/4 = 11 \text{ кН}.$$

Из уравнения моментов относительно точки A — $F \cdot AC + M + R_B \cdot AB = 0$ находим

$$R_B = (F \cdot AC - M)/AB = (12 \cdot 1 - 8)/4 = 1 \text{ кН}.$$

Алгебраическая сумма проекций всех внешних сил на ось, перпендикулярную балке, $R_A - F + R_B = 11 - 12 + 1 = 0$; следовательно, реакции опор определены правильно.

2. Разбиваем балку на три участка. Характерными являются сечения A, C, D и B.

3. Так как все участки балки свободны от распределенной нагрузки, то поперечные силы на каждом участке постоянны и эпюра Q_y изобразится прямыми, параллельными базовой линии. Применяя метод сечений, определяем значения поперечных сил на каждом участке:

$$Q_{yI} = R_A = 11 \text{ кН}; \quad Q_{yII} = R_A - F = 11 - 12 = -1 \text{ кН};$$
$$Q_{yIII} = R_A - F = 11 - 12 = -1 \text{ кН}.$$

По полученным данным строим эпюру Q_y (рис. 2.72, *б*).

4. Для построения эпюры M_z, применяя метод сечений, вычисляем значения изгибающих моментов в характерных сечениях. При этом каждый раз рассматриваем равновесие левой отсеченной части (можно рассматривать правую часть или ту и другую части поочередно — результаты будут те же):

$$M_{zA} = 0; \quad M_{zC} = R_A \cdot AC = 11 \cdot 1 = 11 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{zDII} = R_A \cdot AD - F \cdot CD = 11 \cdot 2{,}5 - 12 \cdot 1{,}5 = 9{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{zDIII} = R_A \cdot AD - F \cdot CD - M = 11 \cdot 2{,}5 - 12 \cdot 1{,}5 - 8 = 1{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{zB} = R_A \cdot AB - F \cdot CB - M = 11 \cdot 4 - 12 \cdot 3 - 8 = 0.$$

По полученным данным строим эпюру M_z (рис. 2.72, *в*).

Рассматривая эпюры Q_y, M_z и нагрузку на балку с точки зрения общих правил построения эпюр, обнаруживаем, что построение эпюр не содержит принципиальных ошибок: например, где $Q > 0$ (участок *I*), момент M_z возрастает; где $Q < 0$ (участки *II* и *III*), он убывает; в сечении C на эпюре Q имеет место скачок, равный значению приложенной сосредоточенной силы (12 кН), а в эпюре M_z — излом, причем острие излома направлено против силы; в сечении D, где приложена пара сил, на эпюре M_z наблюдается скачок, равный моменту этой пары (8 кН·м), а в эпюре Q_y нет никаких изменений.

Пример 2.18. Построить эпюры Q_y и M_z для двухопорной балки, нагруженной, как показано на рис. 2.73, *а*.

Решение. 1. Из уравнения моментов относительно правой опоры $-R_A \times AB + F \cdot BC + q \cdot AB \cdot AB/2 = 0$ находим $R_A = F \cdot BC/AB + q \cdot AB/2 = 10 \cdot 3/5 + 8 \cdot 5/2 = 26$ кН.

Из уравнения моментов относительно левой опоры $R_B \cdot AB - F \cdot AC - q \cdot AB \cdot AB/2 = 0$ находим $R_B = F \cdot AC/AB + q \cdot AB/2 = 10 \cdot 2/5 + 8 \cdot 5/2 = 24$ кН.

Проверяя по уравнению проекций на вертикальную ось

$$R_A - F - q \cdot AB + R_B = 26 - 10 - 8 \cdot 5 + 24 = 0,$$

убеждаемся, что реакции опор определены правильно.

2. Разбиваем балку на два участка. Характерными сечениями являются A, C и B.

3. Применяя метод сечений, строим эпюру Q_y. Балка по всей длине несет равномерно распределенную нагрузку; следовательно, значение поперечной силы изменяется по линейному закону и ее эпюра изобразится наклонным отрезком прямой со скачком под сосредоточенной нагрузкой F. В сечении правее опоры A (при рассмотрении левой части балки)

$$Q_{yA} = R_A = 26 \text{ кН}.$$

В сечении левее сечения C (при рассмотрении левой части балки)

$$Q_{yCI} = R_A - q \cdot AC = 26 - 8 \cdot 2 = 10 \text{ кН}.$$

В сечении левее опоры B (при рассмотрении правой части балки)

$$Q_{yB} = -R_B = -24 \text{ кН}.$$

В сечении правее сечения C (при рассмотрении правой части балки)

$$Q_{yCII} = -R_B + q \cdot BC = -24 + 8 \cdot 3 = 0.$$

По полученным данным строим эпюру Q_y (рис. 2.73, *б*). Образовавшийся под сечением C в эпюре Q_y скачок, равный значению силы $F=10$ кН, подтверждает правильность построения эпюры поперечных сил.

4. Строим эпюру M_z (рис. 2.73, *в*). Так как на всех участках нагрузка распределенная, то эпюра изгибающих моментов должна иметь вид параболы с выпуклостью навстречу нагрузке и переломом под сечением C, где приложена сосредоточенная сила. При этом на участке *I*, где $Q_y>0$, M_z возрастает, а на участке *II*, где $Q_y<0$, M_z убывает.

Применяя метод сечений, определяем значения изгибающих моментов в характерных сечениях. В сечении A $M_{xA}=0$, в сечении B $M_{zB}=0$. В сечении C при рассмотрении левой отсеченной части

$$M_{zC}=R_A\cdot AC-q\cdot AC^2/2=26\cdot 2-8\cdot 2^2/2=36 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В том же сечении при рассмотрении правой отсеченной части

$$M_{zC}=R_B\cdot CB-q\cdot BC^2/2=24\cdot 3-8\cdot 3^2/2=36 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Совпадение значений M_{zC}, найденных слева и справа, подтверждает правильность построения эпюры M_z. Таким образом, эпюра M_z для заданной балки изображается восходящей дугой параболы на участке AC и нисходящей дугой другой параболы на участке CB. При этом $\max M_z=36$ кН.

§ 2.24. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ И ФОРМУЛЫ ПРИ ИЗГИБЕ

Выше установлено, что при чистом изгибе в поперечных сечениях возникают только нормальные напряжения. Для выяснения закона их распределения по поперечному сечению балки и вывода формулы, определяющей напряжение в произвольной точке поперечного сечения, введем следующие допущения: 1) *перпендикулярное оси недеформированного бруса плоское сечение остается и после изгиба плоским и нормальным к изогнутой оси бруса (гипотеза плоских сечений);* 2) *продольные волокна бруса при его деформации не надавливают друг на друга.*

Картина деформированного состояния при чистом изгибе, подтверждающая гипотезу плоских сечений, хорошо видна на резиновой модели бруса прямоугольного сечения с нанесенной на боковой грани сеткой из продольных и поперечных линий (рис. 2.74, *а*), имитирующих продольные слои и поперечные сечения бруса. При нагружении обоих концов бруса противоположно направленными парами сил продольные линии искривляются, образуя дуги окружности, а поперечные, оставаясь прямыми, лишь поворачиваются на некоторый угол (рис. 2.74, *б*).

Таким образом, при чистом изгибе поперечные сечения поворачиваются и продольные слои бруса у выпуклой части бруса удлиняются, а у вогнутой — укорачиваются. Очевидно, что где-то должен находиться слой, первоначальная длина которого не изменилась. Этот слой называется *нейтральным* (НС на рис. 2.74, *б*). Его положение пока неизвестно.

Возьмем в брусе (рис. 2.74) два смежных поперечных сечения, расположенных одно от другого на расстоянии dx, и допустим, что при изгибе между ними образовался угол $d\theta$ (рис. 2.75), вершина которого лежит в центре кривизны нейтрального слоя. Кривизна

нейтрального слоя

$$1/\rho = d\theta/dx. \qquad (2.76)$$

Из рис. 2.75 ясно, что отрезок AB произвольного слоя изогнутого бруса получил удлинение $\Delta dx = \smile B'B = d\,\theta \cdot y$, где y — расстояние этого слоя от нейтрального. Тогда по формуле (2.7) находим

$$\varepsilon = \Delta\, dx/dx = (d\theta/dx)\, y,$$

или с учетом равенства (2.76)

$$\varepsilon = y/\rho. \qquad (2.77)$$

Для перехода от деформаций к напряжениям применим закон Гука

$$\sigma = E\varepsilon = (E/\rho)\, y. \qquad (2.78)$$

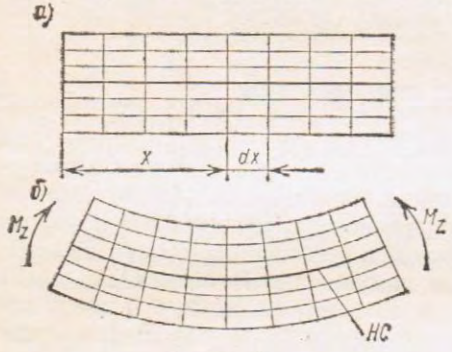


Рис. 2.74

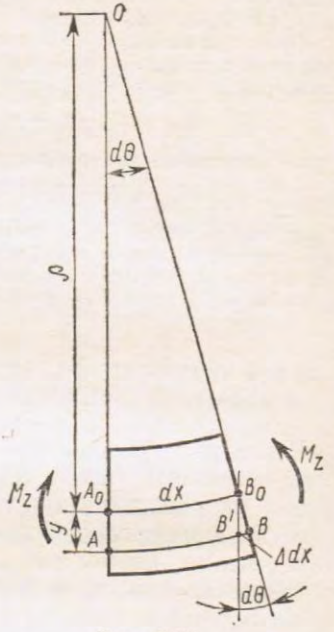


Рис. 2.75

Возможность применения закона Гука в рассмотренной форме обусловлена принятым допущением о ненадавливании волокон балки друг на друга, т. е. предположением, что каждое из них находится в состоянии одноосного растяжения или сжатия.

Выражение (2.78) показывает, что нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения прямо пропорционально ее расстоянию y от нейтральной оси. Графическое толкование формулы (2.78) показано на рис. 2.76. Линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением называется нейтральной осью (НО). В точках, расположенных на нейтральной оси, $\sigma = 0$ (поскольку для этих точек $y = 0$) и в любых других точках сечения нормальные напряжения пропорциональны их удалению от нейтрального слоя, т. е. они изменяются по линейному закону. Если, как обычно, напряжение растяжения направить от сечения, а напряжение сжатия — к сечению, то получим картину распределения напряжений, показанную на рис. 2.76.

Положение нейтральной оси определим из условия, что нормальная сила в поперечном сечении при чистом изгибе равна нулю. Разбив поперечное сечение на множество элементарных площадок dA

(рис. 2.77) и просуммировав элементарные продольные силы

$$\sigma dA = (Ey/\rho)\, dA$$

по всей площади сечения, получим

$$N = \int_A (E/\rho)\, y\, dA = (E/\rho) \int_A y\, dA = 0.$$

Вынесенная за знак интеграла постоянная величина $E/\rho \neq 0$, поскольку радиус кривизны деформированного бруса не равен бесконечности. Следовательно, это равенство имеет смысл лишь при

$$\int_A y\, dA = 0.$$

Этот интеграл представляет собой статический момент поперечного сечения относительно нейтральной оси. Из § 2.19 известно, что статический момент сечения равен нулю лишь относительно цент-

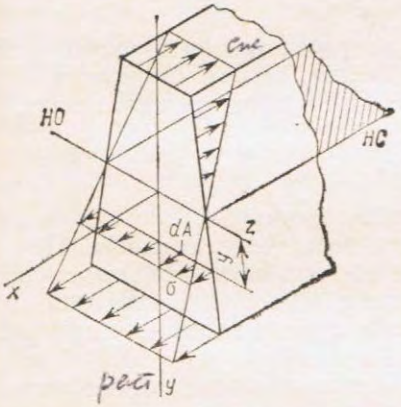


Рис. 2.76

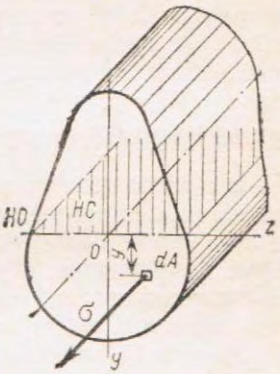


Рис. 2.77

ральной оси. Следовательно, нейтральная ось совпадает с *центральной осью z*. В рассматриваемом случае (рис. 2.77) силовая линия (ось *Oy*) совпадает с осью симметрии сечения, т. е. является одной из главных центральных осей. Нейтральная ось ей перпендикулярна и проходит, как мы установили, через центр тяжести, т. е. это вторая главная центральная ось. Опуская доказательство, можно утверждать, что *при прямом изгибе, т. е. в случае, когда силовая плоскость совпадает с главной плоскостью, нейтральная ось совпадает с главной центральной осью.*

Для определения радиуса кривизны нейтрального слоя используем зависимость между изгибающим моментом и нормальными напряжениями:

$$M_z = \int_A \sigma y\, dA,$$

где dA — элементарная площадка поперечного сечения (рис. 2.77); σdA — элементарная нормальная сила: $\sigma dA \cdot y = \sigma y dA$ — элемен-

тарный момент внутренних сил относительно оси z. Подставив вместо σ его выражение из (2.78), находим

$$M_z = (E/\rho)\int_A y^2\,dA,$$

где $\int_A y^2 dA = J_z$ — момент инерции сечения относительно оси z [см. формулу (2.60)]. Таким образом, $M_z = (1/\rho)EJ_z$. Отсюда

$$1/\rho = M_z/(EJ_z). \qquad (2.79)$$

По этой формуле определяется *кривизна изогнутой оси бруса, характеризующая деформацию изгиба*. Здесь величина EJ_x называется *жесткостью сечения бруса при изгибе*.

Исключив ρ из равенств (2.78) и (2.79), получим формулу для определения нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения

$$\sigma = M_z y/J_z. \qquad (2.80)$$

Формула (2.80), выведенная из рассмотрения прямого чистого изгиба, как показывают исследования, вполне приемлема и для определения нормальных напряжений при поперечном изгибе.

§ 2.25. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Балки рассчитывают на прочность по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. При поперечном изгибе балок наряду с нормальными возникают и касательные напряжения, обусловленные наличием поперечной силы, но они в подавляющем большинстве случаев невелики и при расчетах на прочность не учитываются.

Прочность балки обеспечена, если наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения, возникающие в *опасном сечении*, не превышают допустимых. Для балки, поперечные размеры которой по всей длине постоянны, опасное сечение то, в котором возникает наибольший по модулю изгибающий момент. Наибольшие нормальные напряжения возникают в точках опасного поперечного сечения, максимально удаленных от нейтральной оси. Эти точки принято называть *опасными*. Значения максимальных напряжений в опасных точках найдем по формуле (2.80):

$$\max \sigma_р = (M_z/J_z)\,y_1, \quad \max \sigma_с = (M_z/J_z)\,y_2,$$

где y_1 и y_2 — расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных точек соответственно в растянутой и сжатой зонах сечения.

Если материал балки хрупкий, например закаленная сталь, чугун, текстолит и др., то расчет на прочность при изгибе проводят по напряжениям растяжения и сжатия. У хрупких материалов (см. § 2.9) предел прочности при сжатии выше предела прочности при растяжении ($\sigma_{вс} > \sigma_{вр}$). Следовательно, поперечным сечениям балок из хрупких материалов целесообразно придавать асимметричную форму относительно нейтральной оси (рис. 2.78) и располагать бал-

ку так, чтобы большая часть материала находилась в растянутой зоне.

Таким образом, при расчетах балок из хрупкого материала используются два условия прочности:

для растянутой зоны

$$\max \sigma_p = (M_z/J_z)\, y_1 \leqslant [\sigma_p]; \tag{2.81}$$

для сжатой зоны

$$|\max \sigma_c| = (M_z/J_z)\, y_1 \leqslant [\sigma_c]. \tag{2.82}$$

Причем наилучшее использование материала происходит при форме сечения, удовлетворяющей условию

$$y_1/y_2 = [\sigma_p]/[\sigma_c].$$

При расчете балок из пластичных материалов, например из низкоуглеродистой стали или цветных металлов, допускаемые напряжения растяжения и сжатия одинаковы: $[\sigma_p]=[\sigma_c]=[\sigma]$. Поэтому для таких балок целесообразными являются сечения, симметричные относительно нейтральной оси (рис. 2.79), так как в этом случае наиболее удаленные точки в растянутой и сжатой зонах сечения располагаются на одинаковом расстоянии $y=h/2$ от нейтральной оси. И, следовательно,

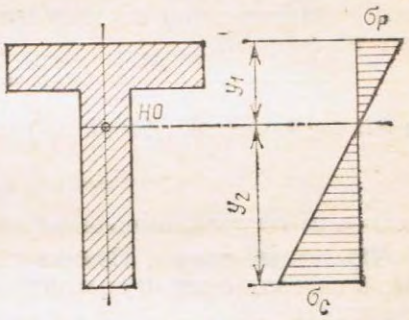


Рис. 2.78

$$\max \sigma_p = \max |\sigma_c| = \sigma_{max} = (M_z/J_z)\, h/2.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части этого равенства на $h/2$: $\sigma_{max}=M_z/(J_z/(h/2))$.

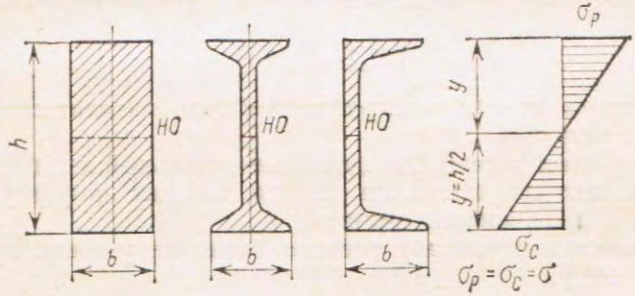


Рис. 2.79

Величина $J_z/(h/2)=W_z$, выражаемая в м³, см³ или мм³, называется *моментом сопротивления сечения при изгибе*.

Для прямоугольного сечения (рис. 2.79), размеры которого $b \times h$, момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (2.83)$$

Для круглого сечения

$$W_z = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (2.84)$$

Наиболее экономичными при изгибе являются такие формы сечения, при которых материал бруса расположен как можно дальше от нейтральной оси. У таких брусьев при наименьшей затрате материалов получается наибольший момент сопротивления W_z. Поэтому и возникли профили стандартного проката (рис. 2.79), все необходимые геометрические характеристики которых содержатся в ГОСТ 8239—72 «Сталь горячекатаная. Балки двутавровые», ГОСТ 8240—72 «Швеллеры».

Таким образом, наибольшие напряжения растяжения или сжатия в симметричном относительно нейтральной оси сечения находят по формуле

$$\sigma_{max} = M_z / W_z \quad (2.85)$$

и *условие прочности* балки из пластичного материала имеет вид

$$\sigma_{max} = M_z / W_z \leqslant [\sigma], \quad (2.86)$$

исходя из которого выполняют три вида расчетов.

Проектный расчет. Приняв $\sigma_{max} = [\sigma]$, по изгибающему моменту M_z в опасном сечении находят требуемое значение момента сопротивления:

$$W_z \geqslant M_z / [\sigma]. \quad (2.87)$$

Затем, исходя из принятой для балки формы поперечного сечения, находят его размеры.

Расчет допускаемой нагрузки выполняется при $\sigma_{max} = [\sigma]$ по формуле

$$[M_z] = W_z [\sigma]. \quad (2.88)$$

Затем, исходя из схемы нагружения балки, находят допускаемое значение нагрузки.

Проверочный расчет. Определив максимальный изгибающий момент и момент сопротивления сечения, находят по формуле (2.85) значение σ и сравнивают его с $[\sigma]$.

Аналогично выполняют расчеты балок из условия прочности (2.81) и (2.82).

Пример 2.19. Для балки, рассмотренной в примере 2.17, подобрать из условия прочности необходимые размеры двутавра при двух вариантах его расположения (рис. 2.80, *а*, *б*). Принять $[\sigma] = 150$ МПа.

Решение. 1. Из эпюры M_z, построенной для балки на рис. 2.72, *в*, следует, что в опасном сечении $M_z = 11$ кН·м $= 11 \cdot 10^3$ Н·м.

2. Приняв $\sigma=[\sigma]=150$ МПа$=150\cdot10^6$ Па, по расчетной формуле (2.87) находим необходимое значение момента сопротивления сечения:

$$W_z \geqslant M_z/[\sigma]=11\,000/(150\cdot10^6)=(11\,000/150)\,10^{-6}\ \text{м}^3=73{,}3\ \text{см}^3.$$

3. При расположении двутавра по варианту (а) из таблицы ГОСТ 8239—72 находим, что требуемому значению момента сопротивления соответствует двутавр № 14 с $W_z=81{,}7$ см^3. Площадь поперечного сечения этого двутавра 17,4 см^2, а масса 1 м — 13,7 кг.

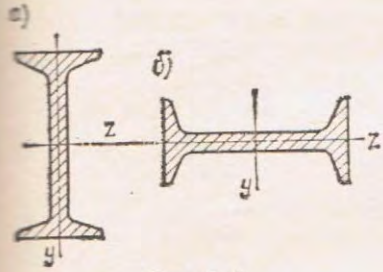


Рис. 2.80

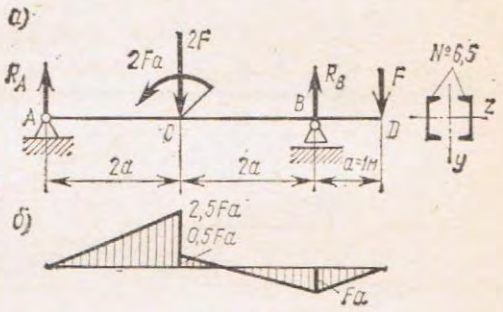


Рис. 2.81

4. При расположении двутавра по варианту (б) из таблицы того же ГОСТа находим двутавр №40 с значением момента $W_z=86{,}1$ см^3, площадью поперечного сечения 72,6 см^2 и массой 1 м — 57 кг.

5. Как видим, при расположении по варианту (а) на четырехметровую балку расходуется стали на $(57-13{,}7)4=173{,}2$ кг меньше, чем при расположении по варианту (б).

Пример 2.20. Определить допускаемую нагрузку $[F]$ на балку (рис. 2.81, *а*), составленную из двух швеллеров №6,5 при $[\sigma]=160$ МПа.

Решение. 1. Определяем реакции опор балки. Из уравнений моментов сил, действующих на балку, относительно точек A и B соответственно находим $R_A=1{,}25F$ и $R_B=1{,}75F$.

2. Построив эпюру M_z (рис. 2.81, *б*), видим, что опасное сечение расположено под силой $2F$, где возникает максимальный по абсолютному значению изгибающий момент. Следовательно, расчетный момент $[M_z]=2{,}5Fa$.

3. По таблице ГОСТ 8240—72 момент сопротивления сечения одного швеллера №6,5 $W_x=15$ см^3, а так как главная центральная ось z сечения балки совпадает с главными осями каждого из швеллеров, момент сопротивления сечения

$$W_z=2W_x=2\cdot15=30\ \text{см}^3=30\cdot10^{-6}\ \text{м}^3.$$

4. Подставив в расчетную формулу (2.88) значение $[M]_z=2{,}5\,Fa$, получим

$$2{,}5Fa=W_z\,[\sigma],$$

откуда

$$[F]=W_z\,[\sigma]/(2{,}5a)=30\cdot10^{-6}\cdot160\cdot10^6/(2{,}5\cdot1)=1920\ \text{Н}=1{,}92\ \text{кН}.$$

Пример 2.21. Проверить прочность чугунной консоли AB (рис. 2.82, *а*) при указанном положении таврового сечения, если $[\sigma_p]=30$ МПа, $[\sigma_c]=90$ МПа. Для опасного поперечного сечения балки построить эпюры нормальных напряжений.

Решение. 1. Построив эпюру M_z (рис. 2.82, *б*), видим, что опасное сечение балки проходит через точку D, где приложена пара сил с моментом M. Причем на участке II правее этого сечения (рис. 2.82, *а*) балка изогнута выпуклостью вверх, поскольку здесь $M_z<0$, а левее на участке I балка изогнута выпуклостью вниз ($M_z>0$).

2. Наибольший по абсолютному значению изгибающий момент $M_{zD\,II}=$ $=140$ кН·м$=140\cdot10^3$ Н·м возникает в сечении, принадлежащем участку, изогнутому выпуклостью вверх; следовательно, положение сечения балки выбрано правильно.

3. Изобразим в каком-либо произвольном масштабе (рис. 2.82, *в*) поперечное сечение балки, выразив его размеры в сантиметрах.

4. Определим положение центра тяжести сечения. Разбив сечение на два участка — прямоугольники *I* и *II* с центрами тяжести C_1 и C_2, находим площади

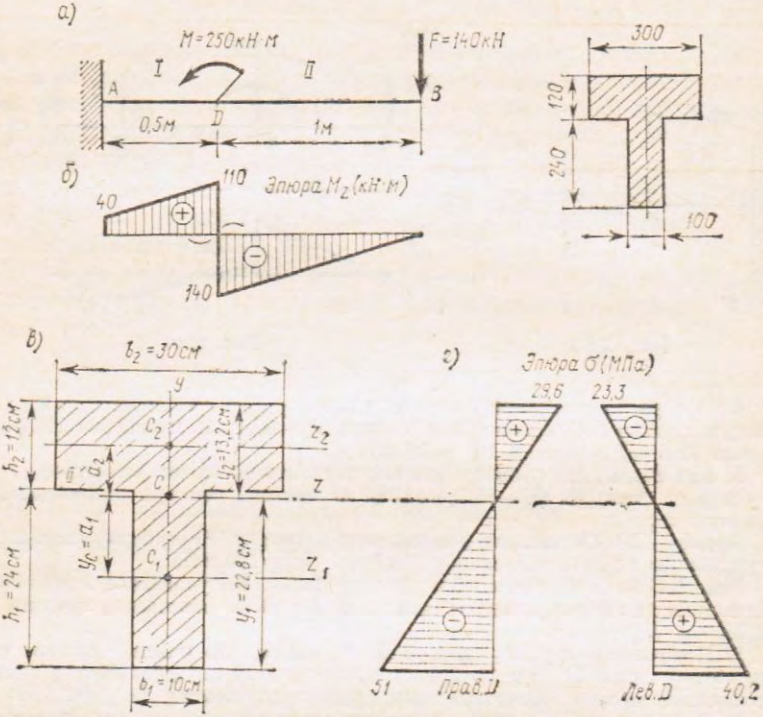


Рис. 2.82

этих участков: $A_1=240$ см^2, $A_2=360$ см^2. Относительно оси C_1z_1, ордината C_1 $y_{C_1}=$ $=0$, ордината C_2 $y_{C2}=C_1C_2=18$ см. Ордината центра тяжести сечения

$$y_C=(240\cdot0+360\cdot18)/(240+360)=10{,}8\text{ см}.$$

5. Следовательно, главная центральная ось Cz расположена от оси C_1z_1 на расстоянии $a_1=y_C=10{,}8$ см, а от оси C_2z_2 на расстоянии $a_2=y_2-y_1=7{,}2$ см (рис. 2.82, *в*).

6. Определяем главный центральный момент сечения как сумму моментов инерции участков *I* и *II* относительно оси Cz:

$$J_z=\frac{b_1h_1^3}{12}+a_1^2A_1+\frac{b_2h_2^3}{12}+a_2^2A_2=\frac{10\cdot24^3}{12}+10{,}8^2\cdot240+\frac{30\cdot12^3}{12}+$$
$$+7{,}2^2\cdot360\approx62\,500\text{ см}^4,$$

или

$$J_z=62\,500\cdot10^{-8}\text{ м}^4.$$

7. По формуле (2.81) определяем максимальные нормальные напряжения в растянутой зоне опасного сечения со стороны участка *II*:

$$\sigma_{p\,II}=\frac{M_{z\,DII}}{J_z}\,y_2=\frac{140\cdot10^3\cdot13{,}2\cdot10^{-2}}{62\,500\cdot10^{-8}}=29{,}6\cdot10^6\ \text{Па}=29{,}6\ \text{МПа}.$$

Следовательно, $\sigma_{p\,II}=29{,}6$ МПа$<[\sigma_p]=30$ МПа.

8. По формуле (2.82) определяем максимальные нормативные напряжения в сжатой зоне опасного сечения со стороны участка *II*:

$$|\sigma_{c\,II}|=\frac{M_{z\,DII}}{J_z}\,y_1=\frac{140\cdot10^3\cdot22{,}8\cdot10^{-2}}{62\,500\cdot10^{-8}}=51\cdot10^6\ \text{Па}=51\ \text{МПа}.$$

Следовательно, $|\sigma_{c\,II}|=51$ МПа$<[\sigma_c]=90$ МПа.

9. На участке *I* балки (в сечении *D*) в растянутой зоне расположена слабая часть балки. Поэтому это сечение также опасное и подлежит проверке.

По формуле (2.81) определяем максимальные напряжения в растянутой зоне, имея в виду, что здесь $M_{z\,D\,I}=110$ кН·м$=110\cdot10^3$ Н·м:

$$\sigma_{p\,I}=\frac{M_{z\,D}}{J_z}\,y_1=\frac{110\cdot10^3\cdot22{,}8\cdot10^{-2}}{62\,500\cdot10^{-8}}=40{,}2\cdot10^6\ \text{Па}=40{,}2\ \text{МПа}.$$

Следовательно, $\sigma_{p\,I}=40{,}2$ МПа$>[\sigma_p]=30$ МПа.

Балка перегружена на 33% и ее запас прочности значительно снижен, что недопустимо.

10. По формуле (2.82) находим

$$\sigma_{c\,I}=\frac{M_{z\,DI}}{J_z}\,y_2=\frac{110\cdot10^3\cdot13{,}2\cdot10^{-2}}{62\,500\cdot10^{-8}}=23{,}3\cdot10^6\ \text{Па}=23{,}3\ \text{МПа}.$$

Это значение напряжения можно было и не находить, так как оно заведомо должно быть меньше $|\sigma_{c\,II}|$. Полученное значение нужно для построения эпюры σ в поперечном сечении балки.

11. По найденным значениям строим эпюры σ в поперечных сечениях балки правее и левее сечения *D* (рис. 2.82, *г*).

§ 2.26. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

При поперечном изгибе кроме нормальных напряжений в поперечном сечении бруса возникают касательные напряжения, а согласно закону парности (см. § 2.8), такие же напряжения появляют-

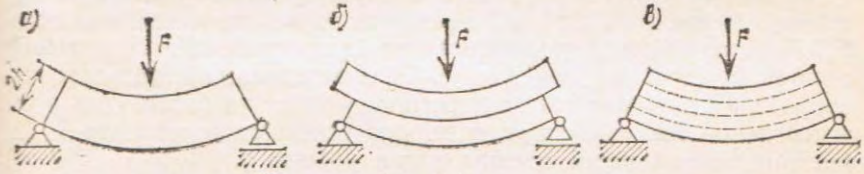


Рис. 2.83

ся и в продольных сечениях бруса. Возникновение касательных напряжений в продольных сечениях можно проиллюстрировать таким примером. Если брус прямоугольного сечения высотой $2h$ нагрузить силой $\boldsymbol{F}$, он изогнется, как показано на рис. 2.83, *а*. Если из такого же материала изготовить два бруса высотой h каждый, то при нагружении их силой $\boldsymbol{F}$ и отсутствии трения между ними они изогнутся каждый сам по себе (рис. 2.83, *б*). Отсюда видно, что при изгибе

целого бруса высотой $2h$ между частями бруса, разделенными продольными слоями, возникает взаимодействие, в результате которого и возникают касательные напряжения (рис. 2.83, *в*).

Касательное напряжение τ в любой точке поперечного сечения (рис. 2.84) определяется, как и парное напряжение, возникающее в продольном сечении, по формуле Журавского *:

$$\tau = Q_y S_{z\,\text{отс}}/(J_z b), \qquad (2.89)$$

где Q_y — поперечная сила в рассматриваемом сечении; $S_{z\,\text{отс}}$ — статический момент относительно нейтральной оси поперечного сечения той его части, которая расположена по одну сторону от прямой KL, проведенной параллельно нейтральной оси через ис-

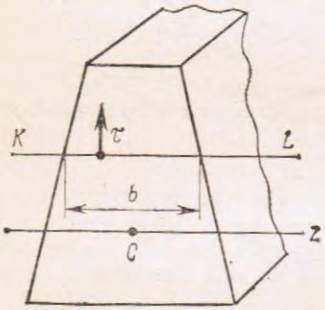


Рис. 2.84

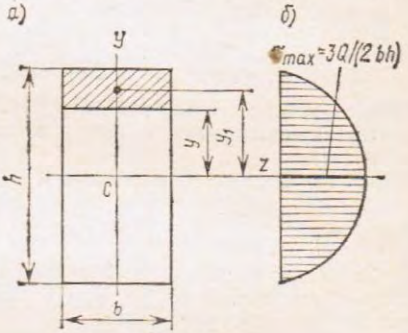


Рис. 2.85

следуемую точку; b — ширина поперечного сечения на уровне исследуемой точки; J_z — момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.

В основу вывода формулы Журавского положено допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине сечения.

Применим формулу Журавского к прямоугольному поперечному сечению бруса (рис. 2.85, *а*), в котором возникла поперечная сила Q_y. Момент инерции прямоугольного сечения $J_z = bh^3/12$, ширина сечения $b = \text{const}$ по всей высоте. Следовательно, касательные напряжения τ в точках сечения, расположенных на расстоянии y от центральной оси, зависят от изменения статического момента $S_{x\,\text{отс}}$ заштрихованной части сечения выше уровня y.

Статический момент заштрихованной части сечения $S_{x\,\text{отс}} = A_{\text{отс}}\, y_1$, где заштрихованная площадь $A_{\text{отс}} = b\,(h/2 - y)$, а ордината центра тяжести этой площади $y_1 = (1/2)\,(h/2 + y)$. Следовательно,

$$S_{x\text{отс}} = A_{\text{отс}}\, y_1 = b\,(h/2 - y)\,(1/2)\,(h/2 + y) = (b/2)\,(h^2/4 - y^2).$$

---

* Д. И. Журавский (1821—1891) — русский инженер-мостостроитель, создавший широко применимую приближенную теорию распределения касательных напряжений в балках при изгибе.

Подставив найденные значения J_z, $S_{x\,отс}$ в формулу (2.89), получим

$$\tau = [6Q_y/(bh^3)]\,(h^2/4 - y^2).$$

Как видим, эпюра касательных напряжений по высоте сечения (рис. 2.85, *б*) изображается квадратной параболой. Максимальное напряжение возникает в точках сечения, расположенных на центральной оси (при $y=0$):

$$\tau_{max} = 3Q_y/(2bh).$$

Таким образом, максимальное касательное напряжение в 1,5 раза превышает среднее значение напряжения $\tau_{ср} = Q_y/A = Q_y/(bh)$. У верхней и нижней кромки сечения (при $y=h/2$) $\tau=0$.

Поскольку при переходе от верхней кромки сечения к нижней касательное напряжение изменяется по параболическому закону, деформация сдвига $\gamma=\tau/G$ тоже изменяется по этому закону. Поэтому при поперечном изгибе поперечные сечения бруса не остаются плоскими, а искривляются (рис. 2.86).

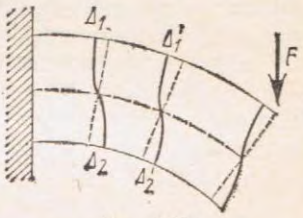


Рис. 2.86

При постоянном значении Q по длине бруса поперечные сечения претерпевают одинаковые искажения: $\Delta_1=\Delta_1'$ и $\Delta_2=\Delta_2'$. Следовательно, искривления поперечных сечений не сказываются на законе распределения нормальных напряжений и их значений. В балке прямоугольного и круглого сечений максимальные касательные напряжения возникают в тех точках, где нормальные напряжения равны нулю (на нейтральной оси), и, наоборот, в крайних точках сечения, где нормальные напряжения максимальны, касательные напряжения равны нулю. Поэтому за опасные можно принять точки, наиболее удаленные от нейтральной оси, что подтверждается практикой эксплуатации балок, работающих на изгиб. Однако в случае тонкостенных профилей (например, двутавра) необходимо проверить прочность балки и в точках, где полка сочленяется со стенкой, поскольку здесь возникают значительные как нормальные, так и касательные напряжения.

§ 2.27. ПОНЯТИЕ О ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе, как установлено в предыдущих параграфах, под действием поперечных нагрузок продольная ось бруса (балки) искривляется. Если изгиб протекает в пределах упругих свойств материала, т. е. в пределах действия закона Гука, то после снятия нагрузок ось бруса снова выпрямляется. Поэтому изогнутую ось бруса называют *упругой линией*. По форме, которую при нагружении бруса принимает его упругая линия, можно судить об угловых и линейных перемещениях при изгибе.

Изобразим продольную ось защемленной одним концом балки (рис. 2.87). Под действием нагрузки F, перпендикулярной оси балки и расположенной в главной плоскости, ось, оставаясь в этой плоскости, изгибается и принимает вид отрезка кривой. Рассматривая изогнутую ось балки (рис. 2.87), исходя из принятого допущения о незначительности перемещений точек тела при упругих деформациях (см. § 2.3), видим следующее.

Центры тяжести произвольных сечений *1* и *2* при изгибе балки переместились соответственно на расстояния v_1^* и v_2, а сами сечения, оставаясь плоскими (по гипотезе плоских сечений), повернулись на углы θ_1 и θ_2. Так как при повороте сечения остаются перпендикулярными к изогнутой оси бруса, то угол поворота θ произвольного поперечного сечения бруса равен углу между касательной к изогнутой оси в данной точке и направлением оси недеформированного бруса.

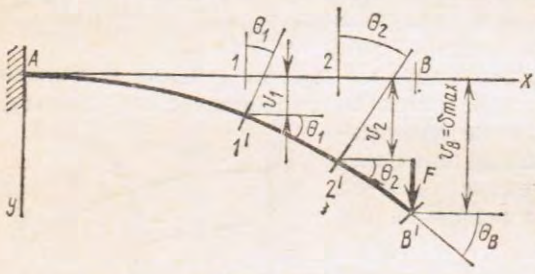


Рис. 2.87

Линейные перемещения центров тяжести произвольных поперечных сечений при изгибе называются прогибами бруса в соответствующих точках, а наибольший прогиб обозначается δ_{max} и называется *стрелой прогиба*. На рис. 2.87 стрела прогиба образовалась в точке B.

Существует несколько способов определения перемещений сечений при изгибе. Один из них основан на дифференцировании уравнения упругой линии. Для вывода этого уравнения используется формула (2.79), выражающая зависимость между кривизной $1/\rho$ и изгибающим моментом M_z. При этом следует иметь в виду, что правило знаков для кривизны изогнутой оси связано с выбранными направлениями осей координат. Если принять, что ось x направлена вправо, а ось y — вниз, как показано на рис. 2.87, то кривизна оси балки положительна в том случае, когда при изгибе балка обращена вогнутостью вниз, и отрицательна, когда балка обращена вогнутостью вверх, т. е. положительному изгибающему моменту соответствует отрицательная кривизна, а отрицательному — положительная кривизна. В соответствии с этим перепишем формулу (2.79) в следующем виде:

$$1/\rho = -M_z/(EJ_z).$$

С другой стороны, из курса математики известно, что в системе координат (x, y) кривизна упругой линии при малых перемещениях

---

* Перемещение по осям x, y и z принято соответственно обозначать u, v и w.

сечений может быть выражена равенством

$$1/\rho = d^2y/dx^2.$$

Сопоставив друг с другом два последних равенства, получаем *дифференциальное уравнение упругой линии балки*

$$d^2y/dx^2 = -M_z/(EJ_z). \qquad (2.90)$$

Интегрируя уравнение (2.90) для каждого конкретного случая нагружения балки, можно определить сначала угол поворота заданного сечения:

$$\theta = dy/dx = \int M_z\, dx/(EJ_z) + C,$$

а затем его прогиб:

$$v = \int\int [M_z\, dx/(EJ_z)]\, dx + Cx + D.$$

Если балка имеет несколько участков нагружения, то уравнение (2.90) составляют для каждого участка в отдельности. После двойного интегрирования каждого из этих уравнений образуется по две произвольных постоянных, которые необходимо определить. Решение получается очень громоздким. Поэтому чаще всего для определения перемещений сечений балок используют более рациональный способ с помощью интеграла Мора.

§ 2.28. ИНТЕГРАЛ МОРА

Допустим, что для бруса, нагруженного силой $\boldsymbol{F}$ (рис. 2.88), требуется определить перемещение точки K в направлении y.

Проведем из точки K касательную к участку бруса слева в точке O и выделим у этой точки элемент длиной dx. При нагружении бруса внешней силой $\boldsymbol{F}$ кривизна элемента dx изменится на $\Delta(1/\rho)$ и правое его сечение повернется относительно левого на угол $d\theta$, значение которого, согласно формулам (2.76) и (2.79), запишем так:

$$d\theta = \Delta(1/\rho)\, dx = [M_{zF}/(EJ_z)]\, dx.$$

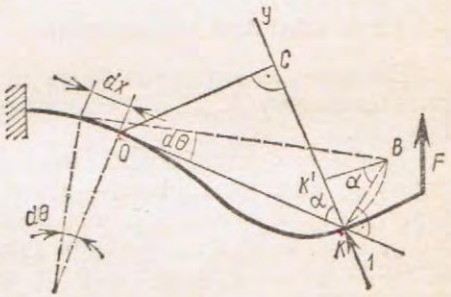


Рис. 2.88

Из-за этого поворота правая часть бруса повернется как жесткое целое на тот же угол $d\theta$, а точка K по направлению y переместится на

$$dv_K = KK'.$$

Из $\Delta KBK'$ $KK' = KB \sin\alpha$, а из ΔOKB, пренебрегая длиной элемента dx и считая $\operatorname{tg}(d\theta) = d\theta$, $KB = OK\, d\theta$. Таким образом,

$$dv_K = OK \sin\alpha \cdot d\theta.$$

Из ΔOKC видим, что $OK \sin\alpha = OC$; следовательно,

$$dv_K = OC\, d\theta.$$

Если в точке K по направлению y приложить к брусу единичную (безразмерную) силу 1, то момент единичной силы $M_{z1} = 1 \cdot OC$ и тогда $dv_K = M_{z1} d\theta$.

Подставив сюда полученное выше значение угла $d\theta$, получим

$$dv_K = [M_{zF} M_{z1}/(EJ_z)]\, dx.$$

Интегрируя эти выражения отдельно для каждого участка l_i нагружения бруса и суммируя результаты, получим формулу интеграла Мора

$$v_K = \sum \int_{l_i} [M_{zF} M_{z1}/(EJ_z)]\, dx. \qquad (2.91)$$

В случае если жесткость сечения бруса по всей длине постоянна, формула (2.91) имеет вид

$$v_K = [1/(EJ_z)] \sum \int_{l_i} M_{zF} M_{z1}\, dx, \qquad (2.92)$$

где M_{zF} — уравнение изгибающего момента от нагрузки $\boldsymbol{F}$; M_{z1} — уравнение изгибающего момента от единичной силы.

Для определения угла поворота сечения в точке K формула интеграла Мора аналогична формуле (2.92):

$$\theta_K = [1/(EJ_z)] \sum \int_{l_i} M_{zF} M_{z1}\, dx. \qquad (2.93)$$

Только в этом случае M_{z1} — уравнение изгибающего момента от единичного момента.

§ 2.29. ПРАВИЛО ВЕРЕЩАГИНА

Вычисление интеграла Мора целесообразно вести по правилу, предложенному А. Н. Верещагиным в 1925 г. для прямолинейных брусьев.

Уравнения изгибающих моментов M_{zF} и M_{z1}, входящие в формулу интеграла Мора,— это некоторые функции от x: $M_{zF} = y = f_1(x)$, $M_{z1} = y = f_2(x)$, а графики этих функций — эпюры M_{zF} и M_{z1} (рис. 2.89) на некотором участке балки. Причем если первая функция $y = f_1(x)$ может быть и нелинейной, то вторая $y = f_2(x)$, выражающая изгибающий момент от единичной силы (или единичного момента), обязательно линейная. Поэтому ее можно представить уравнением прямой с угловым коэффициентом, т. е.

$$y = f_2(x) = b + kx.$$

Следовательно, вычисление интеграла $\int_l M_{zF} M_{z1} dx$ можно заменить вычислением интеграла

$$\int_0^l f_1(x) f_2(x)\, dx = \int_0^l f_1(x)(b + kx)\, dx.$$

Раскрыв скобки под интегралом в правой части равенства, получим

$$\int_0^l f_1(x) f_2(x)\,dx = b\int_0^l f_1(x)\,dx + k\int_0^l x f_1(x)\,dx. \qquad (a)$$

Произведение $f_1(x)\,dx$ есть не что иное, как заштрихованная на рис. 2.89 элементарная площадка эпюры M_{zF}. Значит, первый интеграл в правой части равенства (а) выражает площадь эпюры M_{zF} в интервале от $x=0$ до $x=l$, а второй интеграл — статический момент этой же площади относительно оси y, который, как известно из § 2.19 [формула (2.59)], выражается произведением площади на координату x_C ее центра тяжести C. Если площадь эпюры M_{zF} обозначить буквой ω, то равенство (а) примет вид

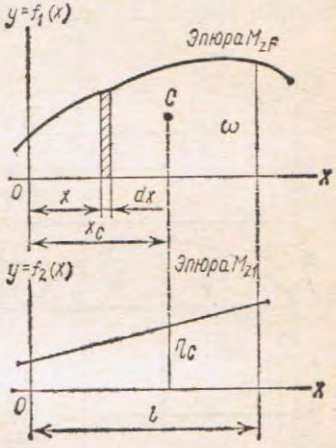


Рис. 2.89

$$\int_0^l f_1(x) f_2(x)\,dx = b\omega + k\omega x_C = \omega(b + kx_C),$$

где $b+kx_C=\eta_C$, т. е. ордината эпюры M_{z1} под центром тяжести C эпюры M_{zF}. Следовательно, в окончательном виде

$$\int_0^l M_{zF} M_{z1}\,dx = \int_0^l f_1(x) f_2(x)\,dx = \omega\eta_C.$$

Теперь формула интеграла Мора (2.92) может быть записана так:

$$v_K = [1/(EJ_z)]\sum \omega\eta_C. \qquad (2.94)$$

Таким образом, правило Верещагина состоит в том, что интеграл Мора, составленный для каждого из участков нагружения балки, равен произведению площади ω нелинейной эпюры изгибающих моментов M_{zF} на ординату η_C эпюры изгибающего момента M_{z1}, соответствующую положению центра тяжести площади ω.

Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина обычно называют *методом перемножения эпюр*. Эпюра M_{zF} называется грузовой эпюрой, а эпюра M_{z1} — единичной.

При перемножении эпюр необходимо иметь в виду следующее: произведение $\omega\eta_C>0$, если площадь ω и ордината η_C расположены по одну сторону от базовых линий; при расположении ω и η_C по разные стороны от базовых линий $\omega\eta_C<0$;

если в пределах данного участка грузовая эпюра линейна, то безразлично, умножается ли площадь грузовой эпюры на ординату единичной или, наоборот, площадь единичной эпюры на ординату грузовой;

построенные эпюры M_{zF} и M_{z1} не штрихуют.

В табл. 2.1 приведены формулы для определения площадей некоторых эпюр и положений их центров тяжести.

Все сказанное выше сохраняет силу и при определении углов поворота сечений θ_K, с той лишь разницей, что вместо эпюры единичной силы строится эпюра единичного момента.

Пример 2.22. Для балки, нагруженной равномерно распределенной силой интенсивностью q, определить прогиб посередине пролета l и поворот сечения над правой опорой B (рис. 2.90, *а*).

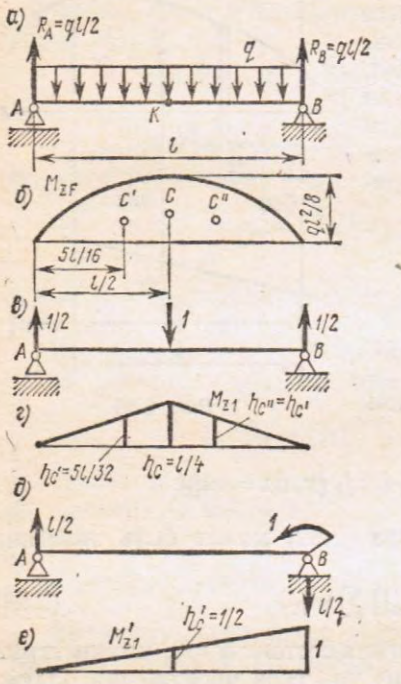


Рис. 2.90

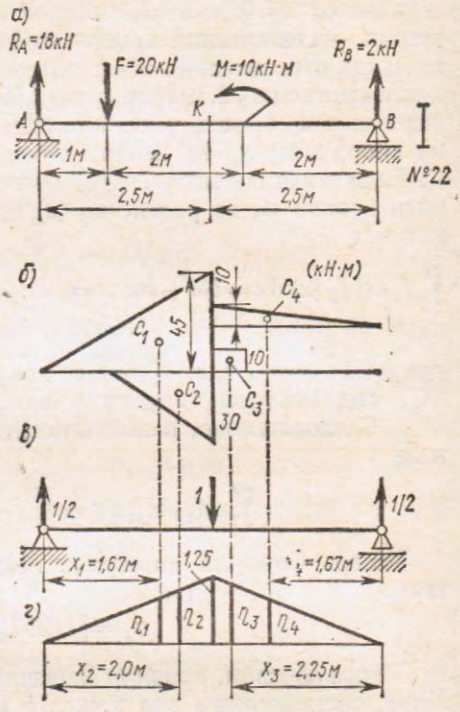


Рис. 2.91

Решение. 1. Ввиду симметричности расположения нагрузки реакции опор $R_A=R_B=ql/2$.

2. Строим эпюру M_{zF}. Она имеет вид параболического сегмента (рис. 2.90, *б*) с хордой l и высотой $h=ql^2/8$.

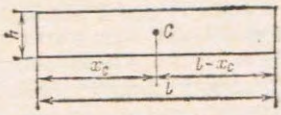
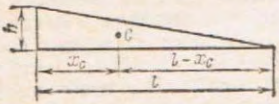
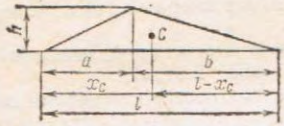
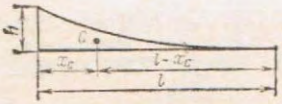
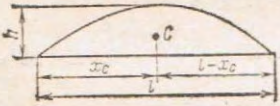
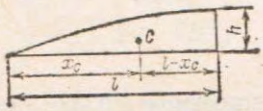
3. Освободив балку от нагрузки, приложим к точке K (посередине пролета) единичную силу (рис. 2.90, *в*) и построим эпюру M_{z1} (рис. 2.90, *г*).

4. Так как эпюра M_{z1} в данном случае состоит из двух линейных участков, соответственно разделим грузовую эпюру на два параболических треугольника с центрами тяжести C' и C''. Площади этих фигур равны между собой, т. е.

$$\omega'=\omega''=\frac{2}{3}h\frac{l}{2}=\frac{2}{3}\frac{ql^2}{8}\cdot\frac{l}{2}=\frac{ql^3}{24}.$$

5. Из пропорции $\eta_{C'}:\eta_C=(5/16)l:((1/2)l)$ находим соответствующую положению C' ординату левой части эпюры M_{z1}: $\eta_{C'}=5l/32$.

Таблица 2.1

Вид эпюры	ω	Положение центра тяжести x_C	Положение центра тяжести $l-x_C$
	hl	$l/2$	$l/2$
	$hl/2$	$l/3$	$2l/3$
	$hl/2$	$(a+l)/3$	$(b+l)/3$
	$hl/3$	$l/4$	$3l/4$
	$2hl/3$	$l/2$	$l/2$
	$2hl/3$	$5l/8$	$3l/8$

6. По формуле (2.94) искомый прогиб посередине пролета балки

$$v_K = \delta_{max} = \frac{1}{EJ_x} 2\omega' \eta_{C'} = \frac{1}{EJ_z} 2 \frac{ql^2}{24} \frac{5}{32} l,$$

откуда

$$v_K = \delta_{max} = \frac{5ql^4}{384EJ_z}.$$

7. Для определения угла поворота сечения над правой опорой приложим в этом месте к балке, освободив ее от нагрузки, единичный момент (рис. 2,90, *д*) и построим эпюру M'_{z1}, которая линейна по всей длине l.

8. Площадь параболического сегмента с центром тяжести C

$$\omega = \frac{2}{3} hl = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l = \frac{ql^3}{12}.$$

Ордината эпюры M'_{z1} под центром тяжести C (рис. 2.90, *е*) $\eta'_C=1/2$. Следовательно,

$$\theta_B=\frac{1}{FJ_z}\omega\eta'_C=\frac{1}{EJ_z}\frac{qf^3}{12}\frac{1}{2}=\frac{qf^3}{24EJ_z}.$$

Пример 2.23. Определить прогиб в середине пролета балки, нагруженной силой и парой сил, как показано на рис. 2.91, *а*. Принять $E=2\cdot10^5$ МПа.

Решение. 1. Определяем реакции опор: $R_A=18$ кН и $R_B=2$ кН.

2. При произвольном нагружении балки изломы грузовой эпюры, как правило, не совпадают с изломом единичной эпюры. В подобных случаях целесообразно применять *метод расслоения грузовой эпюры*, т. е. строить эпюры от каждой силы отдельно, подходя к сечению K слева или справа в зависимости от места приложения внешней нагрузки (рис. 2.91, *б*).

Эпюра изгибающих моментов от силы R_A имеет вид треугольника с центром тяжести C_1. Изгибающий момент на участке AK изменяется от 0 (в сечении над опорой A) до $18\cdot2{,}5=45$ кН·м (в сечении K). Изгибающий момент от силы F изменяется от 0 (в сечении под силой F) до $-20\cdot1{,}5=-30$ кН·м. Центр тяжести этой эпюры C_2. Изгибающий момент от момента $M=10$ кН·м изображается прямоугольником с центром тяжести C_3. Изгибающий момент от силы R_B имеет вид треугольника с центром тяжести C_4 (для удобства эта эпюра изображена несколько выше эпюры от момента M).

3. Освободив балку от нагрузки, приложим в сечении K единичную силу (рис. 2.91, *в*) и построим единичную эпюру (рис. 2.91, *г*).

4. Значения ординат η_i единичной эпюры под соответствующими центрами тяжести грузовой находим из пропорций $\eta_i/x_i=1{,}25/2{,}5=1/2$, откуда $\eta_1=\eta_4=1{,}67/2=0{,}835$ м; $\eta_2=2\cdot1/2=1$ м; $\eta_3=2{,}25/2=1{,}125$ м.

5. Имея в виду, что для сечения двутавра № 24*а* $J_z=3800$ см$^4=3800\cdot10^{-8}$ м^4 (ГОСТ 8239—72), $E=2\cdot10^5$ МПа$=2\cdot10^5\cdot10^6$ Па, а значения изгибающих моментов выражены на грузовой эпюре в кН·м, то по формуле (2.94) находим прогиб балки в точке K:

$$v_K=\frac{1}{2\cdot10^5\cdot10^6\cdot3800\cdot10^{-8}}\times$$

$$\times\left(\frac{2{,}5\cdot45}{2}\cdot0{,}835-\frac{1{,}5\cdot30}{2}\cdot1+\frac{0{,}5\cdot10}{2}\cdot1{,}125+\frac{2{,}5\cdot10}{2}\cdot0{,}835\right)10^3=$$

$$=\frac{37{,}8}{2\cdot38}\cdot10^{-3}\text{ м}\approx4{,}98\cdot10^{-3}\text{ м}\approx5\text{ мм}.$$

§ 2.30. РАСЧЕТЫ НА ЖЕСТКОСТЬ

Многие элементы строительных и машиностроительных конструкций (балки, оси, валы и пр.) кроме расчетов на прочность требуют расчета и на жесткость. Условие жесткости обычно выражается неравенством

$$\delta\leqslant[\delta],\qquad(2.95)$$

суть которого в том, что максимальный прогиб (стрела прогиба) не должен превышать допускаемого значения $[\delta]$.

Допускаемый прогиб $[\delta]$ зависит от назначения и условий работы рассчитываемого элемента конструкции и колеблется в широких пределах. Например, для балок, валов или осей $[\delta]$ выражают в долях пролета l (расстояния между опорами), т. е. принимают $[\delta]=l/k$, где k — положительное число. Например, для валов и шпинделей металлорежущих станков $[\delta]=(0{,}005\ldots0{,}001)\,l$, а для балок и перекрытий гражданских и промышленных зданий колеблется от $l/150$ до $0{,}001\,l$. В частности, жесткость балки в примере 2.23 соответствует этому значению; ее прогиб $\delta=v_K=0{,}001\,l$.

§ 2.31. ОСНОВЫ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Напомним, что *статически неопределимыми* называются системы, для которых реакции связей внутренние силовые факторы не могут быть определены с помощью уравнений равновесия и метода сечений. В § 2.11 рассмотрены простейшие случаи статически неопределимых систем, элементы которых испытывали лишь осевое растяжение или сжатие. Рассмотрим здесь более общие случаи, уделив основное внимание статически неопределимым балкам.

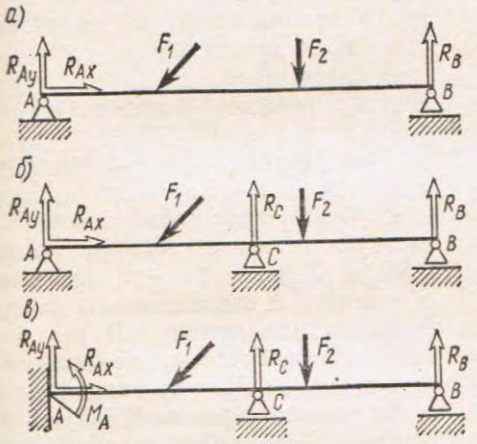


Рис. 2.92



Рис. 2.93

На рис. 2.92, *а* показана двухопорная статически определимая балка. Все три реакции R_{Ax}, R_{Ay}, R_B определяются из трех уравнений равновесия плоской системы сил, после чего, применяя метод сечений, легко найти внутренние силовые факторы в любом сечении балки. Добавим еще одну связь (рис. 2.92, *б*). В результате этого система стала более прочной и жесткой. Однако теперь из трех уравнений равновесия четыре реакции R_{Ax}, R_{Ay}, R_B, R_C определить нельзя. Таким образом, балка стала один раз статически неопределимой.

Если заменить шарнирно-неподвижную опору заделкой (рис. 2.92, *в*), появится еще одна лишняя связь и система станет дважды статически неопределимой. Для определения пяти реакций по-прежнему есть только три уравнения равновесия.

Как отмечалось в § 2.11, *для решения статически неопределимых задач дополнительно к уравнениям равновесия необходимо составить уравнения перемещений по числу лишних связей*. Методы составления этих уравнений могут быть различными. Наиболее об-

щим и широко применяемым на практике является *метод сил*. Сущность этого метода рассмотрим на конкретном примере.

На рис. 2.93, *а* показана балка, один конец которой защемлен, а другой оперт на шарнирно-подвижную опору. Такая балка является один раз статически неопределимой, поскольку число реакций три, а уравнений равновесия для плоской системы параллельных сил можно составить только два. Для того чтобы превратить данную систему в статически определимую, необходимо устранить лишнюю связь. В качестве лишней связи выбираем шарнирно-подвижную опору. Устранив опору B, получаем статически определимую консольную балку (рис. 2.93, *б*). Такую систему принято называть *основной*.

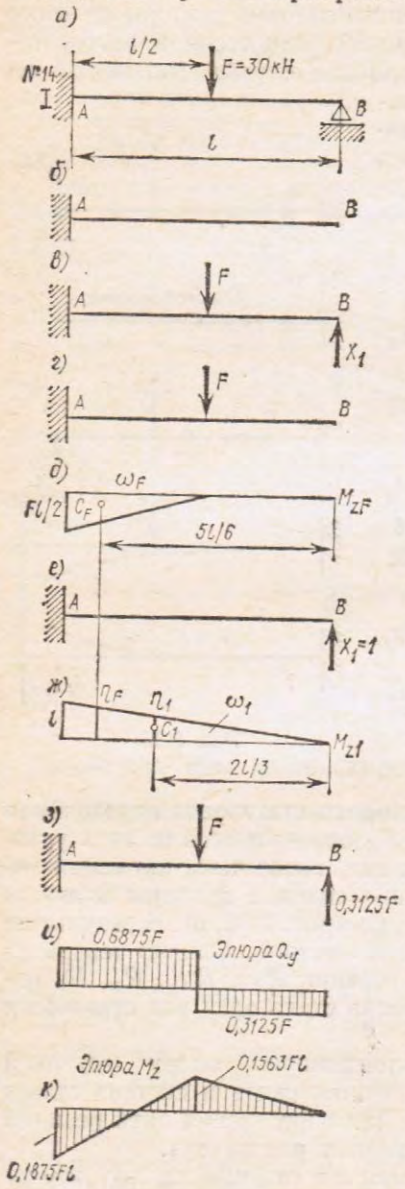


Рис. 2.94

Нагружаем основную систему заданной силой, а вместо отброшенной опоры прикладываем неизвестную реакцию $\boldsymbol{R_B = X_1}$ (рис. 2.93, *в*). Лишние реакции принято обозначать $\boldsymbol{X}$ независимо от того, сила это или момент. В результате получаем систему, *эквивалентную* заданной. В силу эквивалентности полное перемещение точки B основной системы, нагруженной заданной силой $\boldsymbol{F}$ и лишней реакцией $\boldsymbol{X_1}$ по направлению удаленной связи, должно быть равно нулю, так как в точке B исходная балка не имеет прогиба.

В соответствии с принципом независимости действия сил перемещения, обусловленные одновременным действием заданных сил и лишней неизвестной, должны быть равны сумме этих перемещений, вычисленных по отдельности и взятых со своими знаками. Перемещение сечения, где приложена лишняя неизвестная $\boldsymbol{X_1}$, вызванное заданной силой, обозначим δ_{1F} (рис. 2.93, *г*). Перемещение этого же сечения от силы $\boldsymbol{X_1}$ обозначим δ_{X_1} (рис. 2.93, *д*).

При этом перемещение δ_{1X_1} удобно заменить произведением $\delta_{11}X_1$, в котором δ_{11} — перемещение сечения от единичной силы $X_1=1$. Тогда уравнение перемещений запишется в виде

$$\delta_{11}X_1+\delta_{1F}=0. \qquad (2.96)$$

Уравнение (2.96) называют *каноническим уравнением метода сил*, поскольку оно справедливо для любой системы один раз статически неопределимой, а в качестве неизвестной принята сила (или пара сил). Решая уравнение (2.96) относительно X_1, определяем искомую реакцию. Перемещения δ_{1F} и δ_{11} можно найти приемами, описанными в § 2.29.

Пример 2.24. Проверить прочность заданной балки (рис. 2.94, *а*) при $\sigma_т=320$ МПа, $[s]=2$.

Решение. Для проверки прочности надо найти наибольший изгибающий момент (построить эпюру M_z), а это, в свою очередь, требует определения опорных реакций, которые в данном случае нельзя найти из уравнений равновесия — балка один раз статически неопределима.

Основную систему выбираем, устранив подвижную опору B (рис. 2.94, *б*). Основная система с заданной нагрузкой и лишней реакцией составляет эквивалентную систему (рис. 2.94, *в*). Для определения коэффициентов, входящих в каноническое уравнение $\delta_{11}X_1+\delta_{1F}=0$, нагружаем основную систему заданной нагрузкой (рис. 2.94, *г*) и строим эпюру M_{zF} (рис. 2.94, *д*), затем прикладываем к основной системе единичную силу (рис. 2.94, *е*) и строим эпюру M_{z1} (рис. 2.94, *ж*). При определении коэффициентов δ_{11} и δ_{1F} интеграл Мора вычисляем по правилу Верещагина:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ_z}\frac{1}{2}l\frac{2}{3}l=\frac{l^3}{3EJ_z};$$

$$\delta_{1F}=-\frac{1}{EJ_z}\frac{1}{2}\frac{l}{2}\frac{Fl}{2}\frac{5}{6}l=-\frac{5Fl^3}{48EJ_z}.$$

Решая каноническое уравнение $[l^3/(3EJ_z)]X_1-5Fl^3/(48EJ_z)=0$, получаем $X_1=0{,}3125F$. Основная система, нагруженная заданными силами и найденной реакцией X_1, показана на рис. 2.94, *з*. Строим для нее эпюры Q_y и M_z (рис. 2.94, *и*, *к*).

Опасное сечение находится в заделке. Наибольшее напряжение в нем

$$\sigma_{max}=\frac{0{,}1875Fl}{W_z}=\frac{0{,}1875\cdot 30\cdot 10^3\cdot 2}{81{,}7\cdot 10^{-6}}=137{,}7\cdot 10^6\ \text{Па}=137{,}7\ \text{МПа},$$

где $W_z=81{,}7$ см^3 принято для двутавра № 14 по таблице сортамента. Условие прочности выполнено, поскольку

$$s=\sigma_т/\sigma_{max}=320/137{,}7=2{,}3>[s].$$

Глава 7

КОСОЙ ИЗГИБ. ИЗГИБ БРУСА С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

§ 2.32. КОСОЙ ИЗГИБ

Если в поперечном сечении возникают два внутренних силовых фактора — изгибающие моменты M_z и M_y, то происходит *косой чистый изгиб*. При *поперечном косом изгибе* в поперечных сечениях бруса одновременно с изгибающими моментами возникают поперечные силы Q_y и Q_z. В том и другом случае нормальное напряжение

σ в любой точке K поперечного сечения (рис. 2.95, *а*) согласно принципу независимости действия сил определяется как алгебраическая сумма напряжений, обусловленных изгибающими моментами M_y и M_z, т. е.

$$\sigma = \sigma_{M_y} + \sigma_{M_z} = (M_y/J_y)\, z + (M_z/J_z)\, y. \qquad (2.97)$$

В зависимости от нагружения бруса слагаемые напряжения направлены в разных четвертях поперечного сечения либо в одну и ту же, либо в противоположные стороны (рис. 2.95, *б*). Чтобы определить точки сечения, в которых напряжения достигают наибольших зна-

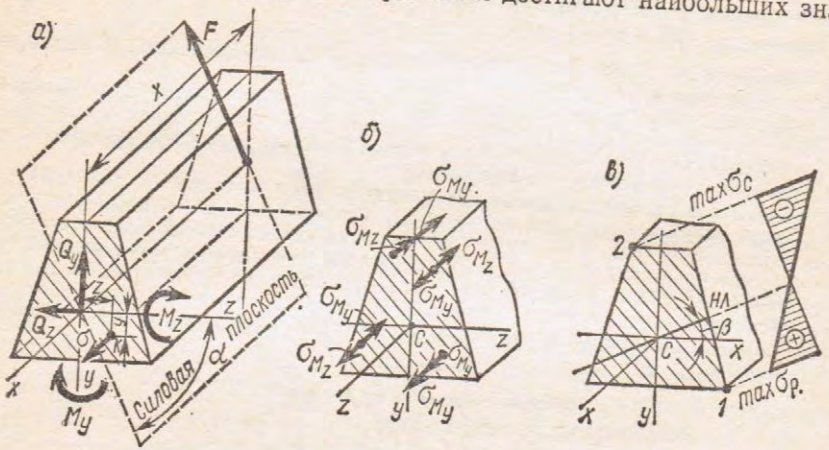


Рис. 2.95

чений, необходимо найти положение нулевой линии. Для этого приравняем уравнение (2.97) нулю и заменим y и z координатами y_0 и z_0, принадлежащими нулевой линии. В результате получаем *уравнение нулевой линии*

Отсюда
$$(M_y/J_y)\, z_0 + (M_z/J_z)\, y_0 = 0.$$

$$y_0 = -(M_y/M_z)\,(J_z/J_y)\, z_0.$$

Это уравнение показывает, что нулевая линия — прямая, проходящая через начало координат под углом β к оси z, тангенс которого

$$\operatorname{tg}\beta = -(M_y/M_z)\,(J_z/J_y).$$

Определив угол β и прочертив нулевую линию в поперечном сечении (рис. 2.95, *в*), можно легко определить координаты наиболее удаленных точек *1* и *2* и затем по формуле (2.97) вычислить значения напряжений в этих точках.

Для бруса из материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, должны быть составлены два условия прочности:

$$\max \sigma_p = (M_z/J_z)\, y_1 + (M_y/J_y)\, z_1 \leqslant [\sigma_p];$$
$$\max |\sigma_c| = |(M_z/J_z)\, y_2 + (M_y/J_y)\, z_2| \leqslant [\sigma_c].$$

Для брусьев из пластичных материалов используют лишь то из условий, которое соответствует большему по абсолютному значению напряжения.

Пример 2.25. Проверить прочность двутавровой консоли, нагруженной, как показано на рис. 2.96, *а*. Принять $[\sigma]=160$ МПа.

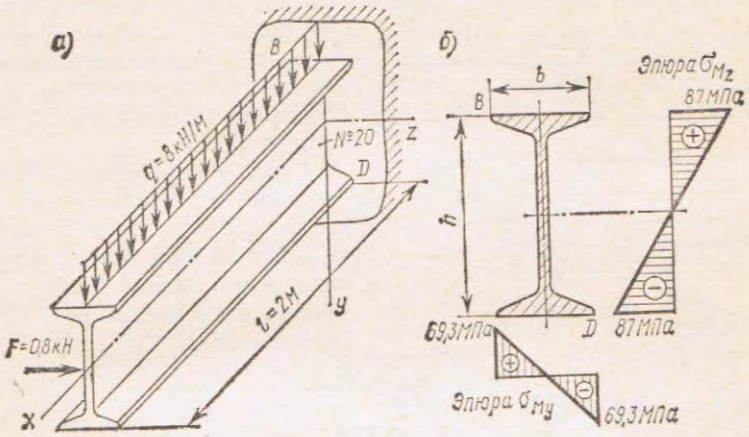


Рис. 2.96

Решение. 1. Рассмотрим действие каждой нагрузки на консоль отдельно. Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q=8$ кН/м$=8000$ Н/м создает наибольший изгибающий момент в сечении заделки:

$$M_z=-gl^2/2=-8000\cdot 2^2/2=-16\,000\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

В этом же сечении возникает наибольший изгибающий момент от силы $F=0{,}8$ кН$=800$ Н:

$$M_y=-Fl=-800\cdot 2=-1600\ \text{Н}\cdot\text{м}.$$

2. По таблице ГОСТ 8239—72 находим для двутавра № 20 значения моментов сопротивлений: $W_z=184$ см$^3=184\cdot 10^{-6}$ м^3 и $W_y=23{,}1$ см$^3=23{,}1\cdot 10^{-6}$ м^3.

3. Обусловленные изгибающим моментом M_z наибольшие по модулю нормальные напряжения σ_{Mz} возникают в точках сечения, удаленных от оси z на расстояние $h/2$. Поэтому

$$\sigma_{Mz}=|M_z/W_z|=16\,000/(184\cdot 10^{-6})=87\cdot 10^6\ \text{Па}=87\ \text{МПа}.$$

Эпюра σ_{Mx} изображена на рис. 2.96, *б* правее сечения двутавра в заделке.

4. Наибольшие по модулю нормальные напряжения σ_{My} возникают в точках сечения двутавра, удаленных от оси y на расстояние $b/2$:

$$\sigma_{My}=|M_y/W_y|=1600/(23{,}1\cdot 10^{-6})=69{,}3\cdot 10^6\ \text{Па}=69{,}3\ \text{МПа}.$$

Эпюра σ_{My} построена на рис. 2.96, *б* под сечением двутавра.

5. Из совместного рассмотрения эпюр σ_{Mz} и σ_{My} видно, что опасными точками сечения являются точки B и D, где

$$\max|\sigma|=\sigma_{Mz}+\sigma_{My}=87+69{,}3=156{,}3\ \text{МПа}.$$

6. Так как $\sigma=156{,}3$ МПа$<[\sigma]=160$ МПа, прочность консоли обеспечена.

§ 2.33. РАСЧЕТЫ БРУСА БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ С РАСТЯЖЕНИЕМ (СЖАТИЕМ)

Если нагрузить брус в главной плоскости силой F (рис. 2.97, *а*) под углом α к оси, то в поперечном сечении *1—1* (рис. 2.97, *б*) возникнут два внутренних силовых фактора: нормальная сила $N = F\cos\alpha$ и изгибающий момент $M_z = Fx\sin\alpha$. Следовательно, такое нагружение бруса вызывает сочетание изгиба с растяжением (сжатием).

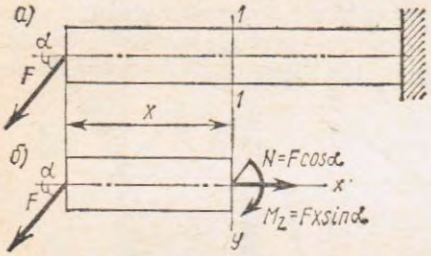


Рис. 2.97

Считая, что брусья обладают большой жесткостью на изгиб *, согласно принципу независимости действия сил, можно утверждать, что в любом сечении возникают напряжения растяжения (или сжатия)

$$\sigma_N = N/A,$$

и напряжения изгиба

$$\sigma_{Mz} = (M_z/J_z)\,y.$$

Таким образом, суммарные напряжения в любом сечении бруса находят алгебраическим сложением напряжений σ_N и σ_{Mz}:

$$\sigma = N/A + (M_z/J_z)\,y. \qquad (2.98)$$

При расчетах на прочность исходят из наибольших напряжений, возникающих в любом сечении. В частности, если сечение бруса симметрично относительно нейтральной оси, то

$$\sigma = N/A + M_z/W_z. \qquad (2.99)$$

При определении напряжений по формулам (2.98) и (2.99) значения напряжений следует подставлять с их знаками.

Пример 2.26. Стальной брус квадратного поперечного сечения нагружен, как показано на рис. 2.98. Проверить прочность бруса при $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. 1. Находим реакции опор балки. Горизонтальная составляющая реакции неподвижного шарнира $R_{Ax} = F_2 = 4000$ Н, вертикальные реакции опор $R_{Ay} = R_B = F_1/2 = 400$ Н.

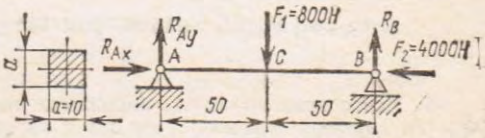


Рис. 2.98

2. Нормальная сила в любом сечении бруса $N = -R_{Ax} = -4000$ Н (осевая нагрузка F_2 сжимает брус); площадь поперечного сечения $A = a^2 = 100$ мм$^2 = 10^{-4}$ м^2; изгибающий момент достигает наибольшего значения в сечении C (под силой F_1) $M_{zC} = R_{Ay} \cdot AC = 400 \cdot 0{,}5 = 20$ Н·м; момент сопротивления бруса при изгибе $W_x = a^3/6 = 10^3/6 = 500/3$ мм$^3 = (500/3)10^{-9}$ м^3.

* При действии поперечных и осевых нагрузок на длинные и тонкие, а следовательно гибкие, брусья наблюдаются большие прогибы, вызывающие значительные изменения в направлении действия осевых нагрузок.

3. Подставляя найденные в п. 2 значения величин в формулу (2.99), находим максимальные напряжения в опасном сечении бруса, расположенном в центре пролета:

$$\max|\sigma| = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} = -\frac{4000}{10^{-4}} \pm \frac{20 \cdot 3}{500 \cdot 10^{-9}} =$$

$$= (-40 \pm 120)\, 10^6 \text{ Па} = (-40 \pm 120) \text{ МПа}.$$

Для большей наглядности последующих действий построим эпюры нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении (рис. 2.99). На рис. 2.99, *а* изображена эпюра $\sigma_N = N/A$, из которой видно, что напряжения сжатия ($\sigma_N < 0$) по сечению распределены равномерно; на рис. 2.99, *б* изображена эпюра $\sigma_{Mz} =$

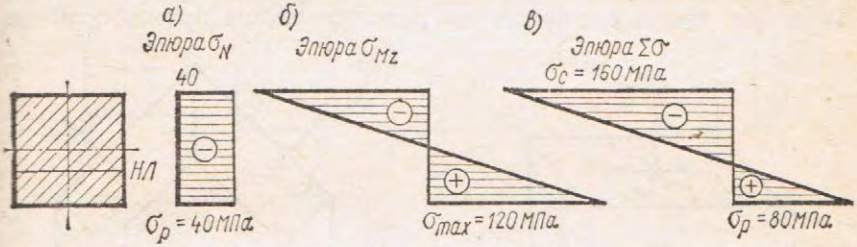


Рис. 2.99

$= M_z/W_z$, показывающая, что верхняя часть сечения лежит в зоне сжатия, а нижняя — в зоне растяжения.

Из последнего равенства следует, что наибольшие напряжения растяжения возникли в нижних крайних точках сечения:

$$\sigma_p = |-40 + 120| = 80 \text{ МПа},$$

а наибольшие напряжения сжатия появились в верхних крайних точках сечения:

$$\max \sigma_c = |-20 - 120| = 160 \text{ МПа}.$$

Таким образом, прочность бруса достаточна: наибольшее по абсолютному значению напряжение в опасном сечении не превышает $[\sigma] = 160$ МПа. Эпюра суммарных напряжений построена на рис. 2.99, *в*. Заметим, что нейтральная линия в сечении бруса параллельна центральной оси инерции.

Глава 8
ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

§ 2.34. ПОНЯТИЕ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ТОЧКЕ УПРУГОГО ТЕЛА

Как сказано в § 2.8, напряженное состояние в точке тела определяется совокупностью нормальных и касательных напряжений, возникающих в сечениях, проведенных через эту точку. Наглядной моделью, характеризующей напряженное состояние в точке, служит вырезанный из тела элемент в виде прямоугольного параллелепипеда с исследуемой точкой внутри. При уменьшении размеров параллелепипеда он стягивается в точку и можно считать, что любая из граней параллелепипеда проходит через данную точку.

В общем случае на трех любых взаимно перпендикулярных гранях элемента возникают различные полные напряжения, каждое

из которых можно разложить на три составляющие (рис. 2.100, *а*): одну, направленную по нормали к площадке, и две, лежащие в ее плоскости. Индексы нормальных напряжений σ соответствуют осям, перпендикулярным данным площадкам, а касательные напряжения τ имеют два индекса — первый соответствует оси, перпендикулярной площадке, а второй — оси, вдоль которой направлен вектор данной касательной составляющей.

Таким образом, на трех взаимно перпендикулярных площадках элемента в общем случае возникают девять компонентов, характеризующих напряженное состояние в точке тела (рис. 2.100, *а*). Такие же девять составляющих напряжений, но противоположно

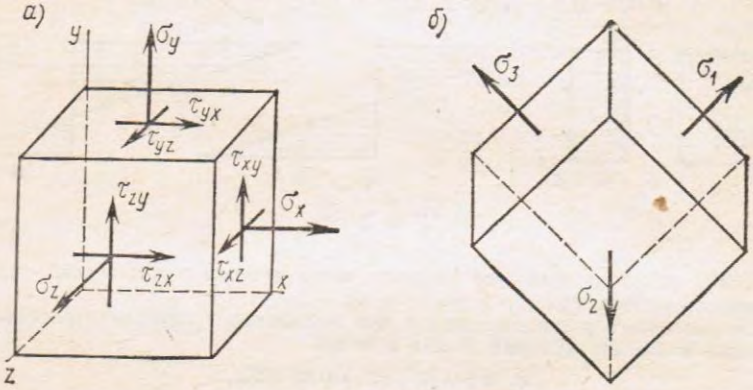


Рис. 2.100

направленных, возникают в трех невидимых гранях элемента (на рисунке они не изображены).

Заметим, что в соответствии с законом парности касательных напряжений (см. § 2.8), вытекающим из условия равновесия выделенного элемента, $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, т. е. на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательные напряжения, перпендикулярные общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра.

Следовательно, из девяти компонентов независимы друг от друга только шесть. И если эти независимые друг от друга напряжения известны, то методами статики можно определить напряжения в любой другой плоскости, проходящей через данную точку (частный случай подобной задачи рассмотрен в § 2.8). Таким образом, *напряженное состояние в точке известно, если определены напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку.*

Оказывается, что через заданную точку напряженного тела всегда возможно провести три взаимно перпендикулярные плоскости, в которых касательные напряжения $\tau_{xy}=\tau_{yx}=0$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}=0$ и $\tau_{xz}=\tau_{zx}=0$ и возникают только нормальные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 (рис. 2.100, *б*). В этом случае три взаимно перпендикулярные

площадки элемента называются *главными площадками*, нормальные напряжения в них — *главными напряжениями*. Причем индексы 1, 2 и 3 характеризуют порядок уменьшения алгебраических значений главных напряжений, т. е. $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$. Например, если одно из главных напряжений равно нулю, другое — 60 МПа, третье равно —140 МПа, то их следует обозначить так: $\sigma_1 = 60$ МПа; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -140$ МПа.

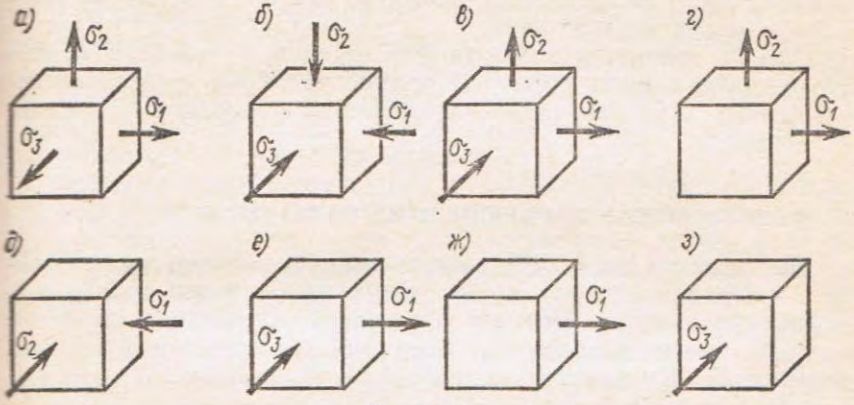


Рис. 2.101

Виды напряженного состояния классифицируются обычно по главным напряжениям. Различные случаи напряженного состояния показаны на рис. 2.101. Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля, называют *трехосным* или *объемным* (рис. 2.101, *а*, *б*, *в*). Если два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, то образуется *двухосное*, или *плоское*, напряженное состояние (рис. 2.101, *г*, *д*, *е*). Когда только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю, напряженное состояние называется *одноосным* или *линейным* (рис. 2.101, *ж*, *з*).

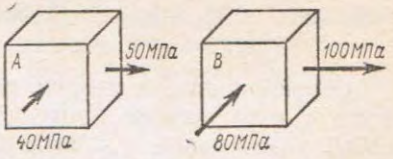


Рис. 2.102

Напряженное состояние в какой-либо точке одного тела можно сравнивать с напряженным состоянием в точке другого тела только в том случае, если напряженные состояния в точках *подобны* друг другу, т. е. такие, которые характеризуются соответственно пропорциональными главными напряжениями, имеющими одинаковые знаки, т. е. $\sigma_1' : \sigma_2' : \sigma_3' = \sigma_1'' : \sigma_2'' : \sigma_3''$. Например, на рис. 2.102 показаны подобные напряженные состояния в точках A и B, но состояние в точке B в два раза опасней.

Таким образом, если бы мы знали главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3, возникающие в исследуемой точке тела, а также соответствующие предельные напряжения $\sigma_{пр\,1}$, $\sigma_{пр\,2}$, $\sigma_{пр\,3}$ в точке тела при

напряженном состоянии, подобном исследуемому, то могли бы определить *коэффициент запаса прочности*

$$s = \sigma_{пр\,1}/\sigma_1 = \sigma_{пр\,2}/\sigma_2 = \sigma_{пр\,3}/\sigma_3.$$

Такой путь расчета на прочность, приемлемый для одноосного напряженного состояния, невозможен в других случаях из-за разнообразия материалов, обилия различных напряженных состояний и невозможности воспроизвести каждое из них в лабораторных условиях в целях исследования.

Оценку прочности элемента конструкции в условиях какого угодно напряженного состояния предлагает теория предельных напряженных состояний, суть которой кратко изложена в следующем параграфе.

§ 2.35. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ И ИХ НАЗНАЧЕНИЕ

Как известно (см. § 2.10), предельным напряжением для пластичного материала является предел текучести $\sigma_т$, а для хрупкого — предел прочности $\sigma_в$. Поэтому предельное напряженное состояние у пластичных материалов наступает при возникновении остаточных деформаций, а у хрупких — при начале разрушения.

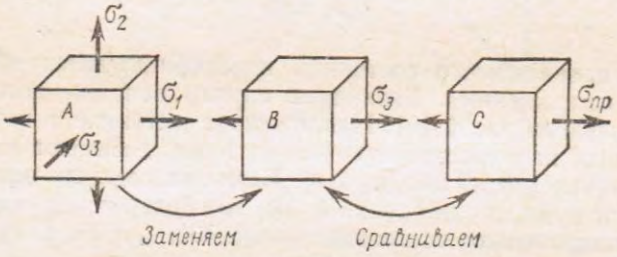


Рис. 2.103

Основная задача теории предельных напряженных состояний состоит в разработке критерия, позволяющего сравнивать между собой разнотипные напряженные состояния с точки зрения близости их к предельному состоянию. Сравнение разнотипных напряженных состояний производится с помощью эквивалентного напряженного состояния, причем за эквивалентное берется наиболее изученное напряженное состояние при простом растяжении (сжатии).

Определение коэффициента запаса прочности по теории предельных напряженных состояний можно представить такой условной схемой (рис. 2.103): переход от исследуемого напряженного состояния A к эквивалентному напряженному состоянию B производится на основе критерия, предопределяющего возникновение предельного состояния, а затем *эквивалентное напряженное* состояние B сравнивается с подобным ему предельным напряженным состоянием

C и определяется коэффициент запаса

$$s = \sigma_{пр}/\sigma_{экв}. \qquad (2.100)$$

Универсального критерия, предопределяющего предельное напряженное состояние для любого материала, нет. Разработка критериев предельных напряженных состояний основывается на различных гипотезах о преимущественном влиянии того или иного фактора на прочность материала.

Первая гипотеза прочности была выдвинута Галилеем в XVII в. и состояла в том, что причиной разрушения материала является наибольшее нормальное напряжение растяжения $\sigma_р$ или сжатия $\sigma_с$ без учета двух других главных напряжений. Экспериментальная проверка не подтвердила этой гипотезы в отношении двухосного и трехосного напряженных состояний.

Вторая гипотеза была выдвинута в 1682 г. Э. Мариоттом; согласно этой гипотезе, прочность материала в исследуемой точке достигает критического состояния при максимальном значении линейной деформации ε. Экспериментальная проверка и в этой гипотезе обнаружила ряд весьма существенных недостатков.

Третья гипотеза, предложенная Кулоном в 1773 г., предполагает, что предельное напряженное состояние возникает в момент, когда в двух взаимно перпендикулярных сечениях, проведенных через исследуемую точку, наибольшие касательные напряжения достигают предельного значения, при котором возможно разрушение путем сдвига и скольжения одной части материала по другой. Эта гипотеза более совершенна, чем первые две, но применима лишь для пластичных материалов, т. е. при условии, если $\sigma_{вр}=\sigma_{вс}$ и для напряженных состояний, у которых σ_1 и σ_3 имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно третьей гипотезе, при переходе от состояния A к состоянию B (рис. 2.103)

$$\sigma_э = \sigma_1 - \sigma_3. \qquad (2.101)$$

Четвертая гипотеза, предложенная О. Мором в 1900 г., базируется не на каком-либо одном факторе σ, ε или τ, а на двух σ и τ, а потому она более совершенна, чем предыдущие три. Экспериментальная проверка показала, что полученный на основе четвертой гипотезы критерий перехода от исследуемого напряженного состояния A к эквивалентному B (рис. 2.103) справедлив как для пластичных, так и для хрупких материалов и дает наилучшие результаты, если σ_1 и σ_3 имеют разные знаки или одно из них равно нулю. Согласно критерию,

$$\sigma_э = \sigma_1 - \nu\sigma_3, \qquad (2.102)$$

где для хрупких материалов $\nu=\sigma_{вр}/\sigma_{вс}$, а для пластичных материалов $\nu=\sigma_{тр}/\sigma_{тс}$. В частном случае, когда пределы текучести материала при растяжении и сжатии одинаковы ($\sigma_{тр}=\sigma_{тс}$), $\nu=1$ и формула (2.102) приводится к формуле (2.101).

Пятая гипотеза прочности иначе называется гипотезой энергии формоизменения, и критерий перехода от исследуемого напряжен-

ного состояния A (рис. 2.103) к эквивалентному состоянию B основан на том, что предельное напряженное состояние возникает при некотором значении потенциальной энергии, накапливаемой элементом конструкции при изменении только его формы. Согласно этой гипотезе,

$$\sigma_э = \sqrt{0{,}5\,[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}. \qquad (2.103)$$

Первоначальную идею энергетической гипотезы, выдвинутую в 1885 г. Бельтрами, усовершенствовал львовский проф. А. Губер (в 1904 г.), а затем уточнили Р. Мизес (в 1913 г.) и Г. Генки (в 1924 г.). Экспериментальная проверка пятой гипотезы показала, что она справедлива только для пластичных материалов, у которых $\sigma_{тр}=\sigma_{тс}$, но критерий перехода здесь точней, чем у третьей гипотезы.

В настоящее время из пяти гипотез прочности используются лишь последние три. Расчеты по гипотезам прочности во многих случаях избавляют проектировщиков и конструкторов от необходимости подвергать проектируемые конструкции и детали непосредственным испытаниям на прочность.

§ 2.36. РАСЧЕТЫ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

Представим себе, что стальной брус круглого поперечного сечения нагружен двумя парами сил таким образом (рис. 2.104, *а*), что плоскость действия первой перпендикулярна оси бруса, а плоскость действия второй проходит через ось бруса. Тогда момент M_1 первой пары скручивает брус, а момент M_2 второй пары его изгибает. При таком нагружении бруса в его поперечных сечениях возникают два внутренних силовых фактора — крутящий $M_к$ и изгибающий $M_и$ моменты, причем по всей длине бруса $M_к=M_1$, а $M_и=M_2$ (рис. 2.104, *б*, *в*).

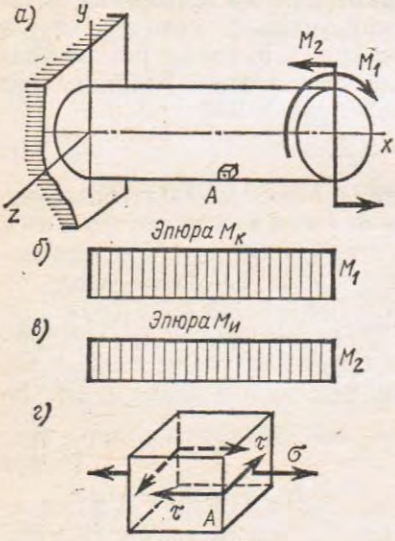


Рис. 2.104

Как известно, при кручении наибольшие касательные напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от оси бруса (см. рис. 2.44), а при изгибе наибольшие нормальные напряжения возникают в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси (см. рис. 2.76). Следовательно, у бруса на рис. 2.104, *а* наиболее опасное напряженное состояние возникает в точках, наиболее удаленных от оси x. Выделим одну из таких точек (точку A) и изобразим ее в виде элемента, имеющего форму прямо-

угольного параллелепипеда (рис. 2.104, *г*). Тогда увидим, что напряженное состояние в точке A характеризуется нормальными напряжениями σ, действующими по площадкам элемента, совпадающими с поперечными сечениями бруса, и касательными напряжениями τ, действующими по этим же и перпендикулярным им площадкам (закон парности).

Выразив эквивалентные напряжения через напряжения σ и τ в поперечном сечении бруса (а не через главные напряжения), получим из формулы (2.101) по третьей гипотезе прочности следующее выражение:

$$\sigma_{э\,III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \tag{2.104}$$

а из формулы (2.102) по пятой гипотезе

$$\sigma_{э\,V} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \tag{2.105}$$

В обе формулы входят напряжение изгиба $\sigma = M_и/W^*_{ос}$ и напряжение кручения $\tau = M_к/W_р$. Сравнив между собой значение момента сопротивления при изгибе $W_{ос} = \pi d^3/32$ и значение момента сопротивления при кручении $W_р = \pi d^3/16$ у одного и того же сечения, заметим, что $W_р = 2\ W_{ос}$.

Поэтому, подставив в формулу (2.104) и (2.105) вместо σ и τ их значения из $\sigma = M_и/W_{ос}$ и $\tau = M_к/W_р = M_к/(2\ W_{ос})$, получим соответственно

$$\sigma_{э\,III} = \sqrt{(M_и^2 + M_к^2)}/W_{ос} \tag{2.106}$$

и

$$\sigma_{эV} = \sqrt{(M_и^2 + 0{,}75M_к^2)}/W_{ос}. \tag{2.107}$$

Таким образом, рассчитывая брус при изгибе с кручением, эквивалентные напряжения можно определить сразу через значения изгибающего и крутящего моментов, возникших в опасном сечении бруса.

Арифметическое значение корней в числителях формул (2.106) и (2.107) иногда называют эквивалентным моментом и обозначают $M_э$:

$$M_{э\,III} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2} \text{ и } M_{э\,V} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75M_к^2}.$$

Используя это обозначение, условие прочности запишем в таком виде:

$$\sigma_э = M_э/W_{ос} \leqslant [\sigma]. \tag{2.108}$$

При этом надо иметь в виду, что при пространственном нагружении вала, например в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 2.105, *а*), в его сечениях кроме крутящего момента $M_к$ под воздействием вертикальных сил возникает изгибающий момент M_z, а под воздействием горизонтальных сил — изгибающий мо-

* У круга любая центральная ось главная, потому момент сопротивления круглого сечения отмечен индексом «ос» — осевой, а изгибающий момент индексом «и».

мент M_y (рис. 2.105, *б*). Если изобразить эти моменты векторами $M_к$, M_z, M_y (рис. 2.105, *в*), то увидим, что изгибающий момент $M_и$ есть геометрическая сумма моментов M_z и M_y и его модуль

$$M_и = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

Поэтому при пространственном нагружении вала в случае применения третьей гипотезы прочности

$$M_{э\,III} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_к^2}, \qquad (2.109)$$

а в случае применения пятой гипотезы

$$M_{э\,V} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75M_к^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0{,}75M_к^2}. \qquad (2.110)$$

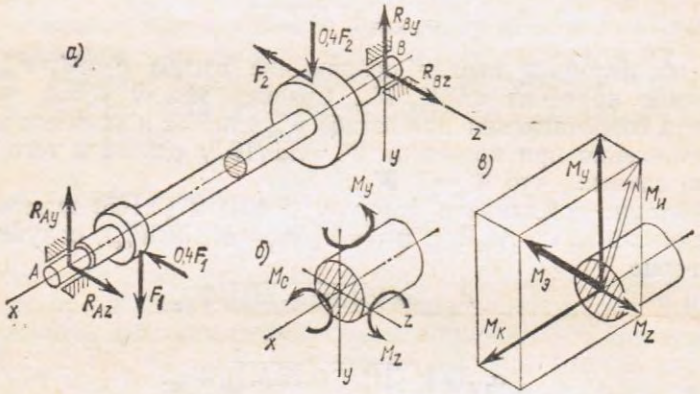


Рис. 2.105

Пример 2.27. Из условия прочности рассчитать необходимый диаметр вала (рис. 2.106, *а*), передающего от левого конца к зубчатому колесу диаметром $d = 1/3$ м мощность $P = 15$ кВт при частоте вращения $n = 382$ об/мин. Принять $[\sigma] = 80$ МПа.

Решение. 1. Составим расчетную схему вала (рис. 2.106, *б*), для этого приведем силу F к точке C на оси вала, присоединив пару сил с моментом $M_1 = F(d/2)$, и освободим вал в точках A и B от опор, заменив их реакциями в горизонтальной (R_{Az}, R_{Bz}) и вертикальной (R_{Ay}, R_{By}) плоскостях.

2. Исходя из того, что вал передает мощность $P = 15$ кВт $= 15 \cdot 10^3$ Вт при частоте вращения n, соответствующей угловой скорости $\omega = \pi n/30$, находим вращающий момент M_0, приложенный к левому концу вала:

$$M_0 = P/\omega = P \cdot 30/(\pi n) = 15 \cdot 10^3 \cdot 30/(\pi 382) = 375 \text{ Н·м}.$$

3. Из равенства моментов $M_0 = M_1 = Fd/2$ находим касательную силу:

$$F = 2M_0/d = 2 \cdot 375 \cdot 3 = 2250 \text{ Н}.$$

Следовательно, радиальная сила

$$0{,}4F = 0{,}4 \cdot 2250 = 900 \text{ Н}.$$

4. Реакции опор находим из условия симметричности их расположения относительно зубчатого колеса:

$$R_{Az} = R_{Bz} = 0{,}4F/2 = 900/2 = 450 \text{ Н};$$
$$R_{Ay} = R_{By} = F/2 = 2250/2 = 1125 \text{ Н}.$$

5. На участке от левого конца до зубчатого колеса вал скручивается моментами M_0 и M_1. Следовательно, в любом сечении на этом участке крутящий момент $M_к = |M_0| = |M_1| = 375$ Н·м и эпюра $M_к$ имеет вид, показанный на рис. 2.106, *в*.

6. Под действием сил F, R_{Ay} и R_{By} вал изгибается на участке между опорами в вертикальной плоскости. В сечениях, проходящих через точки A и B, изгибающие моменты равны нулю, а наибольшего значения изгибающий момент M_z достигает в сечении, совпадающем со средней плоскостью колеса:

$$M_{zC} = R_{Ay} \cdot AC = R_{By} \cdot BC = \\ = 1125 \cdot 0{,}4 = 450 \text{ Н·м}.$$

Эпюра M_z изображена на рис. 2.106, *г*.

7. Под действием сил $0{,}4F$, R_{Az} и R_{Bz} вал изгибается на том же участке, но в горизонтальной плоскости. Наибольший изгибающий момент (рис. 2.106, *д*) наблюдается в том же сечении:

$$M_{yC} = R_{Az} \cdot AC = R_{Bz} \cdot BC = 450 \cdot 0{,}4 = \\ = 180 \text{ Н·м}.$$

8. Применяя третью гипотезу прочности, по формуле (2.109) определяем эквивалентный момент в опасном сечении вала:

$$M_э = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_к^2} = \\ = \sqrt{450^2 + 180^2 + 375^2} = 613 \text{ Н·м}.$$

9. Из условия прочности (2.108), полагая $\sigma = [\sigma] = 80$ МПа $= 80 \cdot 10^6$ Па, находим требуемый момент сопротивления сечения вала:

$$W_{oc} = M_э / [\sigma] = 613 / (80 \cdot 10^6) = \\ = 7{,}66 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 7660 \text{ мм}^3.$$

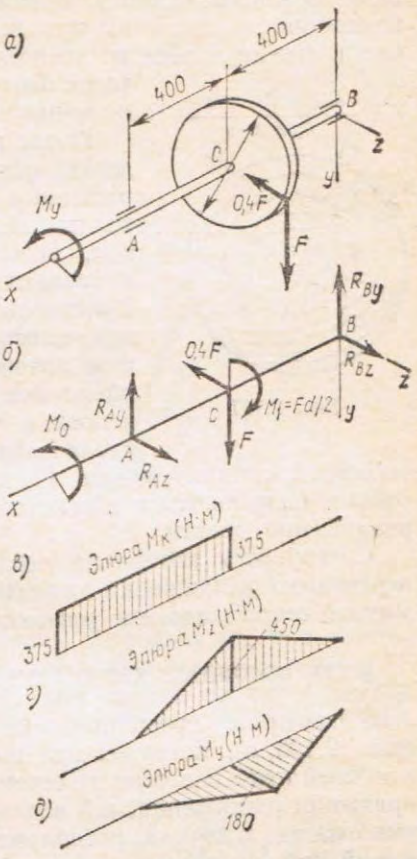


Рис. 2.106

10. Из формулы (2.84) находим диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{32 W_{oc} / \pi} = \sqrt[3]{32 \cdot 7660 / \pi} = 43 \text{ мм}.$$

Глава 9
РАСЧЕТ НА УСТАЛОСТЬ

§ 2.37. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ УСТАЛОСТИ

Выше рассмотрены вопросы, связанные с расчетами на прочность элементов конструкций, испытывающих действие статических нагрузок, т. е. таких, которые медленно возрастают от нуля до своего конечного значения и в дальнейшем остаются постоянными. При этом всегда считалось, что прочность обеспечена, если максимальные напряжения в опасных сечениях не превышают предель-

ных значений, соответствующих началу разрушения или появления остаточных деформаций. Однако многие детали машин, в частности валы, вращающиеся оси, зубчатые колеса, дорожки тел вращения подшипников, пружины и т. п., испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. В этих случаях разрушение деталей наступает при напряжениях, значительно меньших предельных значений.

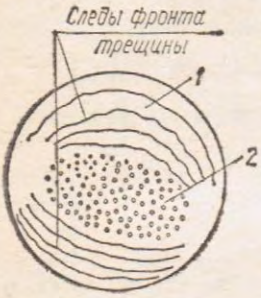


Рис. 2.107

После разрушения на поверхности излома детали обнаруживаются обычно две ярко выраженные зоны (рис. 2.107). В зоне *1* кристаллы не различаются невооруженным глазом, поверхность сглажена. В зоне *2* явно выступают признаки хрупкого разрушения. Кристаллы имеют острую огранку и блестящую поверхность. Причину такого разрушения, которое принято называть усталостным, объясняют следующим. При работе детали в условиях переменных напряжений в материале возникают микротрещины, которые постепенно проникают вглубь. По мере развития трещины поперечное сечение ослабляется и в некоторый момент происходит мгновенное разрушение детали.

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений от заданной нагрузки без разрушения называют *сопротивлением усталости.*

§ 2.38. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИКЛА

Рассмотрим простейший случай. Круглый брус (ось) AB (рис. 2.108, *а*), нагруженный постоянной силой $\boldsymbol{F}$, изгибается и в нижней точке поперечного сечения *1—1* возникают наибольшие напряжения растяжения, а в верхней точке — наибольшие напряжения сжатия; в точках, расположенных на нейтральной оси, напряжений нет. Представим, что изогнутый силой $\boldsymbol{F}$ вал AB приведен во вращение с постоянной угловой скоростью ω. Тогда каждая точка поперечного сечения *1—1* (рис. 2.108, *б*) будет попеременно находиться то в зоне растяжения, то в зоне сжатия. В частности, напряжение в точке A [см. формулу (2.80)]

$$\sigma_A = (M_и/J_z)\, y,$$

но при вращении бруса расстояние y от точки A до нейтральной оси меняется с течением времени по закону

$$y = (d/2)\sin\omega t, \text{ где } \omega t = \varphi.$$

Следовательно,

$$\sigma_A = (M_и/J_z)\,(d/2)\sin\omega t = \sigma_{max\,и}\sin\omega t,$$

т. е. нормальное напряжение в точке A поперечного сечения изменяется по синусоидальному закону (рис. 2.107, *в*).

Если же ось помимо силы F нагрузить центральной, например растягивающей, силой, то напряжение

$$\sigma_A = N/A + (M_и/J_z)(d/2)\sin\omega t = \sigma_N + \sigma_{max\,и}\sin\omega t,$$

т. е. график изменения этих напряжений во времени останется синусоидальным, но сместится вверх (рис. 2.108, *г*). Как видим, в

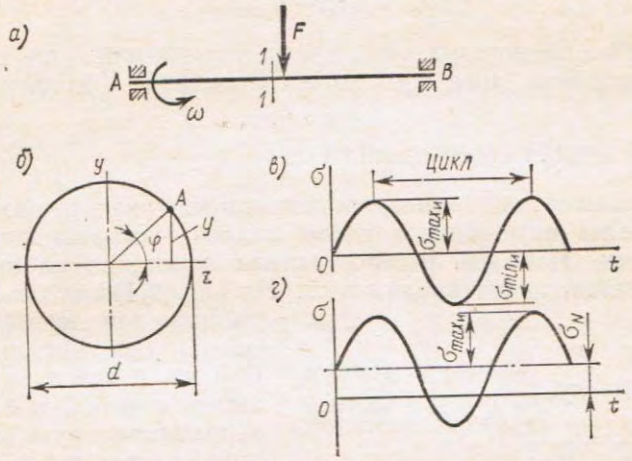


Рис. 2.108

обоих случаях напряжения изменяются периодически, т. е. повторяются в той же последовательности через определенный период T.

Совокупность последовательных напряжений за один период их изменения называется *циклом напряжений* (рис. 2.109, *а*). Цикл

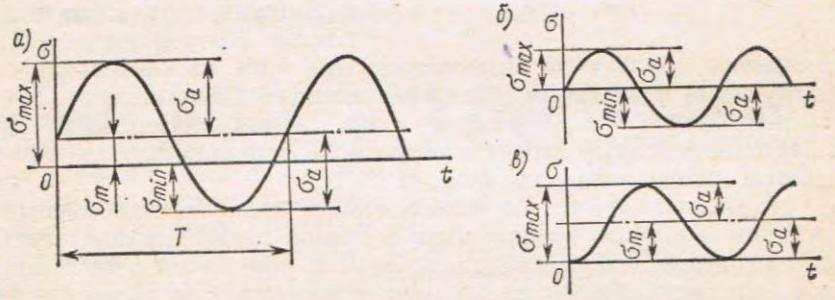


Рис. 2.109

напряжений характеризуется максимальным σ_{max} и минимальным σ_{min} напряжениями. Их отношение называется *коэффициентом асимметрии цикла*

$$R = \sigma_{min}/\sigma_{max}. \qquad (2.111)$$

В случае когда $\sigma_{max} = -\sigma_{min}$, $R = -1$, цикл называют *симметричным* (см. рис. 2.108, *б*). Если $\sigma_{min} = 0$, $R = 0$, цикл называют

отнулевым (рис. 2.109, *в*). Циклы, имеющие одинаковые коэффициенты асимметрии, называются подобными.

Любой цикл (рис. 2.109, *а*) можно также характеризовать его средним напряжением σ_m и амплитудой цикла σ_a:

$$\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2, \qquad (2.112)$$

$$\sigma_a = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2. \qquad (2.113)$$

В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные выше термины и соотношения с заменой σ на τ.

§ 2.39. ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

Наибольшее напряжение, при котором материал, не разрушаясь, выдерживает определенное число циклов, устанавливают опытным путем. Наиболее распространены испытания на изгиб при симметричном цикле напряжений. На рис. 2.110 показана схема машины для испытания образцов при чистом изгибе. Образец *3* зажат во вращающихся цангах *2* и *4*. Усилие передается от груза, подвешенного на серьгах *1* и *5*. Счетчик *7* фиксирует число оборотов образца. Когда образец ломается, контакт *6* автоматически отключает двигатель *8*.

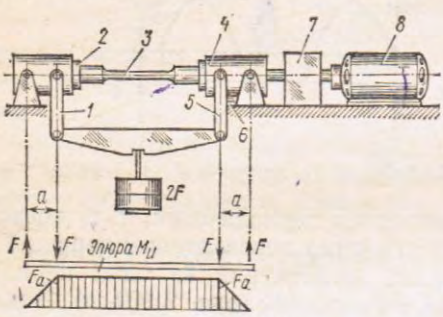


Рис. 2.110

Задавая образцам различные значения напряжений σ_{max} цикла, определяют число циклов N, необходимое для доведения образца до разрушения. При этом на каждом уровне нагружения испытаниям подвергают несколько образцов, поскольку неизбежен большой разброс в предельных значениях N. По полученным данным строят кривую в координатах σ_{max}, N, называемую *кривой усталости* (рис. 2.111).

Испытания показывают, что с ростом N уменьшается абсолютное значение $d\sigma/dN$ и кривая распределения предела выносливости имеет горизонтальную асимптоту. Значит, при каком-то числе циклов испытание образца необходимо прекратить. Это число циклов N_0 принято называть *базой испытаний*. Для различных материалов приняты различные базы испытаний; так, для стальных образцов $N_0 = 10^7$, для цветных металлов и сталей, закаленных до высокой твердости, $N_0 = 10^8$ и т. д. Наибольшее напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания, называется *пределом выносливости* и обозначается σ_R (рис. 2.112). Для образцов при коэффициенте асимметрии цикла $R = -1$ пределы выносливости при нормальных напряжениях обозначаются σ_{-1}, а при касательных напряжениях τ_{-1}.

При расчете деталей, не предназначенных для длительного срока службы, вводят понятие *предела ограниченной выносливости* σ_{RN}, где под N понимают заданную циклическую долговечность, которая меньше базы испытаний, т. е. $N<N_0$. В ряде случаев известна математическая зависимость наклонной кривой усталости $\sigma_R^p N_0 = \sigma_{RN}^p N = \text{const}$. Тогда предел ограниченной выносливости

$$\sigma_{RN} = \sigma_R \sqrt[p]{N_0/N} = \sigma_R K_{\sigma L}, \qquad (2.114)$$

где выражение $\sqrt[p]{N_0/N} = K_{\sigma L}$ называют *коэффициентом долговечности*. При $N \geqslant N_0$ принимают $K_{\sigma L}=1$. Аналогично, при возникно-

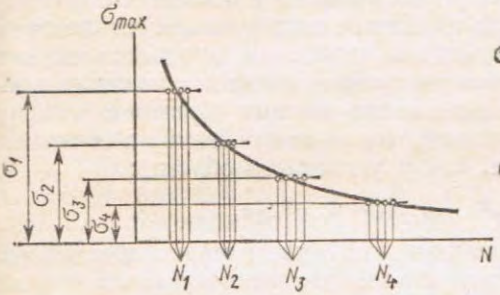


Рис. 2.111

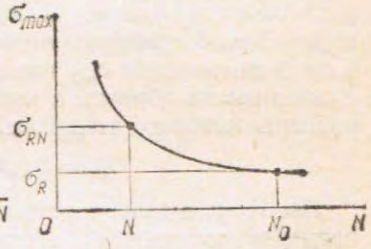


Рис. 2.112

вении касательных напряжений $\tau_{RN}=\tau_R K_{\tau L}$ в случаях $N \geqslant N_0$ считают $K_{\tau L}=1$.

Для определения пределов выносливости стали можно принять следующие зависимости: $\sigma_{-1} \approx 0{,}43\ \sigma_в$; $\tau_{-1} \approx 0{,}6\ \sigma_{-1}$; $\sigma_0 \approx 1{,}6\ \sigma_{-1}$; $\tau_0 \approx 1{,}9\ \tau_{-1}$.

§ 2.40. ФАКТОРЫ, ВЛИЯЮЩИЕ НА ПРЕДЕЛ ВЫНОСЛИВОСТИ

В местах изменения формы деталей (у отверстий, надрезов, шпоночных пазов, в резьбе и т. д.), а также в зоне сопряжений с натягом возникает местное повышение напряжений, снижающее предел выносливости по сравнению с гладкими цилиндрическими образцами. Явление возникновения местных напряжений принято называть *концентрацией напряжений*, а причины, ее вызывающие (отверстия, надрезы, запрессовка),— концентраторами напряжений. На рис. 2.113 показано распределение напряжений σ в поперечном сечении, проходящем через отверстие в растянутой полосе. Наибольшие напряжения возникают у краев отверстия.

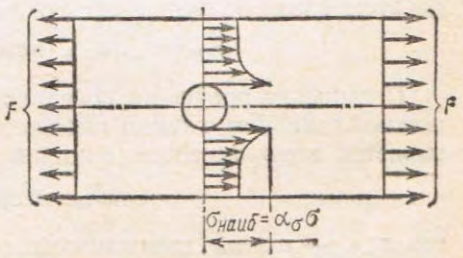


Рис. 2.113

Степень влияния местных напряжений на прочность детали существенно зависит от характера нагружения и материала. При расчете конструкции из пластичных материалов, работающей в условиях статического нагружения, местными напряжениями пренебрегают. Это объясняется тем, что при росте нагрузки напряжения в зоне концентрации, достигнув предела текучести, не возрастают до тех пор, пока во всех соседних точках они не достигнут того же значения, т. е. пока распределение напряжений в рассматриваемом сечении не станет равномерным. Иначе обстоит дело при циклически изменяющихся напряжениях. Многократное изменение напряжений в зоне концентратора напряжений приводит к образованию и дальнейшему развитию трещины с последующим усталостным разрушением детали. Для оценки снижения прочности вводят *эффективный коэффициент концентрации*, равный отношению предела выносливости σ_{-1} гладкого полированного образца к пределу выносливости образца с концентратором напряжений, абсолютные размеры которого такие же, как и у гладкого образца:

$$K_\sigma = \sigma_{-1}/\sigma_{-1K};\ K_\tau = \tau_{-1}/\tau_{-1K}.$$

Экспериментально установлено, что с увеличением абсолютных размеров поперечных сечений деталей происходит снижение их прочностных характеристик, получаемых при статических и усталостных испытаниях. Это снижение учитывается коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения

$$K_d = \sigma_{-1d}/\sigma_{-1},\ K_d = \tau_{-1d}/\tau_{-1},$$

где σ_{-1d} (или τ_{-1d}) — предел выносливости образца заданного диаметра d; σ_{-1} (или τ_{-1}) — предел выносливости стандартного образца.

Если при статических нагрузках состояние рабочих поверхностей незначительно влияет на их прочность, то при циклических нагрузках разрушение деталей связано с развитием усталостных трещин, возникающих в поверхностном слое. Развитию этих трещин способствует шероховатость поверхности в результате механической обработки. При расчетах это явление учитывается коэффициентом влияния шероховатости поверхности

$$K_F = \sigma_{-1}/\sigma_{-1n} \text{ или } K_F = \tau_{-1}/\tau_{-1n}.$$

Повышение прочности поверхностного слоя достигается поверхностной закалкой, химико-термической обработкой, наклепом и учитывается коэффициентом влияния поверхностного упрочнения

$$K_v = \sigma_{-1y}/\sigma_{-1},$$

где σ_{-1y} — предел выносливости образца, подвергнутого упрочнению.

Учитывая изложенное, можно определить *общий коэффициент снижения предела выносливости:*

$$K_{\sigma D} = (K_\sigma/K_d + K_F - 1)/K_v,$$

или

$$K_{\tau D} = (K_\tau / K_d + K_F - 1)/K_v. \qquad (2.115)$$

Если в одном и том же сечении имеют место различные концентраторы напряжений, то расчет выполняют по максимальным значениям $K_{\sigma D}$ и $K_{\tau D}$.

§ 2.41. ДИАГРАММА ПРЕДЕЛЬНЫХ АМПЛИТУД ЦИКЛА

Для полной характеристики выносливости материала необходимо установить зависимость предела выносливости от характера цикла нагружений. С этой целью из исследуемого материала изготовляют несколько серий совершенно одинаковых образцов и каждую из них подвергают испытаниям на выносливость. При этом фиксируют значение среднего напряжения σ_m цикла, а предельную амплитуду σ_a определяют из опыта по базовому числу циклов N_0. Например, первая серия образцов испытана при симметричном цикле $R_\sigma = -1$ ($\sigma_m = 0$); по результатам испытаний построена кривая усталости и определено значение предела выносливости σ_{-1}. Вторая серия образцов испытана при цикле с $R_\sigma = -1/2$; третья — при $R_\sigma = 0$ и т. д. По результатам испытаний, так же как и в первом случае, построены кривые выносливости и определены значения пределом выносливости. По полученным данным легко построить диаграмму зависимости предельных амплитуд σ_a от принятых средних напряжений σ_m цикла. Примерный характер такой диаграммы, называемой *диаграммой предельных амплитуд* цикла, показан на рис. 2.114.

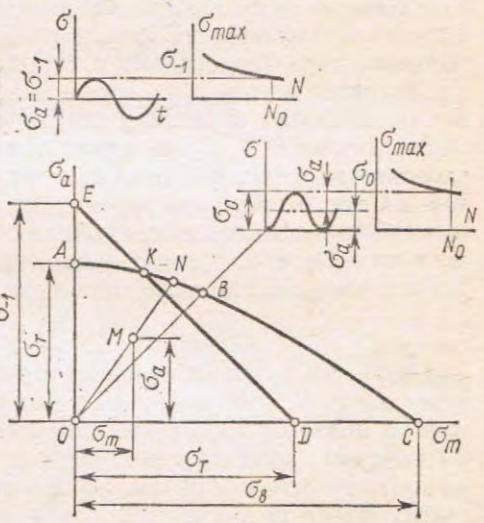


Рис. 2.114

Каждая точка кривой ABC диаграммы характеризует цикл. Точка A соответствует пределу выносливости при симметричном цикле ($\sigma_m = 0$; $\sigma_a = \sigma_{-1}$); точка C — пределу прочности при статическом напряжении ($\sigma_m = \sigma_в$; $\sigma_a = 0$); точка B — пределу выносливости при отнулевом цикле ($\sigma_m = \sigma_a$). Площадь диаграммы, ограниченная кривой ABC и осями координат, определяет область безопасных (в отношении усталости разрушений) циклов нагружений. Пусть точка M, характеризующая заданный цикл (σ_a, σ_m), рас-

положена внутри области $OABC$, тогда циклическая прочность (выносливость) материала обеспечена.

Однако для пластичных материалов предельное напряжение цикла не должно превышать предела текучести, т. е. $\sigma_{max}=\sigma_a+\sigma_m\leqslant\sigma_т$. Тогда ограничение по текучести для максимальных напряжений цикла будет на диаграмме изображаться прямой DE, расположенной под углом 45° к осям. Область $AKDO$ является областью, соответствующей безопасным циклам, при которых нет как усталостного разрушения, так и недопустимых остаточных деформаций. Следовательно, для обеспечения работоспособности конструкции из пластичных материалов точка, соответствующая рабочему циклу, должна лежать внутри области $AKDO$.

Наличие построенной по экспериментальным данным диаграммы предельных амплитуд позволяет графоаналитически определить коэффициент безопасности для рассматриваемой детали из данного материала. Проведем из начала координат луч через точку M с заданными характеристиками расчетного цикла σ_m и σ_a. Любая точка, лежащая в этом луче, соответствует циклу, подобному заданному (т. е. циклу, имеющему такое же значение R_σ). Цикл, изображаемый точкой N,— предельный; напряжение этого цикла, определяемое как сумма абсциссы и ординаты точки N, равно пределу выносливости ($\sigma_{R\,пр}=\sigma_{m\,пр}+\sigma_{a\,пр}$). Аналогично, для заданного цикла максимальное напряжение равно сумме абсциссы и ординаты точки M, т. е. $\sigma_{max}=\sigma_a+\sigma_m$. Из условия подобия рабочего и предельного циклов коэффициент безопасности

$$s=\sigma_{R\,пр}/\sigma_{max}=(\sigma_a+\sigma_m)_{пр}/(\sigma_a+\sigma_m)_{расч}$$

определяется путем измерения соответствующих абсцисс и ординат точек M и N. Поскольку построение диаграммы предельных амплитуд является достаточно трудоемким, для целей расчета ее схематизируют, приближенно заменяя кривую диаграммы прямой по двум известным точкам. За эти точки можно принять пределы выносливости при симметричном σ_{-1} и отнулевом σ_0 циклах.

§ 2.42. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА БЕЗОПАСНОСТИ

При расчетах на усталость коэффициенты безопасности определяют по следующим формулам, полученным в предположении подобия рабочих и предельных циклов напряжений:

в случае нормальных напряжений

$$s_\sigma=\sigma_{-1}/(K_{\sigma D}\sigma_a+\psi_\sigma\sigma_m)\geqslant[s];\qquad(2.116)$$

в случае касательных напряжений

$$s_\tau=\tau_{-1}/(K_{\tau D}\tau_a+\psi_\tau\tau_m)\geqslant[s].\qquad(2.117)$$

Коэффициенты чувствительности к асимметрии цикла напряжений определяют по формулам

$$\psi_\sigma=(2\sigma_{-1}-\sigma_0)/\sigma_0,\ \psi_\tau=(2\tau_{-1}-\tau_0)/\tau_0.\qquad(2.118)$$

Если в опасной точке детали возникают и нормальные, и касательные напряжения, то

$$s = s_\sigma s_\tau / \sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2} \geqslant [s], \qquad (2.119)$$

где s_σ и s_τ определяются по формулам (2.115) и (2.116).

Вопрос, связанный с выбором значения $[s]$, является очень ответственным. Значение $[s]$ оказывает большое влияние на габариты и массу проектируемых изделий и, следовательно, на их стоимость и эксплуатационные расходы. С уменьшением $[s]$ снижается масса изделий, но увеличивается возможность отказов — снижается надежность. В качестве ориентировочных можно рекомендовать для стальных деталей $[s] \approx 1{,}5 \ldots 2{,}1$ и для чугуна $[s] \approx 2{,}0 \ldots 2{,}4$. Более подробно этот вопрос освещен в разделе деталей машин.

Глава 10
УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

§ 2.43. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ. КРИТИЧЕСКАЯ СИЛА

Как указывалось в § 2.1, третьей задачей сопротивления материалов являются расчеты конструкции на устойчивость. Из физики известно, что равновесие тела устойчиво, если при малом отклонении от равновесного положения возникает сила или пара сил, возвращающая его в положение равновесия. Кроме устойчивого известны также неустойчивое и безразличное равновесия, но для механических конструкций допустимы лишь случаи устойчивого равновесия. Если по каким-либо причинам упругое тело или конструкция при отклонении от равновесного положения не возвращается к исходному, то говорят, что произошла потеря устойчивости.

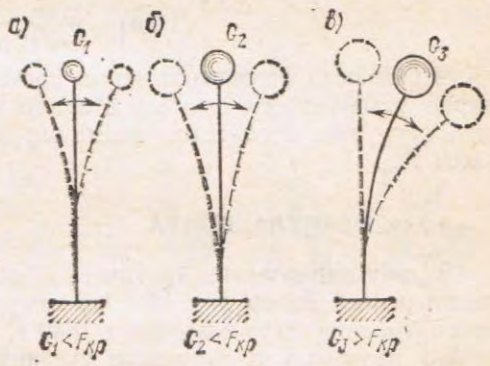


Рис. 2.115

Явление потери устойчивости упругого тела рассмотрим на примере сжатого стержня. Представим, что на прямолинейный стальной стержень, зажатый одним концом в вертикальном положении (рис. 2.115, *а*), сверху надет шар. При небольшом значении силы тяжести G_1, сжимающей стержень, он сохраняет прямолинейную форму и находится в устойчивом равновесии. Действительно, если отклонить шар вместе с верхней частью стержня в сторону, то под действием упругих сил стержень, поколебавшись около положения равновесия, снова примет прямолинейную форму. После-

пенно увеличивая сжимающую нагрузку путем установки более тяжелых шаров (рис. 2.115, *б*), увидим, что стержень хотя и сохраняет прямолинейную форму, но при отклонении от положения равновесия возвращается в исходное положение гораздо медленнее. Наконец, при некоторой нагрузке G_3 (рис. 2.115, *в*) стержень изогнется и прямолинейная форма устойчивого равновесия переходит в новую, криволинейную, форму устойчивого равновесия. Если теперь стержень принудительно выпрямить или, наоборот, изогнуть еще больше, он после нескольких колебаний займет исходное равновесное положение в изогнутом состоянии.

Максимальная сжимающая нагрузка $F_{кр}$, при которой прямолинейная форма стержня устойчива, называется *критической силой*.

Смысл расчета на устойчивость сжатого стержня заключается в том, чтобы он при некотором значении F осевой нагрузки сохранял устойчивость прямолинейной формы и обладал при этом некоторым запасом устойчивости

$$s_y = F_{кр}/F.$$

Если коэффициент запаса устойчивости задан $[s_y]$, условие устойчивости сжатого стержня выражается неравенством

$$s_y = F_{кр}/F \geqslant [s_y]. \qquad (2.120)$$

Полагая в выражении (2.120) $s_y = [s_y]$, можно получить допускаемое значение нагрузки

$$[F] = F_{кр}/[n_y]. \qquad (2.121)$$

Чтобы воспользоваться этими расчетными формулами при проверке устойчивости сжатого стержня или определении допускаемой нагрузки, необходимо уметь определять значение критической силы $F_{кр}$.

§ 2.44. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Задачу определения критической силы впервые чисто математически решил Эйлер в 1744 г.* Экспериментальное подтверждение этого решения было получено в 1840 г. Решение задачи Эйлера подробно изложено, например, в учебниках [14, 29]. Здесь же приведен лишь ее окончательный результат.

Для шарнирно закрепленного с обоих концов стержня длиной l (рис. 2.116) формула Эйлера имеет вид

$$F_{кр} = \pi^2 E J_{min}/l^2. \qquad (2.122)$$

Как видим, в формулу входит минимальное значение момента инерции площадки поперечного сечения стержня, так как потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости. Например, если стержню на рис. 2.116 придать форму пластинки пря-

---

* Л. Эйлер (1707—1783) — академик Петербургской Академии наук.

моугольного поперечного сечения, то он, теряя устойчивость, отклонится от плоскости, проходящей через ось, параллельную длинным сторонам поперечного сечения.

Экспериментальные исследования, связанные с проверкой формулы Эйлера, показывают, что при прочих равных условиях (одинаковые материал, форма и размеры поперечного сечения, а также длина стержня) значение критической силы зависит от способа закрепления его концов.

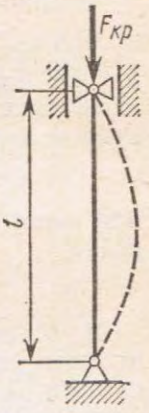


Рис. 2.116

Ось стержня, шарнирно закрепленного с обоих концов, при потере устойчивости приобретает вид полуволны синусоиды (штриховая линия на рис. 2.116). Используя это обстоятельство, оказалось возможным формулу (2.122) распространить и на другие случаи закрепления стержня, заменив длину l ее приведенным значением

$$l_{пр} = \mu l, \qquad (2.123)$$

где μ — коэффициент приведения длины, т. е. число, показывающее, во сколько раз следует увеличить длину шарнирно закрепленного с обоих концов стержня, чтобы критическая сила для него была равна критической силе стержня в данных условиях закрепления.

Таким образом, общее выражение критической силы стержня при любом способе закрепления его концов примет вид

$$F_{кр} = \pi^2 E J_{min}/(\mu l)^2. \qquad (2.124)$$

На рис. 2.117 изображены несколько случаев закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента приве-

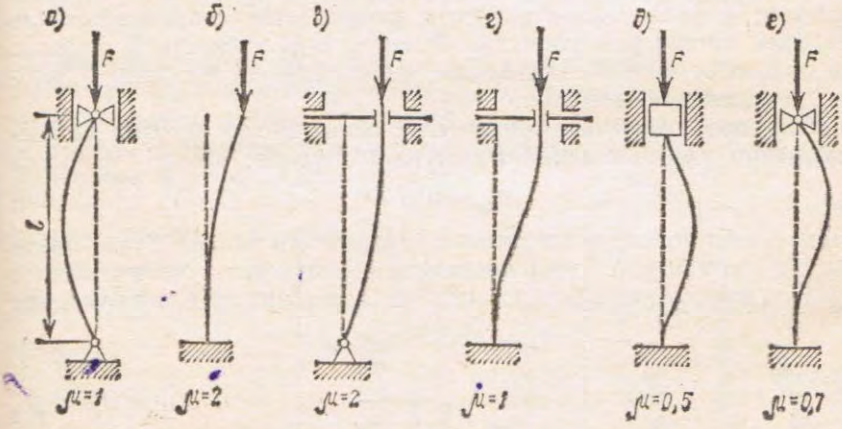


Рис. 2.117

дения μ: а) оба конца шарнирно закреплены; б) один конец жестко закреплен, другой свободен; в) один конец закреплен шарнирно,

второй имеет «плавающую» заделку; г) один конец заделан жестко, второй имеет «плавающую» заделку; д) оба конца заделаны жестко; е) один конец заделан жестко, другой закреплен шарнирно.

§ 2.45. КРИТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

При осевом нагружении стержня в его поперечных сечениях возникают нормальные напряжения сжатия, которые возрастают по мере увеличения нагрузки. Нормальные напряжения, соответствующие критической силе, называются критическими:

$$\sigma_{кр} = F_{кр}/A, \qquad (2.125)$$

или после подстановки значения критической силы из формулы (2.124)

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E J_{min}/[(\mu l)^2 A].$$

В последнюю формулу входят две геометрические характеристики площади сечения стержня: минимальный момент инерции J_{min} и площадь A. Частное от деления J_{min}/A представляет собой величину, имеющую единицу площади м², см², мм². Поэтому линейную величину $\sqrt{J_{min}/A} = i_{min}$ называют минимальным радиусом инерции сечения.

Таким образом, $J_{min}/A = i^2_{min}$ и последняя формула принимает вид

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E i^2_{min}/(\mu l)^2 \text{ или } \sigma_{кр} = \pi^2 E/(\mu l/i_{min})^2 = \pi^2 E/\lambda^2.$$

Безразмерная величина $\mu l/i_{min} = \lambda$ называется *гибкостью* стержня. Она характеризует сопротивляемость стержня потере устойчивости; с увеличением гибкости уменьшается сопротивляемость стержня потере устойчивости. Заметим, что гибкость λ стержня не зависит от материала стержня, а определяется его длиной, формой и размерами сечения.

Определяя значение критической силы, Эйлер исходил из рассмотрения упругой линии изогнутого стержня, поэтому формула

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E/\lambda^2 \qquad (2.126)$$

справедлива только в пределах применимости закона Гука, иначе говоря, до тех пор, пока критическое напряжение не превышает предела пропорциональности материала стержня, т. е. при условии

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E/\lambda^2 \leqslant \sigma_{пц}.$$

Отсюда

$$\lambda \geqslant \pi \sqrt{E/\sigma_{пц}}.$$

Стоящая в правой части неравенства постоянная для данного материала безразмерная величина называется *предельной гибкостью*:

$$\lambda_{пред} = \pi \sqrt{E/\sigma_{пц}}. \qquad (2.127)$$

Таким образом, применимость формулы Эйлера определяется условием

$$\lambda \geqslant \lambda_{пред}. \qquad (2.128)$$

Формула Эйлера применима только в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости того материала, из которого он изготовлен.

Как правило, многие конструкции имеют стержни с гибкостью меньше предельной. Разработку современных методов расчета на усталость таких стержней начал Ф. С. Ясинский *, который предложил приближенные формулы для определения критических напряжений за пределом пропорциональности, проанализировав предварительно обширный экспериментальный материал и построив графические зависимости между $\sigma_{кр}$ и λ для многих материалов. График зависимости $\sigma_{кр}$ от λ для стержней из пластичного материала (низкоуглеродистой стали) показан на рис. 2.118.

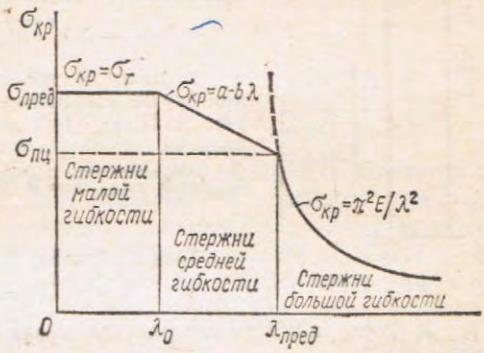


Рис. 2.118

В результате исследований подобных графиков стержни условно делятся на три группы. Стержни большой гибкости ($\lambda \geqslant \lambda_{пред}$), для которых критические напряжения определяются по формуле Эйлера (2.126). Стержни средней гибкости ($\lambda_0 \leqslant \lambda < \lambda_{пред}$), для которых критические напряжения определяются по формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \qquad (2.129)$$

где коэффициенты a и b имеют для каждого материала определенное значение, найденное экспериментально. Некоторые значения этих коэффициентов, а также гибкостей λ_0 и $\lambda_{пред}$, в интервале между которыми применима для данного материала формула Ясинского, приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Материал	a, МПа	b, МПа	λ_0	$\lambda_{пред}$
Сталь Ст2	264	0,70	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	60	100
Сталь 20, Ст4	328	1,15	60	96
Сталь 45	449	1,67	52	85
Дюралюмин Д16Т	406	1,83	30	53
Сосна, ель	29,3	0,194	—	70

* Ф. С. Ясинский (1856—1899) — профессор Петербургского института путей сообщения.

Стержни малой гибкости ($\lambda<\lambda_0$), для которых $\sigma_{кр}$ соответствует $\sigma_{пред}$, т. е. $\sigma_{кр}=\sigma_т$ для пластичных материалов и $\sigma_{кр}=\sigma_{вс}$ для хрупких материалов. Такие стержни рассчитывают не на устойчивость, а на прочность, как при простом сжатии.

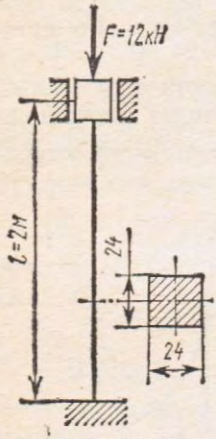


Рис. 2.119

Пример 2.28. Проверить на устойчивость при $[s_y]\geqslant 4$ сжатую стальную стойку (рис. 2.119); $E_{ст}=2\cdot10^5$ МПа, $\sigma_{пц}=230$ МПа.

Решение. 1. По формуле (2.127) определяем предельную гибкость материала стойки:

$$\lambda_{пред}=\pi\sqrt{E/\sigma_{пц}}=\pi\sqrt{2\cdot10^5/230}=92{,}5.$$

2. Находим гибкость стержня $\lambda=\mu l/i_{min}$, где в данном случае коэффициент приведения длины $\mu=0{,}5$ (см. рис. 2.117, *е*), $l=2$ м$=2000$ мм, а минимальный радиус инерции квадратного сечения

$$i_{min}=\sqrt{J_{min}/A}=\sqrt{(a^4/12)/a^2}=$$
$$=a/(2\sqrt{3})=12/\sqrt{3}=6{,}93 \text{ мм}.$$

Таким образом,

$$\lambda=\mu l/i_{min}=0{,}5\cdot2000/6{,}93=144.$$

3. Формула Эйлера для решения задачи применима, так как согласно условию (2.128)

$$\lambda=144>\lambda_{пред}=92{,}5.$$

4. Определяем момент инерции квадратного сечения по формуле (2.68):

$$J_{min}=J=b^4/12=24^4/12=27\,650 \text{ мм}^4=27\,650\cdot10^{-12} \text{ м}^4.$$

5. Определяем значение критической силы, помня, что $E=2\cdot10^5$ МПа$=2\times\times10^5\cdot10^6$ Па:

$$F_{кр}=\frac{\pi^2EJ_{min}}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\cdot2\cdot10^5\cdot10^6\cdot27\,650\cdot10^{-12}}{(0{,}5\cdot2)^2}=\pi^2\cdot2\cdot2765=54\,600 \text{ Н}=54{,}6 \text{ кН}.$$

6. Находим действительный коэффициент запаса устойчивости по формуле (2.120):

$$s_y=F_{кр}/F=54{,}6/12=4{,}54>[s_y].$$

Следовательно, запас устойчивости стойки соответствует требуемому.

Раздел третий
ДЕТАЛИ МАШИН

Глава 1
ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Во всех отраслях народного хозяйства машины применяют в самых широких масштабах. Под *машиной* понимают устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации. В зависимости от основного назначения различают три вида машин: энергетические, рабочие и информационные. *Энергетические машины* предназначены для преобразования любого вида энергии в механическую (электродвигатели, электрогенераторы, двигатели внутреннего сгорания, турбины, паровые машины и т. п.). *Рабочие машины*, в свою очередь, делятся на технологические (металлообрабатывающие станки, прокатные станы, дорожные и сельскохозяйственные машины и т. п.) и транспортные (автомобили, тепловозы, самолеты, вертолеты, подъемники, конвейеры и т. п.). *Информационные машины* предназначены для преобразования информации. Это прежде всего счетные и вычислительные машины (арифмометры, механические интеграторы и т. п.).

Машину, в которой все преобразования энергии, материалов, информации выполняются без непосредственного участия человека, называют автоматом. Машина и в особенности автомат облегчают труд человека, увеличивают производительность труда и обеспечивают высокое качество выполнения рабочего процесса.

Основу большинства машин составляют механизмы. *Механизмом* называют систему тел, предназначенных для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел. Простейшей частью механизма является звено. *Звено* — это твердое тело, входящее в состав механизма. Звено механизма может состоять из нескольких деталей, не изменяющих между собой относительного движения. Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называют *кинематической парой*. Кинематические пары бывают *низшие* и *высшие*. Звенья низших пар соприкасаются по поверхностям (поступательные, вращательные и винтовые пары), звенья высших пар соприкасаются по линиям и точкам (зубчатые пары, подшипники качения).

Любая машина состоит из деталей и сборочных единиц. *Деталь* —

изделие * , изготовленное из однородного по наименованию и марке материала без применения сборочных операций (болт, вал, зубчатое колесо, корпус редуктора, станина станка и др.). *Сборочная единица* — изделие, составные части которого подлежат соединению между собой на предприятии-изготовителе сборочными операциями (свинчиванием, сваркой, склеиванием и т. п.), например подшипники, муфта, редуктор и др.

Анализируя конструкции различных машин, их сборочных единиц и деталей, нетрудно заметить, что многие типы деталей и сборочных единиц встречаются почти во всех машинах с одними и теми же функциями, например болты, механические передачи, валы, подшипники и др. Эти детали (сборочные единицы) называют *деталями общего назначения;* их теорию, расчет и конструирование изучают в курсе деталей машин. Детали и сборочные единицы, характерные для сравнительно ограниченного числа видов машин, предназначенных для выполнения специальных функций (шпиндели станков, коленчатые валы, шатуны, канаты и т. п.), рассматривают в соответствующих курсах.

Все детали и сборочные единицы общего назначения делятся на три основные группы: соединительные детали и соединения (сварные, резьбовые, шпоночные и др.); передачи вращательного движения (зубчатые, червячные, ременные и др.); детали и сборочные единицы, обслуживающие передачи (валы, подшипники, муфты и др.).

Требования к машинам и их деталям: удобство и безопасность обслуживания; экономичность в изготовлении и эксплуатации, высокая надежность; соблюдение правил эстетики (машинам надо придавать красивый вид, сочетающийся с целесообразностью форм).

Удобство обслуживания существенно влияет на надежность машин и производительность труда. Неудобное расположение органов управления и контрольных приборов, повышенные усилия на рукоятках, шум и вибрация, плохая освещенность и обзор, сложность управления, осмотра и прочее приводят к быстрой утомляемости рабочего с возможными аварийными ситуациями.

При конструировании, изготовлении и эксплуатации машин экономические вопросы должны всегда стоять на одном из первых мест. Стоимость машин определяется технологичностью конструкции (см. ниже), затратами на материалы и др. Большое значение для удешевления машин имеет стандартизация — процесс установления и применения стандартов.

В СССР предусмотрено действие стандартов пяти категорий: Государственных стандартов СССР, обозначаемых ГОСТ; отраслевых стандартов — ОСТ; республиканских стандартов — РСТ; стандартов предприятий — СТП и стандартов СЭВ — СТ СЭВ. Все детали и сборочные единицы машин по всем показателям (размеры, форма, материал и др.) должны удовлетворять требованиям стан-

---

* Изделие — любой предмет или набор предметов производства, подлежащих изготовлению предприятием.

дартов, которые способствуют ускорению научно-технического прогресса и являются основным и активным средством внедрения его достижений в производство. Благодаря стандартизации снижается стоимость изготовления, эксплуатации и ремонта машин, сокращаются сроки проектирования и повышается надежность.

§ 3.2. ПОНЯТИЯ О НАДЕЖНОСТИ МАШИН

Надежность — свойство детали или машины в целом выполнять заданные функции с сохранением эксплуатационных показателей в течение требуемого промежутка времени или требуемой наработки. Для стационарного двигателя наработка выражается в часах, для автомобиля — километрах пробега, для трактора — гектарах обработанной земли и т. п.

Надежность — комплексное свойство, которое в зависимости от назначения изделия и условий его эксплуатации может включать безотказность, долговечность, ремонтопригодность и сохраняемость.

Безотказность — свойство изделия сохранять работоспособность в течение некоторого времени или некоторой наработки без вынужденных перерывов в заданных условиях эксплуатации. *Долговечность* — свойство изделия сохранять работоспособность до предельного состояния (по эффективности, безопасности и т. д.) с необходимыми перерывами для технического обслуживания и ремонта. *Ремонтопригодность* — приспособленность изделия к предупреждению, обнаружению и устранению причин отказов путем проведения технического обслуживания и ремонтов. *Сохраняемость* — свойство изделия непрерывно сохранять (в заданных пределах) значения установленных для него показателей качества во время и после хранения и при транспортировке.

Основным показателем надежности является *вероятность безотказной работы* $P(t)$, т. е. вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ детали не возникает. Расчет надежности базируется на статистических данных об отказах детали при эксплуатации, проведении специальных испытаний, математическом моделировании и т. п. Если N_0 — число испытанных деталей (одного наименования), N_t — число деталей, отказавших за время наработки t, то

$$P(t) = (N_0 - N_t)/N_0.$$

Вероятность $P(t)$ безотказной работы машины в целом равна произведению безотказности работы отдельных элементов, входящих в состав машины:

$$P(t) = P_1(t)\,P_2(t)\ldots P_n(t). \qquad (3.1)$$

Из формулы (3.1) следует, что надежность машины всегда меньше надежности любого из его элементов и падает с увеличением числа элементов. Так, при числе элементов $n=10$ с одинаковой вероятностью безотказной работы, равной 0,97, имеем $P(t)=0{,}97^{10}=0{,}74$.

Надежность можно рассматривать как качество машин, развернутое по времени, которое оценивают *интенсивностью отказов* $\lambda(t)$ — числом отказов в единицу времени. Например, при испыта-

нии 1000 деталей в течение 100 ч на каждую 10 деталей отказало. Находим $\lambda(t)=10/(1000\cdot100)=10^{-4}$ 1/ч. Это значит, что в час отказывает 0,01% деталей.

График надежности (рис. 3.1) имеет три характерных периода: *период приработки*, в начале которого интенсивность отказов имеет сравнительно высокие значения, затем снижается. Для этого периода характерно проявление различного рода дефектов производства, автоматическое доведение трущихся деталей до наиболее рациональных форм, установление нормальных зазоров и т. п.: *период нормальной эксплуатации* характеризуется примерно постоянным значением интенсивности отказов. Причиной отказов здесь являются случайные перегрузки, а также скрытые дефекты производства (структурные дефекты материала, микротрещины и т. п.); *период проявления износа* характеризуется резким повышением интенсивности отказов. Наступает предельное состояние, дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена.

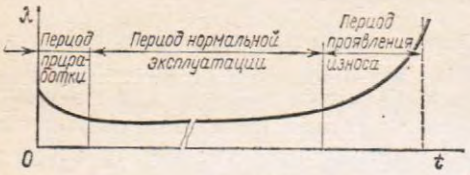


Рис. 3.1

Надежность машин, сборочных единиц и деталей обеспечивается их работоспособностью.

§ 3.3. КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ И РАСЧЕТА ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Работоспособность — состояние изделия, при котором оно способно выполнять заданные функции с параметрами, установленными нормативно-технической документацией. Основные критерии работоспособности деталей машин: прочность, жесткость, износостойкость, теплостойкость и виброустойчивость.

Прочность — главный критерий работоспособности для большинства деталей. Деталь не должна разрушаться или получать пластические деформации при действии на нее нагрузок. Различают статическую потерю прочности и усталостные поломки деталей. Потеря прочности происходит тогда, когда значение рабочих напряжений превышает предел текучести $\sigma_т$ для пластичных материалов или предел прочности $\sigma_в$ для хрупких материалов. Это связано обычно со случайными перегрузками, не учтенными при расчетах, или со скрытыми дефектами деталей (раковины, трещины и т. п.). Усталостные поломки вызываются длительным действием переменных напряжений, значение которых превышает характеристики выносливости материалов (например, σ_{-1}). Основы расчета на прочность и усталость были рассмотрены в разделе «Сопротивление материалов». Здесь же общие законы расчетов на прочность и усталость рассматривают в применении к конкретным деталям,

уделяя особое внимание выбору расчетных схем и значений коэффициентов запаса (допускаемых напряжений).

Работоспособность некоторых деталей (например, зубчатых колес, подшипников и др.) определяется не общей их прочностью, а прочностью рабочих поверхностей, т. е. контактной прочностью. В этом случае разрушение поверхностей деталей вызывается действием *контактных напряжений* σ_H*. Контактными называются напряжения, возникающие в месте контакта двух деталей, когда размеры площадки контакта малы по сравнению с размерами деталей* (сжатие шаров, цилиндров, зубчатых колес и т. п.). Эти напряжения имеют местный характер и быстро убывают по мере удаления от зоны контакта, поэтому они не влияют на общую прочность.

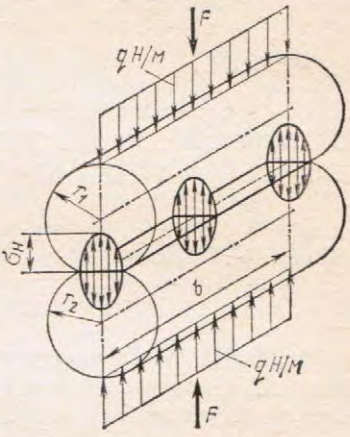


Рис. 3.2

При отсутствии нагрузки две детали могут соприкасаться в точке или по линии, т. е. иметь начальный контакт точечный (контакт шариков и колец подшипников, двух шаров и т. п.) или линейный (контакт двух цилиндров, контакт зубчатых колес и т. п.). Под нагрузкой начальный контакт переходит в контакт по весьма узкой площадке с высокими контактными напряжениями. Например, в случае контакта двух цилиндров длиной b и радиусами r_1 и r_2 с параллельными осями, сжатых силой F, площадка контакта имеет вид узкой полоски (рис. 3.2). При этом точки наибольших контактных напряжений σ_H располагаются по средней линии полосы контакта. Значение этих напряжений вычисляют по формуле Герца

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q}{\rho_{пр}} \frac{E_{пр}}{2\pi (1-\nu^2)}}, \qquad (3.2)$$

где $q=F/b$ — нагрузка на единицу длины контактной линии; $1/\rho_{пр}=1/r_1+1/r_2$, откуда $\rho_{пр}=r_1r_2/(r_1+r_2)$ — приведенный радиус кривизны контактирующихся поверхностей; r_1 и r_2 — радиусы кривизны в точках контакта. Если поверхность одного цилиндра вогнутая (внутренний контакт), то $\rho_{пр}=r_1r_2/(r_1-r_2)$; $E_{пр}=2E_1E_2/(E_1+E_2)$ — приведенный модуль упругости; E_1 и E_2 — модули упругости материалов цилиндров. Если цилиндры из одинаковых материалов, то $E_{пр}=E_1=E_2=E$; ν — коэффициент Пуассона.

При вращении цилиндров каждая точка их поверхности нагружается только в период прохождения зоны контакта. Это вызывает

---

* Индекс H приписывают контактным напряжениям в честь основоположника теории контактных напряжений Г. Герца (Hertz).

переменные контактные напряжения, которые приводят к усталости * поверхностных слоев деталей. На поверхности образуются микротрещины. Если детали работают в масле, то оно проникает в трещины (рис. 3.3, *а*). Попадая в зону контакта, трещина закрывается (рис. 3.3, *б*), а находящееся в ней масло испытывает высокое давление, что способствует расширению и углублению трещин. И так повторяется до тех пор, пока не произойдет выкрашивание кусочка металла, нависающего над трещиной (рис. 3.3, *в*). В результате выкрашивания на поверхности деталей появляются мел-



Рис. 3.3

кие раковины. Подобное повреждение наблюдается у фрикционных, зубчатых, червячных и цепных передач, работающих в масле, а также в подшипниках качения. Выкрашивание не наблюдается, если значение контактных напряжений не превышает допускаемого.

Формула (3.2) представляет практический интерес, так как является исходной при расчете фрикционных, зубчатых и червячных передач на контактную прочность.

Жесткость — способность деталей сопротивляться упругим деформациям, т. е. изменению их формы и размеров под действием нагрузок. Жесткость наряду с прочностью является основным критерием расчета многих деталей (валов передач, станин станков и т. п.). Недостаточная жесткость (чрезмерная упругая деформация), например, вала может сказаться на правильности функционирования и прочности связанных с ним деталей зубчатых передач, подшипников, муфты и др. Расчет на жесткость предусматривает ограничение упругих деформаций деталей в пределах, установленных опытом эксплуатации машин.

Износостойкость — сопротивление трущихся деталей изнашиванию. Износ приводит к изменению размеров, формы и состояния поверхности детали вследствие разрушения (изнашивания) ее поверхностного слоя при трении. По условиям внешнего воздействия на поверхностный слой различают: абразивный износ — изнашивание твердыми абразивными частицами (песок, пыль), передвигающимися между трущимися частями; коррозионный износ, при котором продукты коррозии стираются механическим путем, и другие

* Усталость — процесс постепенного накопления повреждений материала под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению (ГОСТ 23207—78).

виды износа. Износ уменьшает прочность деталей и изменяет характер их соединения (зазоры). Характерным признаком повышенного износа является возрастание шума при работе машин.

Повышение износостойкости деталей достигается защитой их от абразивного воздействия (уплотнения); применением специальных смазок и присадок к смазочным материалам, позволяющих создавать сервовитную пленку * на всех трущихся деталях; созданием условий жидкостной смазки (см. § 3.65); нанесением на детали тончайшей пленки из порошковых смесей; применением вибрационного накатывания, позволяющего создавать оптимальную шероховатость трущихся поверхностей деталей, и пр.

Теплостойкость — способность конструкции сохранять работоспособность в пределах заданных температур. Чрезмерный нагрев уменьшает прочность и жесткость деталей; снижает защитную способность масляного слоя, что повышает износ деталей или вызывает их заедание; изменяет зазоры в сопряженных деталях, что приводит к заклиниванию и поломке. Для установления температурного состояния изделия при работе производят тепловые расчеты и при необходимости применяют водяное охлаждение, циркуляционную смазку или вносят другие конструктивные изменения.

Виброустойчивость — способность конструкции работать в заданном диапазоне режимов без резонансных колебаний. Виброустойчивость как критерий работоспособности характерна для быстроходных машин. Вибрации снижают качество работы машины, вызывают дополнительные переменные напряжения, которые приводят к усталостному разрушению деталей. Расчеты на виброустойчивость рассматривают в специальной литературе.

В соответствии с перечисленными критериями работоспособности производят расчеты деталей машин, которые, основываясь на методах сопротивления материалов, часто имеют ряд особенностей. В частности, условия работы деталей машин бывают столь разнообразными и сложными, что их не всегда удается проанализировать и учесть при расчете. Поэтому в курсе деталей машин кроме расчетов по формулам сопротивления материалов применяют расчеты по приближенным формулам и эмпирическим зависимостям, полученным в результате обобщения расчета, конструирования и эксплуатации машин.

Применяют два вида расчетов деталей машин: проектировочный и проверочный. Размеры детали определяют по результатам *проектировочного расчета*. Проектировочные расчеты выполняют по допускаемым напряжениям как предварительные, так как на этой стадии проектирования практически невозможно учесть все факторы, влияющие на прочность детали. Затем выполняют *проверочный расчет*, который является уточненным и производится по рабочему чертежу спроектированной детали, когда известны ее форма

* Сервовитная пленка — пленка, «спасающая жизнь». Это металлическая защитная пленка, возникающая в процессе трения (трение не уничтожает пленку, оно ее создает). При работе пленка воспринимает нагрузки, пряча неровности твердых поверхностей, которые практически не участвуют в процессе трения.

и размеры, концентраторы напряжений и др. Проверочный расчет выполняют в целях проверки соблюдения условия $s \geqslant [s]$ или $\sigma \leqslant [\sigma]$, где s и $[s]$ — действительный и допускаемый коэффициенты запаса прочности, а σ и $[\sigma]$ — расчетное и допускаемое напряжения, или в целях определения допустимой нагрузки, долговечности и пр.

§ 3.4. ДОПУСКИ И ПОСАДКИ, ШЕРОХОВАТОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ТЕХНОЛОГИЧНОСТЬ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Допуски и посадки. При составлении чертежа детали (например, вала) конструктор устанавливает размер диаметра вала, который требуется по условиям его работы. Этот размер, называемый *номинальным*, является общим для вала и отверстия, составляющих соединение, и обозначается соответственно d и D (рис. 3.4). Однако

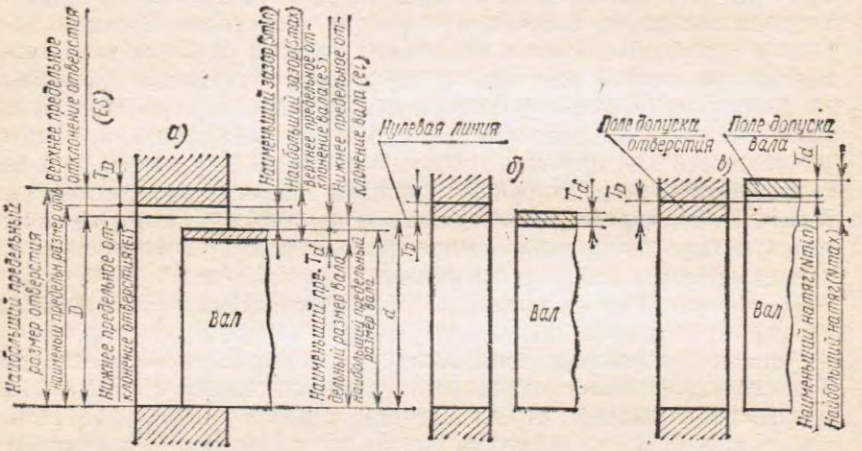


Рис. 3.4

с учетом погрешности обработки (ошибки размеров, формы и расположения поверхностей и т. п.) размер детали, изготовленной по чертежу, всегда отличается от номинального. Вместе с тем основной предпосылкой массового производства является взаимозаменяемость — возможность заменить одну деталь другой без дополнительной обработки. Для выполнения этого требования конструктор указывает на чертеже два значения допускаемого размера: *наибольший* и *наименьший предельные размеры*, разность между которыми называют *допуском* и обозначают T_D и T_d соответственно для отверстия и вала. Действительный размер годных деталей должен быть не больше наибольшего и не меньше наименьшего допускаемых предельных размеров.

Для удобства на чертежах указывают номинальный размер и его предельные отклонения. Верхним предельным отклонением на-

зывают алгебраическую разность между наибольшим предельным и номинальным размерами, а нижним — алгебраическую разность между наименьшим и номинальным размерами. В стандартах даны числовые значения допусков, установленные в 19 рядах точности, называемых квалитетами и обозначаемых порядковыми номерами. Чем выше номер квалитета, тем больше значение допуска, грубее может быть выполнен размер. Наибольшее распространение в машиностроении имеют точности, соответствующие 6,7 и 8-му квалитетам. На чертежах допуски на размеры проставляют после номинального размера одним из трех способов: условными обозначениями полей допусков, например $18H7$ (поле допуска отверстия), $12e9$ (поле допуска вала), числовыми значениями предельных отклонений: $18^{+0,018}$; $12^{-0,032}_{-0,075}$; условными обозначениями полей допусков с указанием в скобках числовых значений предельных отклонений: $18H7^{(+0,018)}$, $12e9(^{-0,032}_{-0,075})$.

В зависимости от взаимного расположения полей допусков посадки могут быть (рис. 3.4) *с зазором (а)*, *переходные (б)* и *с натягом (в)*. Посадки назначают из расчета или опыта, имеющегося в данной отрасли. Посадки с зазором обычно применяют в подвижных соединениях (например, подшипниках скольжения) и в неподвижных, если надо обеспечить легкую сборку и разборку. Переходные используют в неподвижных соединениях, требующих повторных сборок и разборок с применением дополнительных креплений (шпонок, резьбовых деталей и т. д.). Посадки с натягом применяют в неподвижных соединениях. Поскольку посадка образуется сочетанием полей допусков отверстия и вала, на чертежах ее обозначают в виде дроби, причем в числителе указывают обозначение поля допуска отверстия, а в знаменателе — вала, например $\varnothing 10H7/к6$.

Для того чтобы выполнить деталь по чертежу, необходимо получить не только заданную точность размеров, но и обеспечить точность геометрической формы и точность взаимного расположения поверхностей. Однако действительная форма детали из-за погрешностей обработки будет отличаться от заданной по чертежу. Отклонения формы поверхности (непараллельность, неперпендикулярность, несоосность, некруглость и др.) искажают характер соединения деталей и ухудшают качество работы машины в целом. Поэтому в зависимости от назначения деталей и условий их работы конструктор ограничивает значения возможных отклонений форм и расположения поверхностей допусками, предусмотренными стандартом.

Шероховатость поверхностей. Поверхности деталей после обработки не являются идеально гладкими, так как режущие кромки инструментов оставляют на поверхности следы в виде неровностей и гребешков, близко расположенных друг к другу (рис. 3.5). Совокупность всех неровностей на рассматриваемой поверхности называется *шероховатостью*.

Шероховатость поверхностей ухудшает качественные показатели работы деталей. В подвижных соединениях шероховатость приво-

дит к преждевременному износу поверхностей, так как при работе деталей металлические гребешки стираются, смешиваются с маслом и ускоряют процесс износа поверхностей. В неподвижных соединениях шероховатость ослабляет их прочность, так как при измерении размер у вала получается завышенный, а у отверстия — заниженный и при снятии гребешков натяги в соединении станут меньше. Уменьшение шероховатости (повышение гладкости поверхности) способствует увеличению износостойкости, прочности, коррозионной стойкости и герметичности соединений.

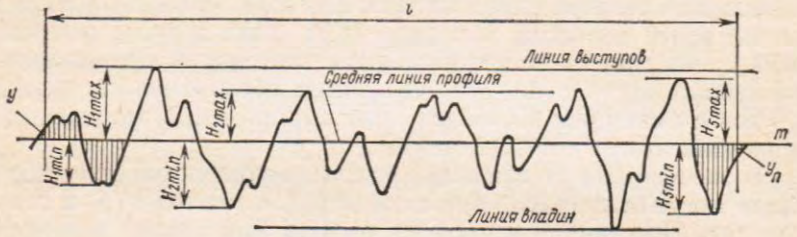


Рис. 3.5

В соответствии с ГОСТ 2789—73 основные параметры оценки шероховатости поверхностей следующие: R_a — среднее арифметическое отклонение профиля на базовой длине l; R_z — высота неровностей профиля по десяти точкам на базовой длине l. Значения R_a и R_z определяют по формулам

$$R_a = (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)/n; \qquad (3.3)$$

$$R_z = [(H_{1max} + H_{2max} + \ldots + H_{5max}) - (H_{1min} + H_{2min} + \ldots + H_{5min})]/5, \qquad (3.3а)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — расстояния точек действительного (измеренного) профиля до его средней линии m; n — количество измеренных расстояний; H_{max} и H_{min} — отклонения соответственно пяти высших точек выступов и пяти низших точек впадин профиля.

Некоторые предпочтительные значения параметров шероховатости по СТ СЭВ 638—77 R_a (мкм): 1,6; 0,8; 0,4; 0,2; R_z (мкм): 6,3; 3,2; 1,6; 0,8 *.

Другие параметры для оценки шероховатости поверхностей даны в ГОСТ 2789—73. Согласно ГОСТ 2.309—73, для обозначения шероховатости поверхностей на чертеже при наличии в обозначении только значения параметра может применяться один из трех знаков: $\sqrt{}$ — когда вид обработки поверхности не устанавливается; ∇ — поверхность должна быть обработана удале-

* Указанные значения R_a и R_z соответствуют 6; 7; 8; 9-му классам шероховатости поверхности по ГОСТ 2789—73.

нием слоя материала, например точением, шлифованием и т. д.;

 — поверхность должна быть обработана без удаления слоя материала, например литьем, ковкой и т. п. Этим же знаком указывают поверхности, не обрабатываемые по данному чертежу. Значение параметра R_a в обозначении указывается без символов, например  ; значение параметра R_z — символом, например .

Технологичность деталей машин. Большое техническое и экономическое значение имеет технологичность машин и их деталей. *Технологичной* называется такая конструкция, которая обеспечивает заданные эксплуатационные качества и позволяет при данной серийности изготовлять ее с наименьшими затратами труда, материалов, средств и времени. Технологичность деталей машин в основном зависит от формы, материала, требуемой точности и шероховатости обрабатываемых поверхностей. При выборе формы учитывают условия работы и назначение детали, способы изготовления и тип производства.

При единичном и мелкосерийном производстве целесообразно изготовлять детали на металлорежущих станках, а корпусные детали — сваркой. При этом важнейшим условием является широкое применение стандартизированных и унифицированных деталей. Эффективно также использование деталей и сборочных единиц машин массового производства. При серийном и массовом производстве наиболее экономично изготовление деталей методом литья или обработкой давлением (свободная ковка и штамповка, прокатка и волочение). В отличие от обработки деталей резанием при этом ускоряется процесс производства, уменьшается расход материала и снижаются затраты на электроэнергию и инструмент. Для многих деталей обработка давлением — это окончательная операция (болты и винты с накатанной резьбой, листовые штамповки и т. д.). Для получения заготовок деталей наибольшее распространение получила штамповка.

Детали должны быть изготовлены таким образом, чтобы была возможна сборка машины, которая является весьма трудоемкой. От качества сборки в большой степени зависит надежность машин. Поэтому при проектировании надо уделять большое внимание осуществлению удобной сборки и разборки, исключать ручные пригоночные операции, стремиться к уменьшению числа деталей и удобной компоновке сборочных единиц, обеспечивающей легкость обслуживания машин.

Глава 2
НЕРАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Каждая машина получается в результате сборки деталей, осуществляемой с помощью подвижных и неподвижных соединений.

Подвижные соединения обеспечивают движение одной детали относительно другой (кинематические пары, например соединение вала с опорами, зубчатое зацепление и др.). *Неподвижные* соединения жестко скрепляют две или несколько деталей (например, сварные, резьбовые и др.).

По признаку разъемности соединения делят на *неразъемные* (заклепочные, сварные, клеевые, с гарантированным натягом и др.) и *разъемные* (резьбовые, шпоночные, шлицевые и др.). Первые можно разбирать только после их полного или частичного разрушения, вторые допускают многократную разборку и сборку без повреждения деталей.

§ 3.5. СВАРНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Сварные соединения наиболее совершенны из неразъемных соединений. Они образуются под действием сил молекулярного сцепления, возникающих в результате местного нагрева соединяемых деталей или совместного пластического деформирования их.

Способы сварки весьма разнообразны. Наиболее широко распространена электродуговая сварка металлическим электродом. Процесс сварки ведется вручную или автоматически. Для защиты расплавленного металла от вредного воздействия воздуха (окисления и насыщения азотом) применяют флюсы. Флюс обеспечивает высокое качество металла шва и устраняет его разбрызгивание. При ручной сварке флюсы наносят на электрод в виде обмазки, при автоматической — весь процесс протекает под флюсом * .

Марки электродов различают по значению предела прочности металла шва $\sigma_в$. Так, для электрода Э42А $\sigma_в \approx 420$ МПа; буква *А* указывает на повышенные качества шва. Электроды подбирают так, чтобы получить близкие характеристики металла шва и металла свариваемых деталей. Для сварки низко- и среднеуглеродистых, а также низколегированных сталей применяют электроды Э34, Э42, Э42А, Э46, Э46А, Э50, Э50А, Э60А и др. Для высоколегированных сталей, чугунов и цветных металлов требуются специальные приемы сварки (предварительный подогрев, специальные электроды, защитные газы и др.).

Достоинства: равнопрочность шва и соединяемых деталей; герметичность соединений; технологичность и невысокая стоимость изготовления (малая трудоемкость процесса сварки, просто-

---

* Идея сварки под флюсом принадлежит Н. Г. Славянову (1890), а промышленный способ ее применения разработан и внедрен в производство акад. Е. О. Патоном (1940).

та конструкции сварного шва, возможность автоматизации процесса сварки и др.). *Недостатки:* недостаточная прочность при переменных и особенно при вибрационных и ударных нагрузках; коробление деталей из-за неравномерности нагрева в процессе сварки и охлаждения; изменение структуры металла вблизи сварочных швов, что понижает прочность; опасность появления трещин и др.

Сварные соединения применяют во всех отраслях промышленности. В машиностроении, судостроении и строительстве сварные соединения заменили заклепочные, за исключением конструкций, подверженных вибрационным и ударным нагрузкам (корпуса и крылья самолетов, мосты и др.) и конструкций из несвариваемых материалов (текстолит и др.). Сварку широко применяют вместо литья и ковки как технологический способ для создания разнообразных по форме деталей, при этом масса сварных конструкций в сравнении с чугунными литыми уменьшается почти на 50%, а стоимость изделий — в 1,5. . .2 раза. Сварными выполняют станины, рамы, зубчатые колеса, шкивы, звездочки, цистерны, трубы, корпуса речных и морских судов и т. д.

Виды сварных соединений. В зависимости от взаимного расположения свариваемых элементов различают следующие *виды сварных соединений:* стыковые, нахлесточные, тавровые и угловые. Основные типы швов сварных соединений, выполненных ручной электродуговой сваркой, даны в табл. 3.1 (ГОСТ 5264—69).

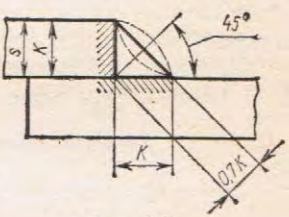


Рис. 3.6

Стыковые соединения — наиболее простые, надежные и экономичные конструкции. Имеют наименьшую массу и концентрацию напряжений в зоне шва. Эти соединения выполняют *стыковыми швами*, форма которых зависит от толщины соединяемых деталей и вида сварки. Геометрической характеристикой стыкового шва является толщина свариваемых деталей s.

Нахлесточные соединения выполняют *угловыми швами*, которые по форме наружной поверхности могут быть нормальными, выпуклыми и вогнутыми (рис. 3.6). На практике наиболее распространены нормальные швы, имеющие в поперечном сечении форму равнобедренного треугольника. Выпуклые швы образуют резкое изменение сечения деталей в месте соединения, что вызывает повышенную концентрацию напряжений. Вогнутые швы обеспечивают плавное сопряжение металла шва с основным металлом, что снижает концентрацию напряжений и увеличивает прочность соединения. Вогнутость шва достигается механической обработкой. Такие швы применяют в ответственных конструкциях и при действии переменных нагрузок. Геометрической характеристикой углового шва является катет K. По условиям технологии сварки минимальное значение катета должно быть не менее 3 мм. В большинстве случаев $K=s$.

В зависимости от расположения относительного направления внешней нагрузки угловые швы бывают лобовые, фланговые и комбинированные (рис. 3.7). *Лобовой шов* (*а*) расположен перпендикулярно, а *фланговый* (*б*) — параллельно линии действия нагрузки F. *Комбинированный* шов (*в*) состоит из лобовых и фланговых *.

Тавровые соединения выполняют угловыми швами без скоса кромок (швов Т3) или стыковыми со скосом кромок. Они широко рас-

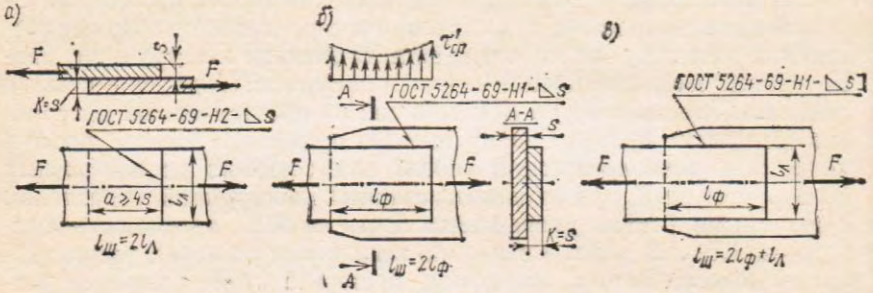


Рис. 3.7

пространены в составных машиностроительных конструкциях, свариваемые элементы которых расположены во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Угловые соединения выполняют стыковыми или угловыми (швов У4) швами. Они мало пригодны как силовые, поэтому их применяют как связующие или как слабо нагруженные рабочие швы (ограждения, тара и др.).

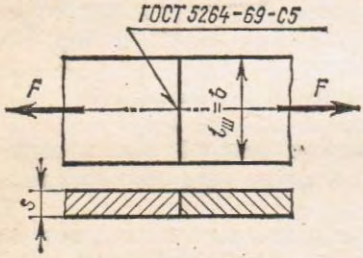


Рис. 3.8

Расчет сварных соединений при осевом нагружении. В соответствии с конструкцией сварного соединения назначают размеры шва, а затем выполняют проверочный расчет на прочность в предположении равномерного распределения напряжений по длине и сечению шва.

Стыковые соединения. Стыковые швы рассчитывают на растяжение или сжатие. Длина сварного шва $l_ш$ равна ширине соединяемых полос b (рис. 3.8). Условие прочности шва на растяжение

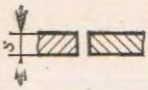
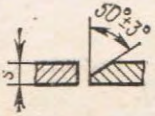
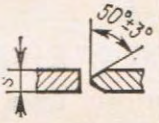
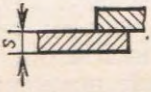
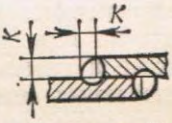
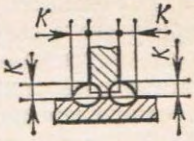
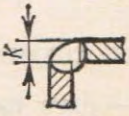
$$\sigma'_р = F/(sl_ш) \leqslant [\sigma'_р], \qquad (3.4)$$

где F — осевая растягивающая сила; s — толщина шва; $\sigma'_р$ и $[\sigma'_р]$ — расчетное и допускаемое напряжения на растяжение шва (табл. 3.2).

---

* На рисунках даны условные обозначения швов сварных соединений по ГОСТ 2.312—72.

Таблица 3.1

Вид соединения	Форма подготовленных кромок	Характер выполненного шва	Форма поперечного сечения: подготовленных кромок	Форма поперечного сечения: выполненного шва	Толщина свариваемых деталей s, мм	Условное обозначение шва сварного соединения
Стыковое	Без скоса кромок	Двусторонний			2...8	С4
	Со скосом одной кромки	Односторонний			4...26	С5
	С двумя симметричными скосами одной кромки	Двусторонний			12...60	С11
Нахлесточное	Без скоса кромок	Односторонний			2...60	Н1
		Двусторонний				Н2
Тавровое	Без скоса кромок	Двусторонний			2..,30	Т3
Угловое	Без скоса кромок	Односторонний			1..,30	У4

Нахлесточные соединения. Угловые швы рассчитывают на срез по опасному сечению, совпадающему с биссектрисой прямого угла (см. рис. 3.6). Расчетная высота шва $K \sin 45° \approx 0{,}7\,K$. Условие прочности шва на срез

$$\tau'_{ср} = F/(0{,}7\,K l_ш) \leqslant [\tau'_{ср}], \qquad (3.5)$$

Таблица 3.2

Способ сварки и марка электрода	Допускаемые напряжения при растяжении $[\sigma_р]$	сжатии $[\sigma_с]$	срезе $[\tau_{ср}]$
Автоматическая под флюсом и ручная электродами Э42А и Э50А	$[\sigma_р]$	$[\sigma_р]$	$0,65\,[\sigma_р]$
Ручная дуговая электродами Э42 и Э50	$0,9\,[\sigma_р]$	$[\sigma_р]$	$0,6\,[\sigma_р]$

Примечание. Допускаемое напряжение на растяжение для основного металла $[\sigma_р]=\sigma_т/s$, где $s=1,2\ldots1,8$ — коэффициент запаса прочности.

где $l_ш$ — длина шва; $\tau'_{ср}$ и $[\tau'_{ср}]$ — расчетное и допускаемое напряжения на срез шва (см. табл. 3.2).

Длину углового лобового шва $l_л$ (см. рис. 3.7, *а*) обычно принимают равной ширине привариваемой детали. Длина углового флангового шва (см. рис. 3.7, *б*)

$$l_ф = F/(2 \cdot 0,7\,K\,[\tau'_{ср}]). \qquad (3.6)$$

На практике длину фланговых швов ограничивают условием $l_ф \leqslant 50\,K$, так как с увеличением их длины возрастает неравномерность распределения напряжений по длине шва (см. рис. 3.7, *б*). Из-за неизбежных дефектов сварки на концах шва минимальная длина угловых швов должна быть не менее 30 мм.

Допускаемые напряжения. Прочность сварных соединений, полученных конкретным способом сварки, зависит от следующих факторов: качества основного материала; характера действующих нагрузок (постоянные или переменные); технологических дефектов сварки (шлаковые и газовые включения, непровары и т. п.); деформаций, вызываемых сваркой; различной структуры и свойств наплавленного и основного металла и др. Поэтому *допускаемые напряжения* при расчете сварных соединений принимают пониженными в долях от допускаемых напряжений для основного металла. Нормы допускаемых напряжений для сварных соединений деталей из низко- и среднеуглеродистых сталей при статической нагрузке указаны в табл. 3.2, а при переменных нагрузках — см. [12] и [18].

§ 3.6. КЛЕЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Склеивание — один из эффективных способов соединения конструкционных материалов. Нагрузочная способность клеевых соединений в основном зависит от конструкции склеиваемых деталей, качества подготовки поверхностей к склеиванию и правильности выбора типа клея.

Сопрягаемые поверхности склеиваемых деталей не должны иметь заусенцев и забоин, а шероховатость их составляет не менее

6,3 ... 2,5 Перед склеиванием эти поверхности тщательно обезжиривают органическими растворителями (бензином, ацетоном и др.) или водяным щелочным раствором. В зависимости от склеиваемых материалов и условий работы (характер нагрузок, температура и др.) для склеивания применяют различный клей, например БФ, БС, ВК, ФЛ-4, клеевые композиции на основе эпоксидной смолы ЭД-20 и др.

Достоинства: возможность соединения разнородных материалов, неподдающихся сварке; герметичность; высокая коррозионная стойкость; малая концентрация напряжений и др. *Недостатки:*

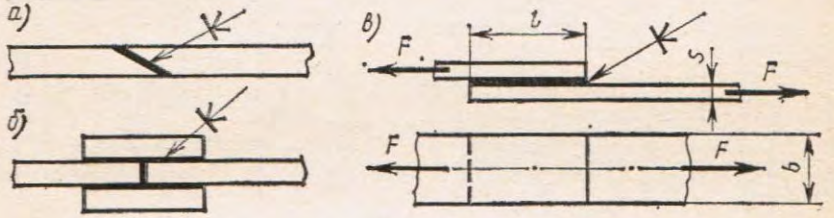


Рис. 3.9

зависимость прочности и долговечности клеевых соединений от условий эксплуатации (температуры, типа нагрузки, среды и т. п.); сложность технологических режимов склеивания.

Клеевые соединения применяют в электропромышленности, авиации, мостостроительстве, станкостроении и т. д. Наибольшее распространение имеют соединения листового материала и тонкостенные клеевые конструкции. Их успешно используют для уплотнения и стопорения резьбовых соединений, при этом повышается надежность работы и отпадает необходимость в стопорных деталях (см. § 3.11).

Оправдавшие себя на практике виды клеевых соединений листов показаны на рис. 3.9. Их выполняют по косому срезу (*а*), с накладками (*б*) или нахлесточными (*в*). Эти соединения рассчитывают на сдвиг методами сопротивления материалов, принимая допускаемое напряжение на сдвиг $[\tau_{ср}]=15...20$ МПа.

§ 3.7. СОЕДИНЕНИЯ С НАТЯГОМ

Соединения с натягом получают с помощью прессовых посадок. Их относят к неразъемным, хотя они занимают промежуточное положение между разъемными и неразъемными соединениями. Эти соединения можно разбирать без разрушения деталей, однако повторная сборка не обеспечивает той же надежности соединения, что первичная.

Из соединений деталей с натягом наибольшее распространение получили *цилиндрические*, т. е. такие, в которых одна деталь охватывает другую по цилиндрической поверхности (рис. 3.10). Необ-

ходимый натяг обеспечивается изготовлением соединяемых деталей с требуемой разностью их посадочных диаметров. После сборки на посадочной поверхности возникают контактное давление p и соответствующие ему силы трения, которые обеспечивают неподвижность соединения.

Сборку соединения с натягом выполняют прессованием, нагревом ступицы (охватывающей детали) или охлаждением вала (охватываемой детали). *Прессование* * — наиболее простой и распространенный способ сборки, однако при запрессовке происходит смятие и частичное срезание неровностей посадочных поверхностей,

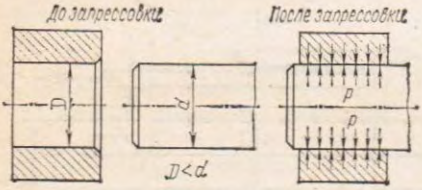


Рис. 3.10

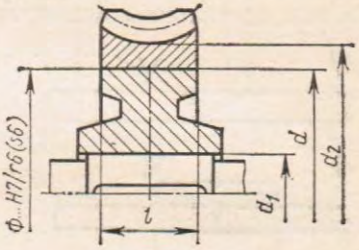


Рис. 3.11

что снижает прочность соединения. Соединение деталей *нагревом* или *охлаждением* не имеет этого недостатка, поэтому прочность таких соединений в 1,5. . .2 раза выше, чем соединений, собираемых запрессовкой. Нагревание ступицы производят в горячем масле, токами высокой частоты или в газовой печи (до температуры 200. . . 400°С), а охлаждение вала — сухим льдом (температура испарения —79°С) или жидким воздухом (температура испарения —190°С). Охлаждение валов применяют ограниченно из-за возможности коррозии, так как холодный вал сразу покрывается инеем. Разность температур нагрева ступицы или охлаждения вала должна обеспечить минимально необходимый зазор.

Достоинства: простота и технологичность (нет шпонки и пазов или шлицев, а также деталей для осевой фиксации); исключается ослабление вала шпоночным пазом, хорошее центрование; возможность передачи больших знакопеременных нагрузок, в том числе вибрационных и ударных. *Недостатки:* потребность в специальных печах и мощных прессах; сложность разборки соединения; рассеивание нагрузочной способности соединения, связанное с колебаниями действительных посадочных размеров в пределах допусков.

Соединения с натягом применяют для изготовления составных зубчатых, червячных (рис. 3.11, *а*) и локомотивных (рис. 3.12) колес, соединения их с валами (осями) для посадки подшипников качения, роторов электродвигателей и т. д. Они постепенно вытесняют шпоночные и другие соединения, особенно при отсутствии необходимости в частой сборке-разборке.

* Запрессовку деталей производят на гидравлических, винтовых и рычажных прессах. Скорость запрессовки $v \leqslant 5$ мм/с.

Расчет соединений с натягом (рис. 3.13). Прочность соединения зависит от значения натяга, который принимают в соответствии с выбранной посадкой. При расчете посадки с натягом в первую очередь определяют значение необходимого давления p на посадочной поверхности в предположении равномерного распределения его по всей поверхности. Это давление должно быть таким, чтобы силы трения, возникающие на посадочной поверхности соединения, обеспечивали надежную передачу заданной осевой силы F, вращающего момента M или их комбинации. Значение p определяют по следующим формулам:

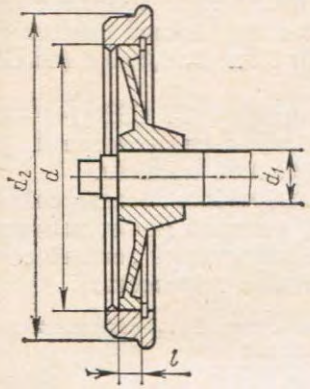


Рис. 3.12

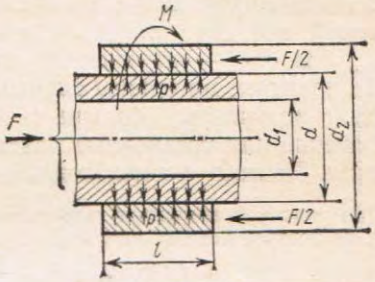


Рис. 3.13

при передаче осевой силы F

$$p \geqslant KF/(f\pi dl), \tag{3.7}$$

при передаче вращающего момента M

$$p \geqslant 2KM/(f\pi d^2 l), \tag{3.8}$$

при одновременной передаче осевой силы F и вращающего момента M

$$p \geqslant K\sqrt{F^2 + (2M/d)^2}/(f\pi dl), \tag{3.9}$$

где $K=1,5 \ldots 2$ — коэффициент запаса прочности соединения; d и l — номинальный диаметр и длина соединения; f — коэффициент трения (сцепления). При запрессовке: $f=0{,}085$ — сталь по стали и чугуну, $f=0{,}05$ — бронза по стали и чугуну.

Расчетный натяг δ_p связан с давлением p зависимостью Ляме

$$\delta_p = pd\,(C_1/E_1 + C_2/E_2), \tag{3.10}$$

где C_1 и C_2 — коэффициенты жесткости:

$$C_1 = (d^2 + d_1^2)/(d^2 - d_1^2) - \nu_1;\ C_2 = (d_2^2 + d^2)/(d_2^2 - d^2) + \nu_2;$$

d_1 — диаметр отверстия вала (для вала сплошного сечения $d_1=0$); d_2 — наружный диаметр охватывающей детали (ступицы); E_1 и E_2, ν_1 и ν_2 — модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов вала и ступицы: для стали $E=2{,}1\cdot 10^5$ МПа и $\nu=0{,}3$; для бронзы $E=0{,}98\cdot 10^5$ МПа и $\nu=0{,}35$; для чугуна $E=1{,}1\cdot 10^5$ МПа и $\nu=0{,}25$.

При сборке соединения неровности посадочных поверхностей срезаются и сглаживаются; для компенсации этого требуемый натяг $\delta_т$ должен быть больше расчетного $\delta_р$:

$$\delta_т = \delta_р + 5(R_{a1} + R_{a2}), \tag{3.11}$$

где R_{a1} и R_{a2} — среднее арифметическое отклонение профилей сопрягаемых поверхностей. Для посадочных поверхностей прессовых соединений характерны значения R_a (мкм): 2,5; 1,6; 0,8; 0,4 (по СТ СЭВ 638—77).

В соответствии со значением $\delta_т$ по стандарту СТ СЭВ 144—75 выбирают посадку, при этом должно соблюдаться условие $\delta_т \geqslant \geqslant \delta_{min}$, где δ_{min} — наименьший натяг выбранной посадки.

На практике возможны случаи, когда выбранная посадка создает натяг значительно больше требуемого, который может вызвать разрушение или чрезмерные пластические деформации деталей соединения. Поэтому их необходимо проверять на прочность.

Для этого устанавливают наибольшее значение натяга δ_{max} выбранной посадки, по которой находят наибольший расчетный натяг:

$$\delta_{р\,max} = \delta_{max} - 5(R_{a1} + R_{a2}) \tag{3.12}$$

и соответствующее ему максимальное давление на посадочной поверхности:

$$p_{max} = \delta_{р\,max}/[d(C_1/E_1 + C_2/E_2)]. \tag{3.13}$$

По этому давлению сопрягаемые детали проверяют на прочность *. Как правило, опасной деталью соединения является ступица (охватывающая деталь). При этом наибольшие напряжения растяжения возникают в точках внутренней поверхности. Условие прочности ступицы из пластичного материала по гипотезе наибольших касательных напряжений

$$\sigma_э = 2p_{max}/[1 - (d/d_2)^2] \leqslant \sigma_т, \tag{3.14}$$

где $\sigma_э$ — наибольшее эквивалентное напряжение в точках внутренней поверхности ступицы; $\sigma_т$ — предел текучести материала ступицы.

Проверка на прочность ступиц стальных зубчатых колес не обязательна, поскольку во всех реальных случаях эквивалентные напряжения не превышают $0{,}8\sigma_т$. Нельзя применять соединения для посадки на валы чугунных зубчатых колес или червячных колес с чугунными центрами, так как напряжения в теле ступицы превышают предел прочности чугуна на разрыв. Поэтому формулы (3.12). . .(3.14) применяют для проверки прочности охватывающей детали из бронзы, например венца червячного колеса.

Глава 3
РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Резьбовые соединения — самый распространенный вид разъемных соединений. Они осуществляются с помощью крепежных резьбовых деталей — болтов, винтов, шпилек, гаек и других деталей, основным параметром которых является резьба. Резьба получается прорезанием на поверхности стержня канавок при движении плоской

* По значению p_{max} также определяют необходимую силу запрессовки $F_a = f\pi dlp_{max}$.

фигуры (треугольника, трапеции и др.) по винтовой линии. Плоская фигура образует резьбу соответствующего профиля. Винтовую линию образует гипотенуза огибаемого вокруг прямого кругового цилиндра прямоугольного треугольника (рис. 3.14), один катет которого πd_2, а второй p_z. Выступы, полученные на стержне между канавками, называются *витками* резьбы.

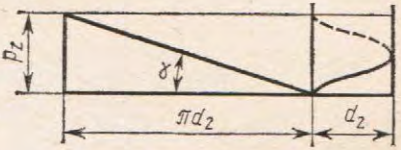


Рис. 3.14

§ 3.8. РЕЗЬБЫ

Методы изготовления резьбы. Резьбу *нарезают* вручную метчиками или плашками, а также на специальных станках резцами, резьбовыми головками или фрезами; в массовом производстве резьбу получают *накатыванием* на резьбонакатных автоматах. Накатанные резьбы имеют повышенную прочность вследствие наклепа наружной поверхности резьбы.



Рис. 3.15

Классификация резьб. По форме поверхности, на которой образована резьба, различают *цилиндрические и конические* резьбы, которые могут быть наружными и внутренними. По форме профиля * (рис. 3.15) резьбы разделяют на *треугольные* (*а*), *трапецеидальные* (*б*), *упорные* (*в*), *прямоугольные* (*г*) *и круглые* (*д*).

По направлению винтовой линии различают *правую* и *левую* резьбы. У правой резьбы винтовая линия поднимается слева вверх направо (см. рис. 3.14), у левой — в противоположном направлении (рис. 3.16, *а*). Наиболее распространена правая резьба. При вращении винта с правой резьбой по часовой стрелке он ввинчивается в неподвижную гайку.

По числу заходов резьбы делят на *однозаходные* (см. рис. 3.16, *а*) и *многозаходные* — это двухзаходные (рис. 3.16, *б*), трехзаходные и т. д. Если торец заготовки детали разделить на две или три равные части и из этих точек одновременно перемещать по параллельным винтовым линиям профили резьбы, то получим двух или трехзаходную резьбу. Число заходов больше трех применяется редко.

По назначению различают *крепежные* резьбы (наружные и внутренние), применяемые в резьбовых соединениях, *крепежно-уплотнительные* резьбы, применяемые в соединениях, требующих герметизации (соединения труб), и *резьбы для передачи движения* (ходовые) — это, как правило, многозаходные трапецеидальные, применяемые в винтовых механизмах. Подавляющее большинство кре-

* Профиль резьбы определяется формой сечения резьбы в осевой плоскости.

пежных резьб — цилиндрические, правые, однозаходные с треугольным профилем.

Основные геометрические параметры резьбы (рис. 3.17): d — наружный диаметр резьбы, который принимается за номинальный диаметр резьбы; d_1 — внутренний диаметр резьбы; d_2 — средний диаметр резьбы (диаметр воображаемого цилиндра, на поверхности которого ширина витка равна ширине впадины); h — рабочая высота профиля, по которой соприкасаются витки винта и гайки; H — высота теоретического профиля; p — шаг резьбы (расстояние между одноименными сторонами двух соседних витков, измеренное в осевом направлении); p_z — ход резьбы (расстояние между одноименными сторонами одного и того же витка, измеренное в осевом направлении). Ход резьбы равен относительному осевому перемещению винта или гайки за один оборот. В однозаходной резьбе $p_z = p$, в двухзаходной $p_z = 2p$ и т. д.; α — угол профиля резьбы; γ — угол подъема резьбы (см. рис. 3.14):

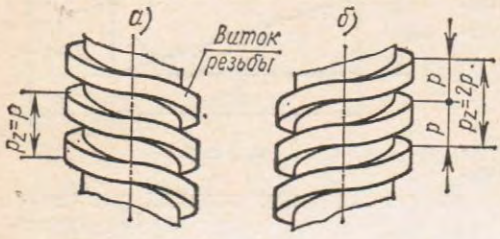


Рис. 3.16

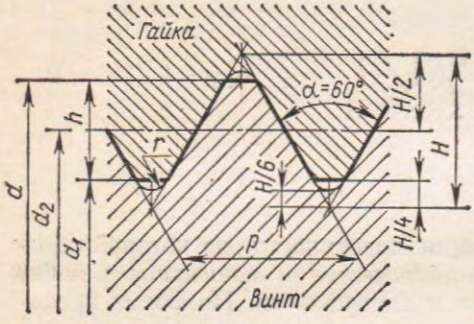


Рис. 3.17

$$\operatorname{tg}\gamma = p_z/(\pi d_2). \qquad (3.15)$$

Основные типы стандартных резьб общего назначения. *Метрическая резьба* (рис. 3.17) имеет треугольный профиль с углом $\alpha = 60°$. Особенностью резьбы является притупление впадин и выступов профиля, что уменьшает концентрацию напряжений и повреждения резьбы витка. По СТ СЭВ 182—75 резьба каждого диаметра выполняется с крупным (рис. 3.18, *а*) или мелким (рис. 3.18, *б*) шагом. Например, для $d = 16$ мм $p = 2$ мм (крупная) и 1,5; 1,0; 0,75; 0,5 мм (мелкая). Резьба с крупным шагом менее чувствительна к неточностям изготовления и износу. Ее применяют как основную крепежную резьбу. Резьба с мелкими шагами прочней и надежней от

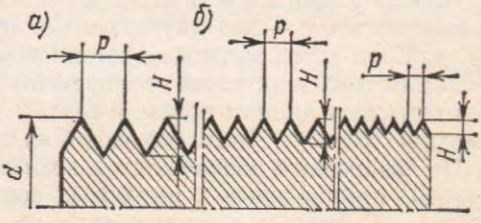


Рис. 3.18

ослабления затяжки. Ее применяют при переменных нагрузках, тонкостенных деталях и для регулировки.

Трапецеидальная резьба (ГОСТ 9484—73) (рис. 3.19, *а*) имеет профиль симметричной трапеции с углом $\alpha=30°$. Применяется для передачи реверсивного движения под нагрузкой (винтовые механизмы, ходовые винты в станках и т. п.). Имея повышенную прочность и технологичность, эта резьба в передачах винт — гайка почти полностью вытеснила прямоугольную.

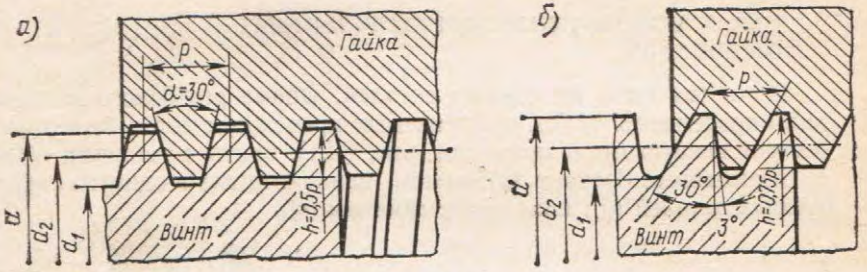


Рис. 3.19

Упорная резьба (ГОСТ 10177—62) (рис. 3.19, *б*) имеет профиль несимметричной трапеции. Угол наклона нерабочей стороны профиля 30°. Для возможности изготовления резьбы фрезерованием рабочая сторона профиля имеет угол наклона 3°. Применяется для передачи движения при больших нагрузках, направленных в одну сторону (грузовые винты домкратов, винтовых прессов, нажимных устройств и т. п.).

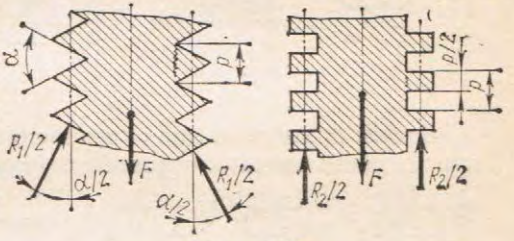


Рис. 3.20

Выше указывалось, что резьба с треугольным профилем является основной крепежной резьбой. Целесообразность этого очевидна из сравнения треугольной и прямоугольной резьбы. Осевая сила F (рис. 3.20) вызывает между витками резьбы винта и гайки нормальные к боковой поверхности профиля резьбы силы взаимодействия R_1 и R_2. Считая условно эти силы сосредоточенными, получим выражение для суммарной окружной силы трения в резьбе (без учета угла подъема):

для прямоугольной резьбы $R_{f2}=2(R_2/2)f=Ff$;

для треугольной резьбы $R_{f1}=2(R_1/2)f=Ff/\cos(\alpha/2)=Ff'$, где f — коэффициент трения; f' — приведенный коэффициент трения в резьбе:

$$f'=f/\cos(\alpha/2). \qquad (3.16)$$

Так как для треугольной резьбы $\alpha=60°$, а для трапецеидальной $\alpha=30°$, то трение в этих резьбах больше, чем в прямоугольной, соответственно на 15 и 4%. Кроме того, треугольная резьба прочней, так как поверхность среза соответствует шагу резьбы p по сравнению с $0{,}5\,p$ у прямоугольной резьбы. Поэтому треугольную резьбу применяют в качестве крепежной, а прямоугольную резьбу заменяют трапецеидальной, которую и используют в качестве ходовой.

§ 3.9. КОНСТРУКТИВНЫЕ ФОРМЫ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Основные типы крепежных деталей. Форма резьбового соединения определяется типом применяемых крепежных деталей, которые бывают следующих исполнений (рис. 3.21): винты с гайками, обычно называемые болтами (*а*); винты, ввинчиваемые в одну из скрепляемых деталей (*б*); шпильки с гайками (*в*).

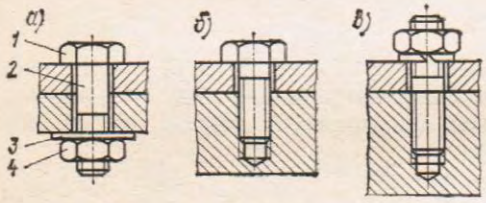


Рис. 3.21

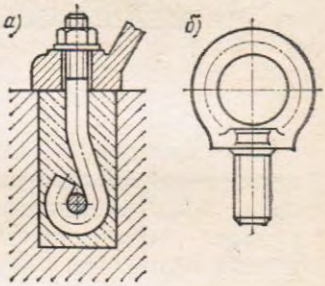


Рис. 3.22

Болты применяют для скрепления деталей небольшой толщины, при наличии места для расположения головки *1* болта и гайки *4* или когда необходимо часто разбирать и собирать соединение, а материал скрепляемых деталей не обеспечивает достаточной прочности резьбы. *Винты* применяют в случаях достаточной прочности материала детали с резьбой и достаточной ее толщины, отсутствия места для размещения гайки и при жестких требованиях к массе соединения. *Шпильки* применяют в тех же случаях, что и винты, но когда материал детали не обеспечивает достаточной прочности резьбы, при требуемых частых разборках и сборках соединения.

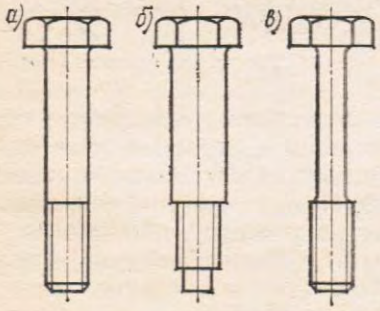


Рис. 3.23

Стандартные крепежные детали. Различают резьбовые крепежные детали *общего назначения*, имеющие широкое распростране-

ние, и *специального назначения* (рис. 3.22), имеющие ограниченное применение, например фундаментные болты (*а*), рым-болты (*б*). Болты общего назначения по точности изготовления делятся на болты нормальной и повышенной точности, последние применяют в особо ответственных соединениях. Болты изготовляют для поста-

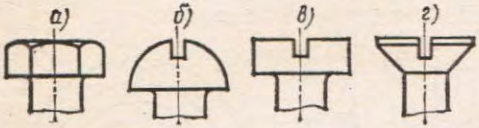


Рис. 3.24

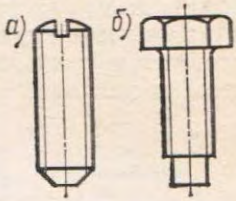


Рис. 3.25

новки в отверстие с зазором (рис. 3.23, *а*) и без зазора в отверстие из-под разветки (рис. 3.23, *б*). Последние применяют при больших поперечных нагрузках в целях уменьшения габаритов и повышения надежности соединения. При действии переменных нагрузок применяют болты с уменьшенным диаметром ненарезаемой части стержня (рис. 3.23, *в*), что увеличивает податливость болта (см. § 3.13).

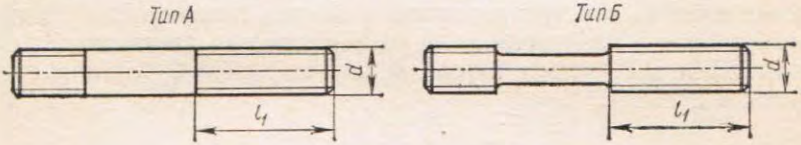


Рис. 3.26

Винты резьбовых соединений общего назначения бывают *крепежные* (см. рис. 3.21, *б*) и *установочные*. В зависимости от размеров и назначения головки болтов и крепежных винтов (рис. 3.24) весьма разнообразны: шестигранные (*а*), полукруглые (*б*), цилиндрические (*в*), потайные (*г*) и др. Наиболее распространены в машиностроении болты и винты с шестигранной головкой под ключ, как более надежные и удобные в эксплуатации (допускают большую силу затяжки и требуют поворота ключа на $^1/_6$ оборота до перехвата). Винты с головкой под отвертку позволяют уменьшить размеры фланца, улучшить внешний вид изделия, но отверткой нельзя обеспечить хорошую затяжку. Поэтому их применяют для малонагруженных соединений. Установочные (стопорные) винты применяют для предотвращения относительного сдвига соединяемых деталей. Установочный винт без головки со шлицем под отвертку показан на рис. 3.25, *а*, а с шестигранной головкой под ключ — на рис. 3.25, *б*. Имеется и много других типов этих винтов. В отличие от крепежных установочные винты имеют резьбу по всей длине.

Шпильки наиболее распространенных типов показаны на рис. 3.26. Шпильки типа *А* удобны при изготовлении резьбы реза-

нием, типа *Б* — при накатке резьбы. Диаметр резьбы на обоих концах шпильки обычно одинаков. При динамических нагрузках прочность шпилек выше, чем болтов того же диаметра.

Гайки (рис. 3.27) в зависимости от формы бывают шестигранные с одной или двумя фасками (*а*), шестигранные прорезные (*б*), шестигранные корончатые (*в*), круглые гайки (*г*) и др. Наиболее распространены шестигранные гайки, которые, аналогично болтам, изготовляют нормальной и повышенной точности, круглые гайки применяют для крепления различных деталей на валах.

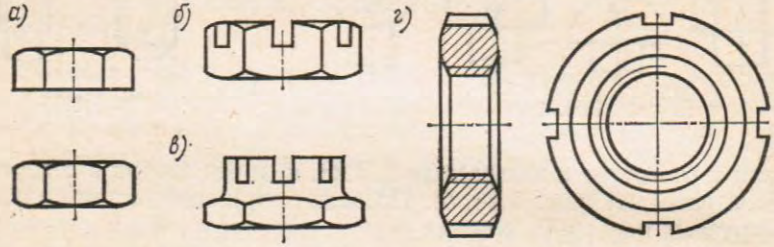


Рис. 3.27

Шайбы подкладные (*3*, рис. 3.21, *а*) ставят под гайку *4* или головку *1* болта для предупреждения смятия поверхностей соединяемых деталей, предупреждения от царапин при завинчивании гаек (винтов) и перекрытия зазора между стержнем *2* болта и отверстием в деталях.

§ 3.10. НАДЕЖНОСТЬ РЕЗЬБОВОГО СОЕДИНЕНИЯ

Надежность резьбового соединения оценивается легкостью сборки, т. е. легкостью затяжки гайки или болта, и сохранностью затяжки, т. е. самоторможением винтовой пары. Рассмотрим, как выполняются эти условия.

Легкость сборки. При завинчивании гайки надо преодолеть момент сопротивления затяжки $M_з = M_1 + M_2$, где M_1 — момент трения в резьбе, M_2 — момент сил трения на опорном торце гайки. Для определения моментов M_1 и M_2 необходимо установить зависимость между силами, возникающими в винтовой паре при завинчивании гайки. В этом случае гайка нагружена осевой силой F и, равномерно вращаясь под действием окружающей силы F_t, перемещается вверх (рис. 3.28, *а*). При этом допускают, что действие сил в винтовой паре может быть сведено к действию сил на ползун, находящийся на наклонной плоскости, и что давление гайки на винт приложено по средней линии резьбы.

Развернем среднюю винтовую линию резьбы на плоскость, а гайку представим в виде ползуна (рис. 3.28, *б*). При подъеме ползуна по наклонной плоскости (это соответствует завинчиванию гайки) возникает сила трения $R_f = fR_n$, где R_n — нормальная реакция наклонной плоскости. Под влиянием силы трения направ-

ление реакции R_n отклоняется от нормали к наклонной плоскости на угол трения φ (см. § 1.19). Тогда из схемы сил, действующих на ползун, следует

$$F_t = F \operatorname{tg}(\gamma + \varphi). \qquad (3.17)$$

Формула справедлива для прямоугольной резьбы, когда $f = \operatorname{tg}\varphi$. Если профиль резьбы треугольный, то [см. формулу (3.16)] необходимо учитывать приведенный коэффициент трения f' ($f' = \operatorname{tg}\varphi'$) и в формулу (3.17) подставлять приведенный угол трения $\varphi' = \operatorname{arctg} f' = \operatorname{arctg}[f/\cos(\alpha/2)]$, тогда

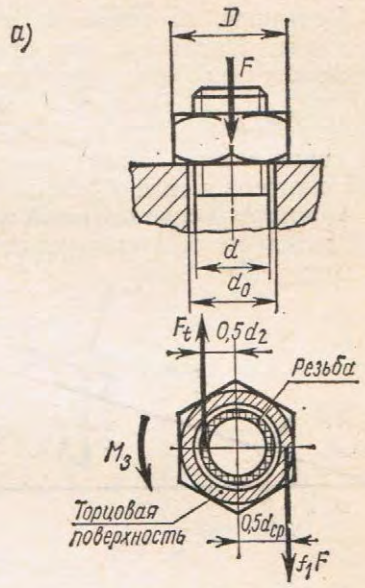
$$F_t = F \operatorname{tg}(\gamma + \varphi'). \qquad (3.18)$$

Полагая далее, что сила F_t сосредоточена и приложена к среднему радиусу резьбы $0{,}5d_2$ (рис. 3.29, *а*), имеем

$$M_1 = F_t \cdot 0{,}5d_2 = F \operatorname{tg}(\gamma + \varphi')\, 0{,}5d_2. \qquad (3.19)$$

Силу трения на торце гайки f_1F, зависящую от коэффициента трения f_1, считают сосредоточенной и приложенной к среднему радиусу $r_{ср}$ опорной поверхности $r_{ср} = 0{,}5\, d_{ср}$, тогда

$$M_2 = f_1 F \cdot 0{,}5 d_{ср}, \qquad (3.20)$$



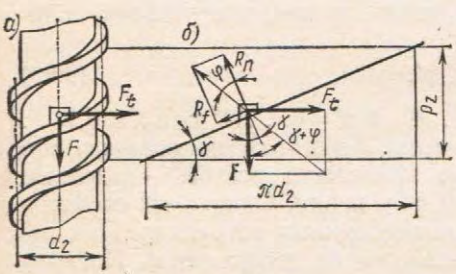


Рис. 3.28

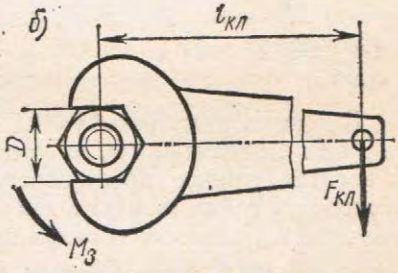


Рис. 3.29

а

$$M_3 = M_1 + M_2 = 0{,}5Fd_2[\operatorname{tg}(\gamma + \varphi') + f_1 d_{ср}/d_2], \qquad (3.21)$$

где $d_{ср} = 0{,}5(D + d_0)$; D — наружный диаметр опорной поверхности гайки, принимаемый равным ее размеру под ключ; d_0 — внутренний диаметр опорной поверхности, равный диаметру сверления под болт, обычно $d_0 = d + 1 \ldots 1{,}5$ мм.

Момент сопротивления затяжки $M_з$ преодолевается моментом силы, приложенной к гаечному ключу (рис. 3.29, *б*).

Приравнивая оба момента, имеем

$$F_{кл} l_{кл} = 0{,}5 F d_2 [\operatorname{tg}(\gamma + \varphi') + f_1 d_{ср}/d_2],$$

откуда

$$\frac{F}{F_{кл}} = \frac{2l_{кл}}{d_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(\gamma + \varphi') + f_1 d_{ср}/d_2}. \qquad (3.22)$$

Величины, входящие в формулу (3.22), имеют определенные значения. Например, при стандартном ключе $l_{кл} = 15d$; для метрических резьб можно принять: $\gamma = 2{,}5°$, $d_2 \approx 0{,}9\,d$; $d_{ср} \approx 1{,}4d$; $f \approx f_1 \approx f' \approx 0{,}1 \ldots 0{,}2$. Поэтому из анализа формулы (3.22) следует, что обычно $F \approx (60 \ldots 100)\, F_{кл}$. Таким образом, сила в 1 Н, приложенная на конце ключа, создает силу прижатия деталей 60...100 Н. Такой выигрыш в силе обеспечивает легкость сборки соединения.

Самоторможение винтовой пары. Опусканию ползуна по наклонной плоскости соответствует отвинчивание гайки (рис. 3.30). В этом случае окружная сила F_t отсутствует, а сила трения R_f меняет направление. Ползун под действием силы F_1 собственного веса не будет опускаться по плоскости, которую в этом случае называют самотормозящей, пока сила $F_1 \sin\gamma$ не превзойдет силу трения $R_f = f' R_n = f' F_1 \cos\gamma$. Тогда условие самоторможения будет $F_1 \sin\gamma < f' F_1 \cos\gamma$ или $\operatorname{tg}\gamma < f'$. Заменив $f' = \operatorname{tg}\varphi'$, окончательно получим условие самоторможения

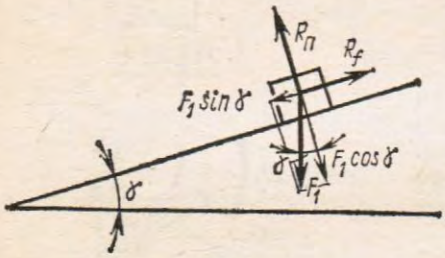


Рис. 3.30

$$\gamma < \varphi'. \qquad (3.23)$$

Для крепежных резьб $\gamma = 1{,}5 \ldots 4°$, а $\varphi' = 6 \ldots 11°$ при $f' \approx 0{,}1 \ldots 0{,}2$. Таким образом, *все крепежные резьбы самотормозящие*. Это объясняет важное преимущество крепежной резьбы — надежное стопорение гайки (винта) в любом положении. Однако это свойство проявляется главным образом при постоянных нагрузках. При переменных нагрузках оно, как правило, не соблюдается. Поэтому необходимо стопорение резьбовых соединений (см. § 3.11).

К. п. д. винтовой пары η. К. п. д. определяют как отношение полезной работы $W_п$ на винте к затраченной работе $W_з$ на ключе. За один оборот винта, что соответствует его подъему на высоту, равную ходу резьбы p_z (см. рис. 3.28, *б*), работа $W_п = F p_z = F \pi d_2 \operatorname{tg}\gamma$, а работа $W_з$ (без учета трения на торце гайки) равна произведению момента трения в резьбе M_1 на угол поворота в радианах, т. е. $W_з = M_1 2\pi = 0{,}5\, F d_2 \operatorname{tg}(\gamma + \varphi')\, 2\pi$, тогда

$$\eta = W_п / W_з = \operatorname{tg}\gamma / \operatorname{tg}(\gamma + \varphi'). \qquad (3.24)$$

Из анализа формулы (3.24) следует, что значения к. п. д. зависят от соотношения углов γ и φ'. Для самотормозящей винтовой пары при $\gamma<\varphi'$ к. п. д. меньше 0,5. Так, при $\gamma=2{,}5°$ и $\varphi'=6°$ ($f'\approx$ $\approx 0{,}1$) имеем $\eta\approx 0{,}3$. Для повышения к. п. д. применяют многозаходные резьбы (увеличивают γ), а также антифрикционные материалы и смазку (уменьшают f').

§ 3.11. СТОПОРЕНИЕ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Выше указывалось, что все крепежные резьбы удовлетворяют условию самоторможения. Но самоторможение надежно реализуется только при постоянной нагрузке. При действии переменных (вибрационных и ударных) нагрузок резко снижается коэффициент трения в резьбе, условие самоторможения нарушается и наблюдается самоотвинчивание гаек и винтов, которое может привести к раз-

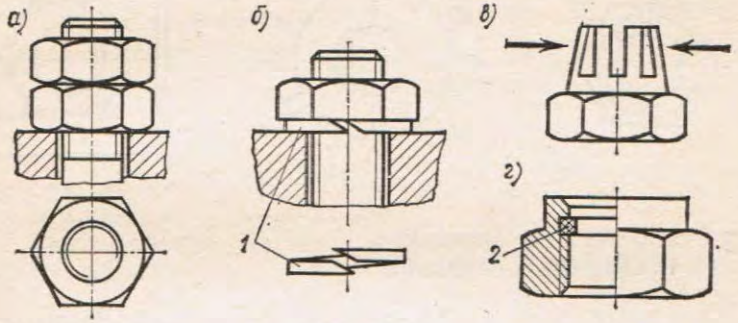


Рис. 3.31

рушению резьбового соединения и даже вызвать аварию. Для предупреждения самоотвинчивания используют стопорные устройства, которые основаны на следующих основных принципах.

1. *Стопорение дополнительным трением в резьбе* (рис. 3.31) с помощью контргаек, пружинных шайб, самотормозящих гаек и т. п. При стопорении контргайкой (*а*) дополнительное трение в резьбе возникает от действия упругих сил растянутого участка болта между гайками. Пружинные шайбы *1* (*б*) создают дополнительное трение вследствие упругости шайбы и повышают сцепление гайки с деталью ввиду того, что острые края шайбы врезаются в деталь и гайку навстречу отвинчиванию. Самотормозящие гайки повышают трение в резьбе: обжатием верхней прорезной наружной части «короны» (*в*); упругой деформацией нейлонового кольца *2* (*г*) и др. Применение этих гаек уменьшает число случаев самоотвинчивания в 6. . .8 раз, в то время как использование гайки с пружинной шайбой дает лишь двукратное уменьшение числа случаев самоотвинчивания.

2. *Стопорение специальными деталями* (рис. 3.32), например фиксация болта относительно гайки: с помощью шплинта *1* (*а*),

стопорной шайбы (*б*) и др.; фиксация гайки относительно детали с помощью специальной шайбы (*в*) и др.

3. *Стопорение созданием местных пластических деформаций* (рис. 3.33), например кернением гаек или головок винтов. Применяют, когда соединение не требует разборки.

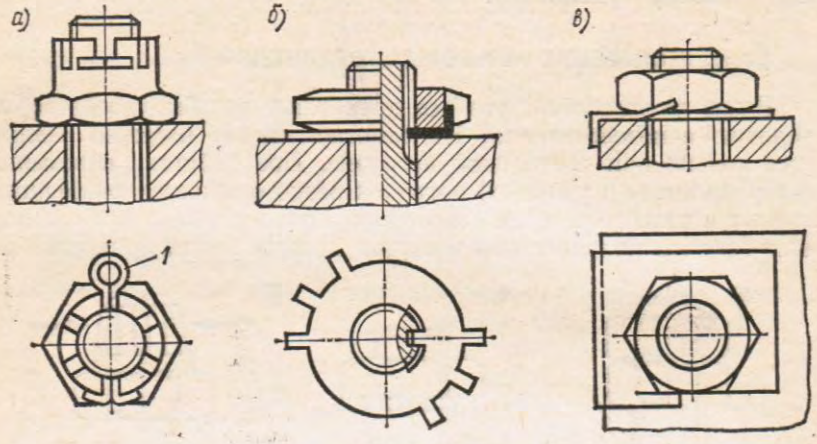


Рис. 3.32

§ 3.12. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПОСТОЯННОЙ НАГРУЗКЕ

Виды разрушения резьбовых крепежных деталей: разрыв стержня по резьбе или переходному сечению у головки; повреждение или разрушение резьбы (смятие и износ, срез, изгиб); разрушение головки и др. Так как размеры стандартных болтов, винтов и шпилек отвечают условию равнопрочности по критериям, соответствующим указанным разрушениям, то обычно их расчет ограничивается расчетом по одному основному критерию работоспособности — *прочности нарезанной части стержня*. При этом определяют расчетный диаметр резьбы:

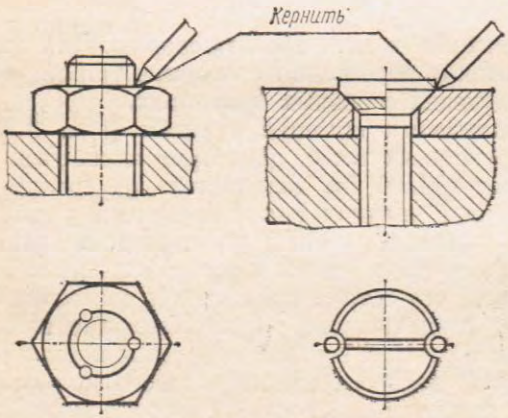


Рис. 3.33

$$d_p \approx d - 0{,}94p, \qquad (3.25)$$

где d и p — наружный диаметр и шаг резьбы.

Длину болта, винта и шпильки выбирают в зависимости от толщины соединяемых деталей. Остальные размеры деталей резьбового соединения (гайки, шайбы и др.) принимают, исходя из диаметра резьбы по стандарту.

Стандартная высота гайки исключает необходимость расчета на прочность ее резьбы. Однако следует считаться с неравномерным распределением осевой силы F по виткам резьбы гайки. Сила F, растягивающая болт и сжимающая гайку (рис. 3.34, *а*), вызывает различные деформации витков резьбы: наибольшие — в нижней

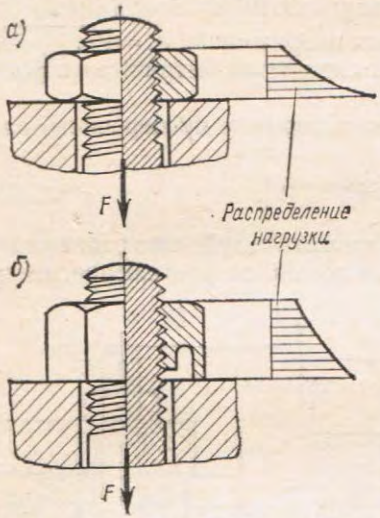


Рис. 3.34

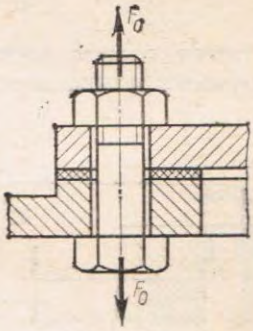


Рис. 3.35

части гайки и наименьшие — в верхней части. Соответственно деформациям перераспределяются и силы, приходящиеся на каждый из витков. Задача о распределении нагрузки по виткам резьбы гайки была решена проф. Н. Е. Жуковским в 1902 г. и в дальнейшем подтверждена экспериментальными исследованиями. Для гайки из 10 витков на первый виток резьбы приходится 0,34 F, на второй — 0,23 F, на десятый — 0,01 F. По этой причине число витков в гайке не должно превышать 10, так как 11-й виток совсем не нагружается. В ответственных соединениях для более равномерного распределения нагрузки между витками резьбы гайки меняют ее форму, увеличивая податливость вблизи первых витков. Хорошие результаты для гайки, испытывающей сжатие, дает форма, изображенная на рис. 3.34, *б*.

Болт является составной частью соединения, которое может быть нагружено осевой или поперечной силой.

Болтовое соединение нагружено осевой силой. *Затянутый болт без внешней осевой нагрузки* — это болты для крепления герметичных крышек и люков корпусов машин (рис. 3.35) и др. Стержень болта испытывает совместное действие растяжения и кручения, т. е.

растягивается осевой силой F_0 от затяжки болта и скручивается моментом, равным моменту трения в резьбе M_1 [см. формулу (3.19)], где F равна F_0.

Нормальное напряжение от осевой силы

$$\sigma = 4F_0/(\pi d_p^2). \tag{3.26}$$

Касательные напряжения, вызванные моментом M_1,

$$\tau = M_1/W_p = M_1/(0{,}2d_p^3). \tag{3.27}$$

Прочность болта определяют по эквивалентному напряжению $\sigma_э$. По гипотезе наибольших касательных напряжений, $\sigma_э = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$. Вычисления показывают, что для стандартных метрических резьб $\sigma_э \approx 1{,}3\sigma$.

С учетом выражения (3.26) получим формулу проверочного расчета

$$\sigma_э = 1{,}3 \cdot 4F_0/(\pi d_p^2) \leqslant [\sigma]. \tag{3.28}$$

Таким образом, расчет болта на совместное действие растяжения и кручения можно заменить расчетом только на растяжение, но по

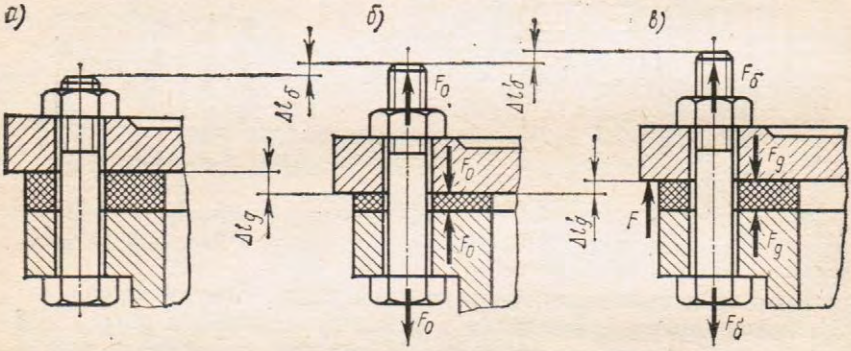


Рис. 3.36

увеличенной в 1,3 раза силе F_0. Из выражения (3.28) получим формулу проектировочного расчета

$$d_p \geqslant 1{,}3\sqrt{F_0/[\sigma]}. \tag{3.29}$$

Далее по таблицам ГОСТа принимают диаметр d болта и шаг p резьбы. Требуемое значение осевой силы F_0 выбирают по условиям герметичности и отсутствия смятия деталей в стыке.

Затянутый болт с дополнительной осевой нагрузкой — это болты для крепления крышек резервуаров, нагруженных давлением жидкости или газа и др. Затяжка болтов должна обеспечить герметичность соединения или нераскрытие стыка (не допустить появления зазора) под нагрузкой. Эта задача решается с учетом деформаций деталей соединения.

На рис. 3.36, *а* показано соединение без затяжки болта (исходное положение). Дадим соединению предварительную затяжку силой F_0 (рис. 3.36, *б*). Тогда в результате упругой деформации соединения болт растягивается на величину $\Delta l_б$, а детали сжимаются на $\Delta l_д$. Представим результаты предварительной затяжки с помощью упругих деформаций растяжения болта и сжатия деталей (рис.3.37,*а*).

Когда появится внешняя растягивающая нагрузка F (рис. 3.36,*в*), болт дополнительно удлинится на $\Delta l'_б$, а сжатие деталей уменьшится на $\Delta l'_д$. При этом только часть силы F, равная χF (рис. 3.37, *б*), дополнительно растягивает болт на величину $\Delta l'_б$, а остальная

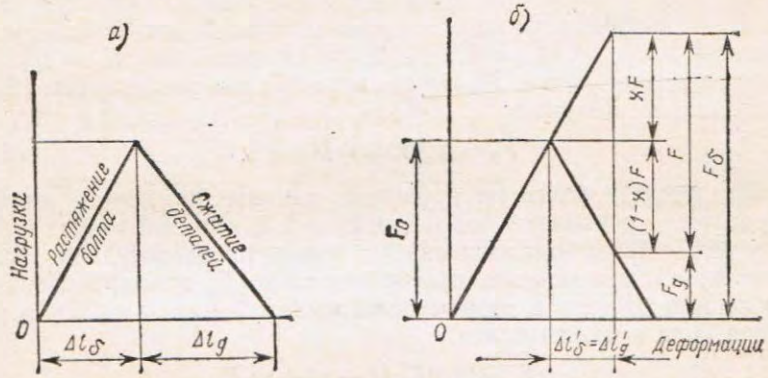


Рис. 3.37

часть силы F, равная $(1-\chi)F$, уменьшает прижатие деталей на $\Delta l'_д$. Теперь болт растягивается силой $F_б$, а детали сжимаются силой $F_д$.

Сила $F_б$ — суммарная нагрузка на затянутый болт:

$$F_б = F_0 + \chi F; \tag{3.30}$$

сила $F_д$ — остаточная сила затяжки:

$$F_д = F_0 - (1-\chi)F, \tag{3.31}$$

где χ — коэффициент внешней нагрузки, показывающий, какая часть внешней нагрузки F воспринимается болтом, χ учитывает податливость болта и соединяемых деталей. Значение χ определяется по условию равенства дополнительных деформаций болта и деталей ($\Delta l'_б = \Delta l'_д$) *. В большинстве случаев точный расчет коэффициента χ сложен, а опыт расчетов и испытания конструкций показывает, что значение его невелико. При приближенных расчетах принимают: для соединений стальных и чугунных деталей без упругих прокладок $\chi = 0{,}2 \ldots 0{,}3$; для соединений тех же деталей, но с упругими прокладками (резина, асбест и др.) $\chi = 0{,}4 \ldots 0{,}5$.

* Вывод зависимости для определения χ см. [9, 18].

Минимальную силу предварительной затяжки болта $F_{0\,min}$, обеспечивающую нераскрытие стыка деталей, определяют по предельному случаю, когда остаточная сила затяжки $F_д=0$ по формуле (3.31)

$$0=F_{0\,min}-(1-\chi)F \text{ или } F_{0\,min}=(1-\chi)F.$$

Практически предварительная затяжка болта F_0 должна быть больше $F_{0\,min}$. Из условия сохранения плотности стыка соединяемых деталей (невозможности образования зазора) принимают

$$F_0=K_з(1-\chi)F, \qquad (3.32)$$

где $K_з$ — коэффициент запаса предварительной затяжки; при постоянной нагрузке $K_з=1{,}25\ldots2$; при переменной $K_з=2{,}5\ldots4$. Заменив в выражении (3.30) значение F_0 по зависимости (3.32), окончательно получим

$$F_б=K_з(1-\chi)F+\chi F. \qquad (3.33)$$

При расчете болта на прочность влияние крутящего момента при затяжке учитывают коэффициентом 1,3, который вводят в формулу (3.33). Если болт затягивается только предварительно, то значение крутящего момента пропорционально F_0 и коэффициент 1,3 необходимо отнести к первому слагаемому формулы (3.33), а расчетная сила затяжки болта

$$F_р=[1{,}3K_з(1-\chi)+\chi]F.$$

Прочность болта оценивают по эквивалентному напряжению. Расчетные формулы:

$$\sigma_э=4F_р/(\pi d_р^2)\leqslant[\sigma];\ \ d_р\geqslant1{,}13\sqrt{F_р/[\sigma]}. \qquad (3.34)$$

Если болт под нагрузкой затягивается дополнительно, то значение крутящего момента пропорционально $F_б$, т. е. коэффициент 1,3 относят к суммарной нагрузке на затянутый болт.

Расчетные формулы: $F_р=1{,}3\,[K_з(1-\chi)+\chi]F$;

$$\sigma_э=1{,}3\cdot4F_б/(\pi d_р^2)\leqslant[\sigma];\ \ d_р\geqslant1{,}3\sqrt{F_б/[\sigma]}. \qquad (3.35)$$

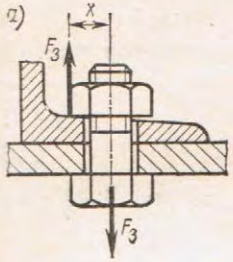
Эксцентрично нагруженный болт возникает из-за непараллельности опорных поверхностей детали и гайки или головки болта, например вследствие уклона полки швеллера, погрешностей изготовления деталей, болтов, гаек, наличия заусенцев на торцах гайки от ключа и т. д. Во всех этих случаях кроме напряжения растяжения в стержне болта возникают напряжения изгиба. Пусть опорные поверхности гайки и детали не параллельны (рис. 3.38, *а*). В этом случае в стержне болта возникают нормальные напряжения от силы затяжки $F_з$

$$\sigma=4F_з/(\pi d_р^2)$$

и от изгибающего момента $M_и=F_з x$

$$\sigma_и=F_з x/W_{oc}=F_з x/(0{,}1d_р^3).$$

Чтобы оценить влияние изгиба, найдем, при каком плече x нормальные напряжения от изгиба достигают напряжений от растяжения. Приравнивая эти выражения, найдем, что $x \approx 0{,}13\, d_p$. Поэтому даже небольшой эксцентриситет вызывает значительное уменьшение прочности болта. Следовательно, при конструировании, изготовлении и эксплуатации резьбового соединения необходимо принимать меры, устраняющие эксцентричное нагружение. Например, черновые поверхности деталей под гайками и головками болтов цекуют, приливы (бобышки) фрезеруют и др. Если одна из соединяемых деталей имеет наклонную поверхность (рис. 3.38, *б*), то под гайку подкладывают косую шайбу.



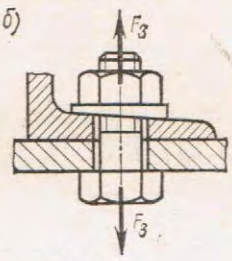


Рис. 3.38

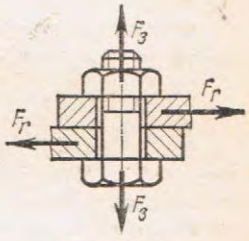


Рис. 3.39

Болтовое соединение нагружено поперечной силой. *Болт поставлен с зазором* (рис. 3.39); предварительная затяжка болта обязательна. Она должна обеспечить прижатие деталей соединения силой $F_з$, достаточной для создания силы трения $fF_з$ между ними, исключающей сдвиг деталей. Внешняя сила F_r непосредственно на болт не передается, поэтому его рассчитывают по силе затяжки $F_з$.

Необходимую силу $F_з$ определяют из условия $fF_з = F_r$, откуда $F_з = F_r/f$, или

$$F_з = KF_r/(ifz), \tag{3.36}$$

где $K = 1{,}2 \ldots 1{,}5$ — коэффициент запаса по сдвигу деталей; $i = 1 \ldots 2$ — число стыков (на рис. 3.39 $i = 1$); $f = 0{,}15 \ldots 0{,}20$ — коэффициент трения для чугунных и стальных деталей; z — число болтов.

При затяжке болт работает на растяжение и кручение. Его прочность оценивается эквивалентным напряжением [см. формулу (3.28)]. Расчетные формулы:

$$\sigma_э = 1{,}3 \cdot 4KF_r/(\pi d_p^2 ifz) \leqslant [\sigma];$$
$$d_p \geqslant 1{,}3\sqrt{KF_r/(ifz\,[\sigma])}. \tag{3.37}$$

В случае сдвига деталей болт стал бы испытывать изгиб (рис. 3.40), что недопустимо. Поэтому для разгрузки болта от поперечной силы, а следовательно уменьшения диаметра болта, применяют различные устройства (рис. 3.41).

Болт поставлен без зазора (рис. 3.42), затяжка болта не требуется. Болт испытывает срез и смятие. Диаметр стержня болта d_c больше диаметра нарезаемой части на 1. . .1,5 мм, это предохраняет резьбу от смятия.

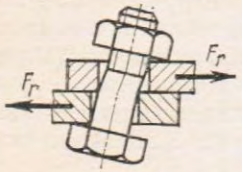


Рис. 3.40

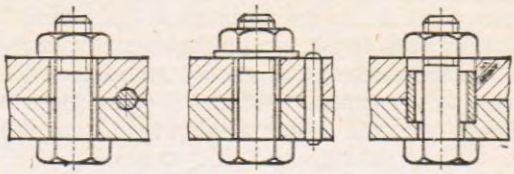


Рис. 3.41

Формулы проверочного и проектировочного расчетов болта на срез:

$$\tau_{ср} = 4F_r/(\pi d_c^2 iz) \leqslant [\tau_{ср}];$$
$$d_c \geqslant 1{,}13\sqrt{F_r/(iz[\tau_{ср}])}, \qquad (3.38)$$

где i=1. . .2 — число плоскостей среза болта (на рис. 3.42 i=1); z — число болтов.

Формула проверочного расчета на смятие

$$\sigma_{см} = F_r/(d_c\delta) \leqslant [\sigma_{см}], \qquad (3.39)$$

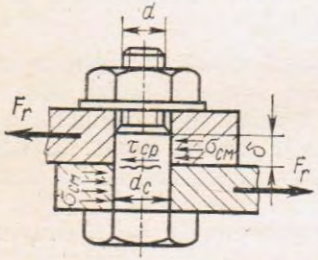


Рис. 3.42

где δ — наименьшая толщина соединяемых деталей, передающих нагрузку в одну сторону.

Сравнивая нагрузочную способность болтов, следует отметить, что 10 болтов, поставленных с зазором, при коэффициенте трения f=0,17 можно заменить одним болтом того же диаметра, поставленным без зазора. Однако резьбовые соединения болтами, поставленными без зазора, значительно дороже из-за сложности технологии изготовления.

§ 3.13. РАСЧЕТ ОДИНОЧНОГО БОЛТА ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКЕ

Болт устанавливают с высокой предварительной затяжкой силой F_0 (рис. 3.43). Кручение болта при затяжке не учитывают. Переменная внешняя нагрузка на болт F изменяется по отнулевому циклу. При изменении нагрузки F от нуля до максимума распределение ее между болтом и стыком соединения происходит так, что на болт приходится только часть нагрузки, равная χF, которая также изменяется от нуля до максимума. Суммарная нагрузка, действующая на болт, $F_б = F_0 + \chi F$. При высокой предварительной затяжке принимают $F_0 = K_з F$.

В стержне болта возникают переменные напряжения с амплитудой σ_a и средним значением σ_m:

$$\sigma_a = 4 \cdot 0{,}5\chi F/(\pi d_р^2); \; \sigma_m = 4\,(K_з F + 0{,}5\chi F)/(\pi d_р^2).$$

Максимальное напряжение цикла

$$\sigma_{max} = \sigma_a + \sigma_m.$$

Расчет болтов производится как проверочный на усталость и статическую прочность. Расчет на усталость заключается в определении коэффициента запаса прочности по амплитуде цикла. Условие прочности

$$s_a = \sigma_{-1p}/(K_\sigma \sigma_a) \geqslant [s_a],$$

где $\sigma_{-1p} = 0{,}35\sigma_в$ — предел выносливости при симметричном цикле растяжения; K_σ — эффективный коэффициент концентрации напряжений. Для болтов из углеродистой стали с метрической резьбой применяют $K_\sigma \approx 3{,}5...4{,}5$ (большие

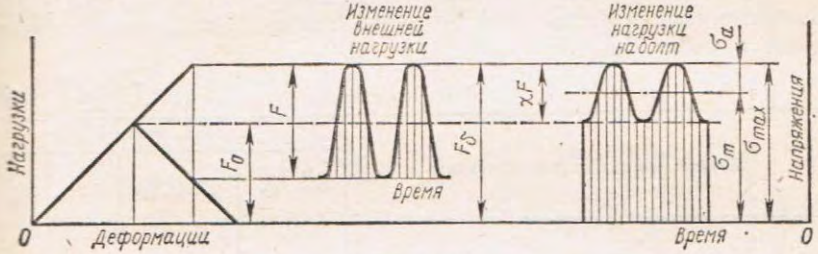


Рис. 3.43

значения относятся к болтам диаметром $d \geqslant 20$ мм); $[s_a] = 2{,}5...4$ — допускаемый коэффициент запаса прочности по амплитуде.

Расчет болтов на статическую прочность заключается в определении коэффициента запаса прочности по максимальному напряжению. Условие прочности

$$s = \sigma_т/\sigma_{max} \geqslant [s],$$

где $[s] = 1{,}25...2{,}5$ — допускаемый коэффициент запаса прочности по максимальному напряжению.

Одним из способов повышения прочности болтового соединения при переменных нагрузках является применение болтов с высокой упругой податливостью, а следовательно, и динамической прочностью. С этой целью диаметр стержня болта иногда уменьшают до $0{,}8d_1$ (см. рис. 3.23, *в*).

§ 3.14. МАТЕРИАЛЫ И ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Материалы. Стандартные крепежные детали общего назначения изготовляют из углеродистых сталей Ст3, 10, 20, 35, 45 и др. Эти стали в условиях массового производства позволяют изготовлять резьбовые детали методом холодной высадки с последующей накаткой резьбы. Легированные стали 35Х, 38ХА и другие применяют для высоконагруженных деталей при переменных и ударных нагрузках. Стальные болты, винты и шпильки изготовляют 12 классов прочности: 3.6, 4.6, 4.8, 5.6, 5.8, 6.6, 6.8, 6.9, 8.8, 10.9, 12.9, 14.9 (ГОСТ 1759—70). Первое число в обозначении класса прочности, умноженное на 100, определяет минимальное значение $\sigma_в$ в МПа, а произведение двух чисел, умноженное на 10, определяет $\sigma_т$ в МПа (для класса прочности 3.6 приблизительно). Например, классу прочности 6.8 соответствует $\sigma_в = 600$ МПа и $\sigma_т = 480$ МПа.

Гайки изготовляют из тех же сталей или несколько менее прочных. При выборе класса прочности для резьбовых деталей учиты-

вают величину и характер нагрузки (статическая или переменная), условия работы (температура, агрессивность среды и др.), способ изготовления и др.

Допускаемые напряжения. *Допускаемые напряжения на растяжение* болта определяют по формуле

$$[\sigma]=\sigma_т/[s], \qquad (3.40)$$

где $[s]$ — допускаемый коэффициент запаса прочности. Коэффициент $[s]$ зависит от характера нагрузки, материала и диаметра болта и от того, контролируется или не контролируется затяжка болта. Значения $[s]$ при постоянной нагрузке и неконтролируемой затяжке даны в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Классы прочности (марки стали)	Диаметр болта d, мм		
	6...16	16...30	30...60
3.6...6.6 (Ст3; 10; 20; 30; 35; 45; 40Г)	5...4	4...2,5	2,5...1,7
6.8...14.9 (35Х; 38ХА; 40Г2; 40Х; 30ХГСА; 40ХНМА)	6,5...5	5...3,3	3,3...3

При неконтролируемой затяжке допускаемые напряжения зависят от диаметров болтов, что вызывает затруднения при проектировочном расчете, так как еще не известно значение этих диаметров. Поэтому расчет ведут методом последовательных приближений, сущность которого в следующем. В начале расчета задаются диаметром болта d и по табл. 3.3 принимают коэффициент запаса $[s]$. Если в результате расчета получится d, который выходит за пределы принятого интервала диаметров, то задаются другими d и $[s]$ и повторяют расчет.

При контролируемой затяжке коэффициент $[s]$ не зависит от диаметра болта. Для любого болта из углеродистой стали при постоянной нагрузке $[s]\approx 1,6$. Затяжку в основном контролируют специальными динамометрическими ключами, которые не позволяют приложить к гайке момент больше установленной величины.

Допускаемые напряжения: на срез стержня болта при постоянной нагрузке $[\tau_{ср}]=0,4\,\sigma_т$; *на смятие* — для стали $[\sigma_{см}]=(0,8...1,0)\sigma_т$, для чугуна $[\sigma_{см}]=0,8\,\sigma_{вр}$.

Глава 4

ШПОНОЧНЫЕ И ШЛИЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Шпоночные и шлицевые соединения служат для передачи вращающего момента от вала к установленным на нем деталям (зубчатым колесам, шкивам, муфтам и т. д.) или наоборот.

§ 3.15. ШПОНОЧНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Шпоночные соединения осуществляются с помощью призматических деталей — шпонок, которые устанавливаются в пазах вала и ступицы детали. Шпоночные пазы на валах получают фрезерованием, а в ступицах — протягиванием.

Достоинства: простота разборки и сборки; надежность в эксплуатации; компактность и простота конструкции. *Недостатки:* ослабление вала и ступицы шпоночными пазами; наличие концентрации напряжений в зоне шпоночных пазов, что ограничивает нагруженность соединения; необходимость удлинения ступиц колес для

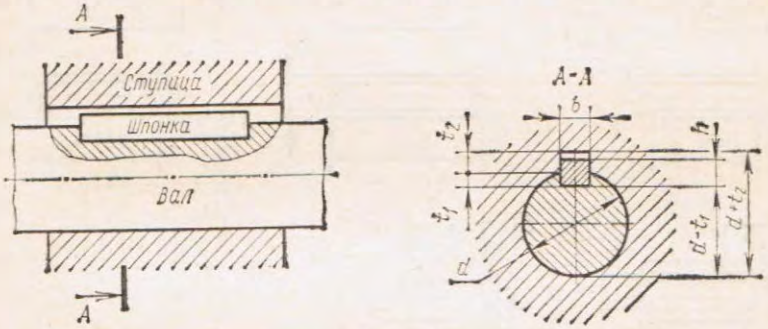


Рис. 3.44

передачи больших моментов; высокие требования к точности выполнения шпоночных пазов; необходимость в дополнительных деталях для осевой фиксации зубчатых колес, шкивов и т. п.

Шпоночные соединения применяют при малых нагрузках, возможности размещения длинных ступиц, необходимости легкой сборки и разборки. По мере роста нагрузок применение шпонок сокращается.

Основные типы шпоночных соединений. Шпоночные соединения делятся на две группы: ненапряженные и напряженные. *Ненапряженные соединения* осуществляются призматическими и сегментными шпонками, которые не вызывают деформацию ступицы и вала при сборке. *Напряженные соединения* осуществляются клиновыми шпонками, которые вызывают деформацию вала и ступицы при сборке.

Соединения призматическими шпонками (рис. 3.44) имеют наибольшее распространение. Стандартизованы обыкновенные и высокие призматические шпонки. Последние обладают повышенной несущей способностью, их применяют, когда закрепляемые детали (ступицы) имеют малую длину. Момент передается узкими боковыми гранями шпонок. По форме торцов различают шпонки трех исполнений: *A*, *B* и *C* (рис. 3.45). Шпонки с закругленными торцами (исполнение *A*) обычно размещают на валу в пазах, обработанных пальцевой фрезой (рис. 3.45, *а*); плоские торцы шпонок (исполнение *B* и *C*) помещают вблизи деталей (концевые шайбы, кольца и т. д.), препятствующих осевому перемещению шпонок (рис. 3.45, *б*).

Пазы обрабатывают дисковой фрезой, что технологичней и дает меньшую концентрацию напряжений у вала.

Призматические направляющие шпонки с креплением на валу используют в подвижных в осевом направлении соединениях

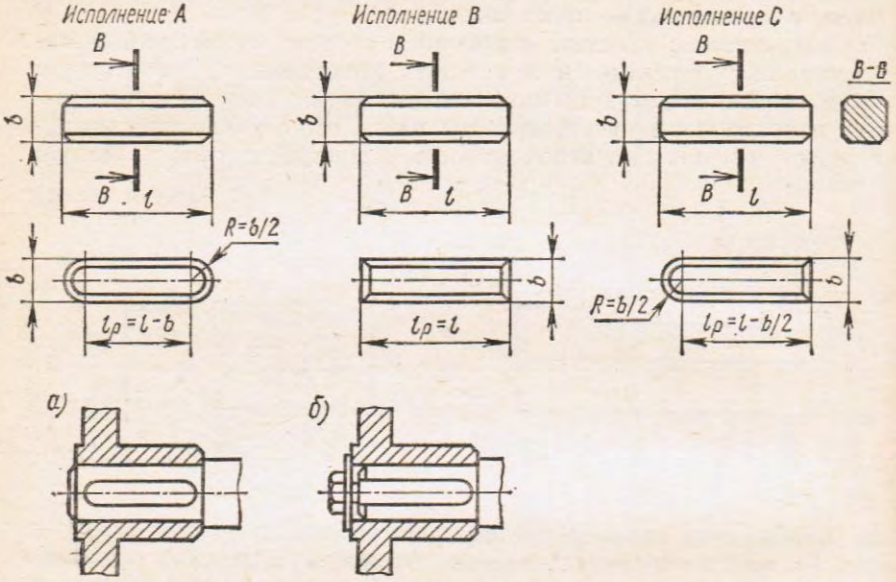


Рис. 3.45

(рис. 3.46). Эти шпонки отличаются от обыкновенных большей длиной.

Соединения сегментными шпонками (рис. 3.47) являются разновидностью соединений призматическими шпонками. Сегментные

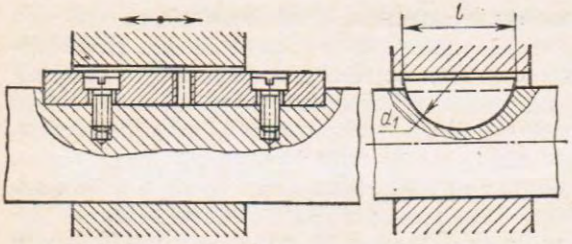


Рис. 3.46

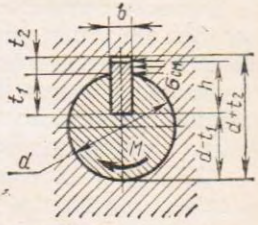


Рис. 3.47

шпонки, так же как и призматические, работают боковыми гранями. Эти шпонки и пазы для них просты в изготовлении, удобны при монтаже и демонтаже. Глубокая посадка шпонки предохраняет ее от выворачивания под нагрузкой. Однако глубокий паз значительно ослабляет вал, поэтому сегментные шпонки применяют для передачи небольших вращающих моментов.

Соединения клиновыми шпонками (рис. 3.48) имеют ограниченное применение. Клиновые шпонки (ГОСТ 24068—80) представляют собой односкосные самотормозящие клинья с уклоном 1 : 100, которые ударами молотка забивают в пазы вала и ступицы. При этом создается напряженное соединение, передающее как вращающий момент, так и осевую силу и препятствующее относительному смещению детали вдоль вала. Рабочими поверхностями клиновых шпонок являются верхняя и нижняя широкие грани. По боковым граням имеется зазор. При запрессовке клиновой шпонки происходит радиальное смещение ступицы по отношению к валу и перекос детали, что является причиной ее торцового биения. Из-за этих недостатков применение клиновых шпонок ограничено.

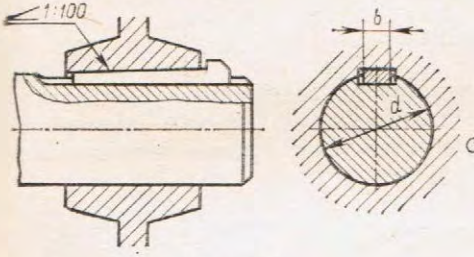


Рис. 3.48

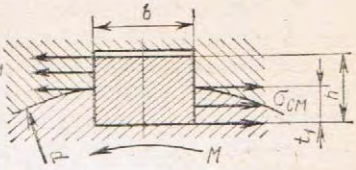


Рис. 3.49

Расчет шпоночных соединений. Рассчитывают шпонку как наиболее слабую деталь соединения. Размеры стандартных шпонок подобраны из условия прочности на смятие, поэтому основным расчетом их является *проверочный расчет на смятие*.

Расчет призматической шпонки (рис. 3.49). Размеры сечений шпонки (ширину b и высоту h) и глубину паза вала t_1 выбирают в зависимости от диаметра d вала по СТ СЭВ 189—75 (см. приложение 1). Длину шпонки конструктивно принимают на 5 . . .10 мм меньше длины ступицы, согласовывают со стандартом и проверяют на смятие:

$$\sigma_{см} = F_t / A_{см} \leqslant [\sigma_{см}],$$

где $F_t = 2M/d$ — окружная сила, передаваемая шпонкой; $A_{см} = (h - t_1) l_р$ — площадь смятия. Следовательно,

$$\sigma_{см} = 2M/[d\,(h - t_1)\,l_р] \leqslant [\sigma_{см}], \qquad (3.41)$$

где M — передаваемый вращающий момент; $l_р$ — рабочая длина шпонки (см. рис. 3.45).

Расчет сегментных шпонок (см. рис. 3.47). Размеры сечений шпонки (ширину b и высоту h), длину шпонки l и глубину паза вала t_1 выбирают в зависимости от диаметра по ГОСТ 24071—80 (см. приложение 2). Сегментные шпонки, так же как и призматические, проверяют на смятие:

$$\sigma_{см} = 2M/[dl\,(h - t_1)] \leqslant [\sigma_{см}]. \qquad (3.42)$$

Если расчетное напряжение превышает допускаемое более чем на 5%, то применяют две шпонки. Призматические шпонки устанавливают под углом 180°, сегментные — вдоль вала в одном пазу ступицы. Постановка нескольких шпонок сильно ослабляет вал, поэтому в таких случаях шпонки заменяют шлицевыми соединениями.

Материалы и допускаемые напряжения. Стандартные шпонки изготовляют из чистотянутых стальных прутков с пределом прочности $\sigma_в \geqslant 590$ МПа. Допускаемые напряжения на смятие $[\sigma_{см}]$: при спокойной нагрузке и стальной ступице $[\sigma_{см}]=100...120$ МПа, а при чугунной $[\sigma_{см}]=50...60$ МПа; при значительных колебаниях нагрузки $[\sigma_{см}]$ следует снижать на 25%.

§ 3.16. ШЛИЦЕВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

Зубчатые соединения осуществляются выступами-зубьями на валу, входящими во впадины соответствующей формы в ступице. По сравнению со шпоночными они обеспечивают лучшее центрирование и направление деталей на валах; большую нагрузочную способность и надежность, особенно при динамических и переменных нагрузках.

Основное распространение получили шлицевые соединения с *прямобочным и эвольвентным профилями*

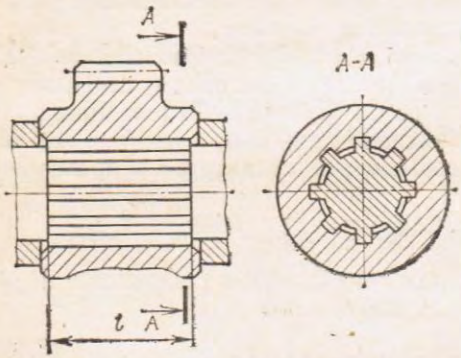


Рис. 3.50

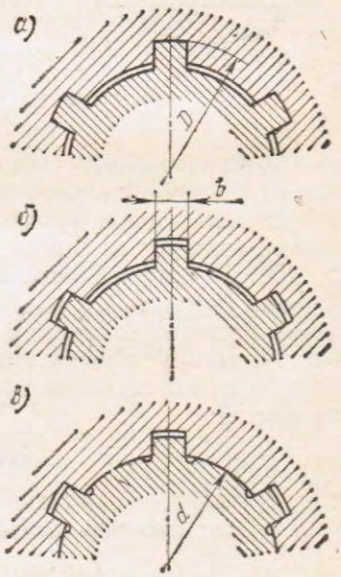


Рис. 3.51

зубьев, которые стандартизованы и могут быть неподвижными и подвижными.

Соединения с прямобочными зубьями (рис. 3.50). Эти соединения имеют постоянную толщину зуба. Выполняют с тремя видами центрирования ступицы на валу (рис. 3.51): *по наружному диаметру* (*а*); *по боковым поверхностям* (*б*); *по внутреннему диаметру* (*в*). Центрирование по боковым поверхностям обеспечивает более рав-

номерное распределение нагрузки по зубьям, но снижает точность центрирования ступицы на валу. Поэтому оно применяется при невысоких требованиях к соосности и передаче больших моментов. При требовании точного центрирования ступицы на валу используют центрирование по наружному или внутреннему диаметру. Последнее обеспечивает наиболее высокую соосность соединяемых деталей и применяется в быстроходных передачах. СТ СЭВ 188—75 (см. табл. 6.11[19]) на прямобочные соединения предусматривает три серии шлицев: *легкую, среднюю и тяжелую*, которые отличаются высотой и числом зубьев z. Легкая серия рекомендуется для неподвижных соединений, средняя — для подвижных, тяжелая — для неподвижных и подвижных при передаче больших моментов.

Соединения с эвольвентными зубьями (рис. 3.52). Эти соединения имеют повышенную прочность и точность центрирования. Технология нарезания зубьев эвольвентного профиля более совершенна и точна, чем для зубьев прямобочного профиля. Соединения с эвольвентными зубьями наиболее перспективны.

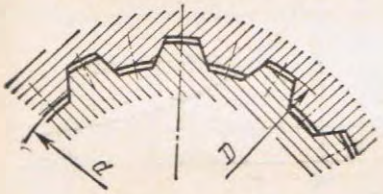


Рис. 3.52

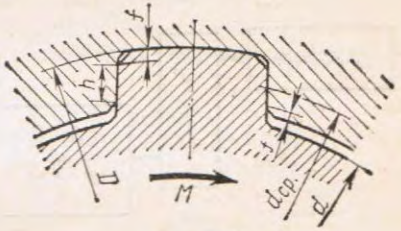


Рис. 3.53

Расчет шлицевых прямобочных соединений. Расчет производят на смятие и износ (ГОСТ 21425—75).

Расчет на смятие (рис. 3.53). Условие прочности

$$\sigma_{см} = 2M/(d_{ср}hzl) \leqslant [\sigma_{см}], \qquad (3.43)$$

где $d_{ср}=(D+d)/2$ — средний диаметр соединения; $h=[(D-d)/2-2f$ — рабочая высота зубьев; z — число зубьев (шлицев); l — рабочая длина соединения (см. рис. 3.50). Допускаемое напряжение на смятие при постоянной нагрузке

$$[\sigma_{см}] = \sigma_т/([s]K_д),$$

где $[s]$ — коэффициент запаса, принимаемый равным 1,4 для нормализованных и улучшенных валов и 1,25 для закаленных; $K_д$ — коэффициент динамичности нагрузки: $K_д=1$ при нереверсивной и $K_д=2$ при реверсивной нагрузке.

Расчет на износ. Условие работы соединения без износа

$$\sigma_{см} = 2M/(d_{ср}hzl) \leqslant [\sigma_{изн}], \qquad (3.44)$$

где $[\sigma_{изн}]$ — допускаемое напряжение на износ, зависящее от твердости рабочих поверхностей зубьев (МПа): $[\sigma_{изн}]=0{,}03$ НВ

для нормализованных и улучшенных зубьев; $[\sigma_{изн}]=0{,}3$ HRC для закаленных зубьев.

Размеры соединений в основном определяются прочностью и жесткостью валов, поэтому напряжения на рабочих поверхностях могут быть значительно ниже допускаемых.

Глава 5
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О ПЕРЕДАЧАХ

§ 3.17. НАЗНАЧЕНИЕ ПЕРЕДАЧ

Большинство современных машин создается по схеме двигатель — передача — рабочий орган машины (рис. 3.54). Все двигатели для уменьшения массы, габаритов и стоимости выполняют быстроходными с узким диапазоном регулирования скоростей. Непосредственное соединение двигателя с рабочим органом машины

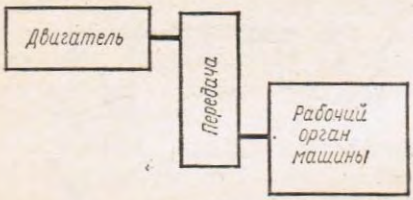


Рис. 3.54

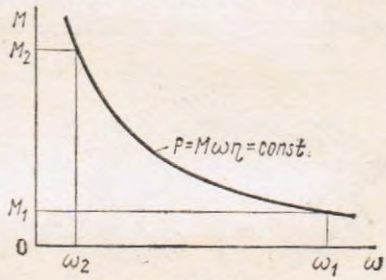


Рис. 3.55

хотя и возможно, но применяется крайне редко (например, гидравлические насосы, вентиляторы). Как правило, между двигателем и рабочим органом машины устанавливают промежуточный механизм — передачу.

Передачами называют механизмы, служащие для передачи механической энергии на расстояние. При этом функции передачи энергии, как правило, совмещают с решением следующих основных задач: согласование угловых скоростей рабочих органов машин и двигателей, которое обеспечивается путем преобразования угловой скорости ω и вращающего момента M при постоянной мощности двигателя P (рис. 3.55) (двигатели имеют большие скорости, рабочие же органы машины для выполнения своих функций часто требуют больших моментов при относительно малых скоростях); регулирование и реверсирование (изменение направления) скорости рабочего органа машины при постоянной угловой скорости двигателя; преобразование вращательного движения двигателя в поступательное, винтовое или другое движение рабочего органа машины.

Наиболее распространены механические передачи вращательного движения, которые и рассматриваются здесь *. Это связано с

* Другие виды механических передач, а также гидравлические, пневматические и электрические передачи изучают в специальных курсах.

таким преимуществом вращательного движения, как возможность обеспечения его непрерывности и равномерности при малых потерях на трение. Кроме того, вращательное движение позволяет получить простую и надежную конструкцию передачи малых габаритов.

Классификация передач. По принципу передачи движения от ведущего звена к ведомому передачи делятся на две группы: передачи *трением* — с непосредственным контактом жестких тел (фрикционные) и гибкой связью (ременные); передачи *зацеплением* — с непосредственным контактом твердых тел (зубчатые, винтовые и червячные) и гибкой связью (цепные).

§ 3.18. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ И СИЛОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ПЕРЕДАЧАХ

В каждой передаче различают два основных вала (рис. 3.56, *а*): ведущий *1* и ведомый *2*. Передача, состоящая только из ведущего и ведомого звеньев, называется *одноступенчатой*. Параметры одноступенчатой передачи, относящиеся к ведущему звену (вал с насаженными на него зубчатыми колесами, шкивами и т. п.), снабжают индексом 1, а к ведомому — 2.

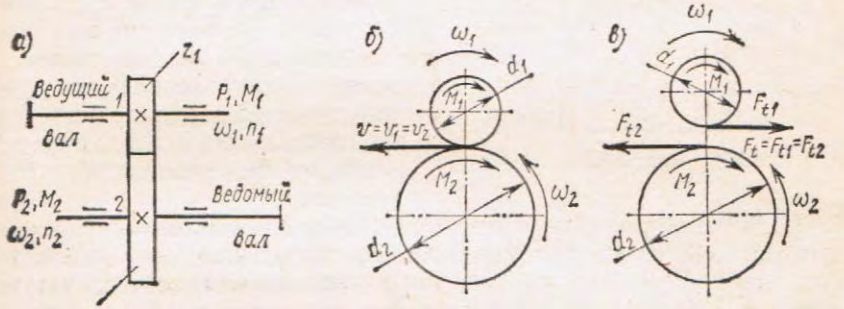


Рис. 3.56

Основные характеристики передач: мощность P_1 на ведущем и P_2 ведомом валах (кВт) и *угловая скорость* ω_1 ведущего и ω_2 ведомого валов (рад/с). Эти характеристики минимально необходимы и достаточны для выполнения проектировочного расчета любой передачи.

Кроме основных различают производные характеристики: *механический к. п. д.* передачи

$$\eta = P_2/P_1; \tag{3.45}$$

окружная скорость (см. § 1.31)

$$v = \omega d/2, \tag{3.46}$$

где d — диаметр колеса, шкива и т. п. При отсутствии скольжения окружные скорости обоих звеньев равны, т. е. $v_1 = v_2$ (рис. 3.56, *б*).

Передаточное число u, определяемое в направлении потока мощности (см. § 1.35),

$$u = \omega_1/\omega_2. \tag{3.47}$$

При $v_1 = v_2$ или $\omega_1 d_1/2 = \omega_2 d_2/2$ получим

$$u = \omega_1/\omega_2 = d_2/d_1. \tag{3.48}$$

Передачи для увеличения угловой скорости ($u<1$) называют *мультипликаторами* или *ускорителями*. Примерами подобных передач являются передачи в приводе сепараторов, центрифуг, рабочие органы которых имеют угловую скорость выше угловой скорости двигателя. Передачи для уменьшения угловой скорости рабочего органа ($u>1$) называют *редукторами*.

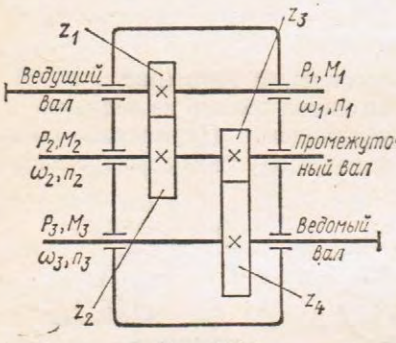


Рис. 3.57

В зависимости от устройства передачи передаточное число может быть постоянным или изменяющимся — регулируемым в определенных пределах по ступенчатому (коробки скоростей с зубчатыми колесами и т. п.) или плавному бесступенчатому (вариаторы) закону.

Если одной парой зубчатых колес нельзя обеспечить требуемое передаточное число, то применяют ряд последовательно соединенных одноступенчатых передач, так называемую **многоступенчатую передачу**. На рис. 3.57 показана *двухступенчатая* зубчатая передача (двухступенчатый редуктор). Ее общее передаточное число $u_{общ} = (z_2/z_1)\, z_4/z_3 = u_1 u_2$ или

$$u_{общ} = u_1 u_2 \ldots u_n, \tag{3.49}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — передаточные числа каждой ступени.

Окружная сила передачи (см. рис. 3.56, *в*)

$$F_t = P/v = 2M_1/d_1, \tag{3.50}$$

где P — мощность, Вт.

На ведомом колесе направление силы F_t совпадает с направлением вращения, а на ведущем — противоположно ему.

Вращающий момент

$$M = P/\omega = F_t d/2. \tag{3.51}$$

Вращающий момент на ведущем валу $M_1 = P_1/\omega_1$ — это момент движущих сил, и его направление совпадает с направлением вращения вала; момент на ведомом валу $M_2 = P_2/\omega_2$ — это момент

сил сопротивления *, поэтому его направление противоположно направлению вращения вала.

При расчете передач часто пользуются зависимостью между вращающими моментами на валах. Эту зависимость получим, разделив выражение момента M_2 на M_1:

$$M_2/M_1 = (P_2/P_1)\,\omega_1/\omega_2 = \eta u$$

или

$$M_2 = M_1 u \eta. \qquad (3.52)$$

Для многоступенчатой передачи общий к. п. д.

$$\eta_{общ} = \eta_1 \eta_2 \cdot \cdot \cdot \eta_n, \qquad (3.53)$$

где $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — к. п. д. отдельных кинематических пар (зубчатых, ременных и других передач, подшипников и т. п.).

Глава 6
ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 3.19. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Фрикционная передача относится к передачам трением с непосредственным контактом фрикционных элементов. Передача состоит из двух катков, закрепленных на валах (рис. 3.58). Подшипники ведомого вала выполнены подвижными, благодаря чему вал может перемещаться в направлении линии центров передачи. Пружина сжатия, действующая на подвижный подшипник, прижимает катки один к другому силой F_r, нагрузка передается силой трения R_f, возникающей в месте контакта вращающихся катков. Условие работоспособности передачи

$$R_f = F_t, \qquad (3.54)$$

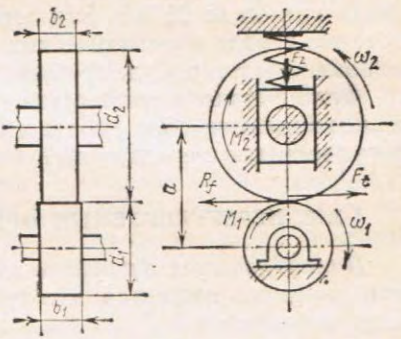


Рис. 3.58

где $F_t = 2M_2/d_2$ — передаваемая окружная сила; $R_f = fF_r$ — сила трения.

Следовательно, $fF_r = F_t$, откуда сила прижатия катков

$$F_r = KF_t/f, \qquad (3.55)$$

где K — коэффициент запаса сцепления; $K = 1{,}25 \ldots 1{,}5$ для силовых передач и $K \approx 3$ для передач приборов; f — коэффициент тре-

* Силы сопротивления делятся на *силы полезных (производственных)* сопротивлений, для преодоления которых построен данный механизм, например сопротивление резанию в токарном станке и т. п., и *силы вредных (непроизводственных)* сопротивлений, например силы трения и т. п. (см. § 1.51).

ния скольжения между катками; $f=0{,}15\ldots0{,}20$ для стали по стали или чугуну всухую и $f=0{,}04\ldots0{,}05$ для стали по стали в масле. Значение силы F_r во много раз больше силы F_t, что является большим недостатком фрикционных передач.

На практике применяют два способа прижатия катков: постоянной силой (например, пружины, собственный вес элементов передачи и т. п.) и переменной силой, которая автоматически изменяется пропорционально изменению передаваемой силы.

Достоинства: плавность и бесшумность работы; простота конструкций и эксплуатации; возможность бесступенчатого регулирования передаточного числа. *Недостатки*: большие давления на валы и подшипники из-за большой силы прижатия катков, что усложняет конструкцию передачи и увеличивает ее размеры; непостоянство передаточного числа из-за неизбежного упругого скольжения катков; повышенный износ катков и др.

Все фрикционные передачи делятся на две группы: *передачи нерегулируемые*, т. е. с постоянным передаточным числом * ; *передачи регулируемые* или фрикционные *вариаторы* с плавным бесступенчатым регулированием передаточного числа.

Фрикционные передачи с постоянным передаточным числом в качестве силовых передач в машиностроении применяют крайне редко (в фрикционных прессах, молотах и т. п.) из-за неконкурентоспособности с зубчатыми передачами по габаритам, надежности, к. п. д. и др. Передаваемая мощность до 20 кВт, допускаемая скорость катков до 25 м/с. Эти передачи нашли ограниченное использование в виде кинематических передач в приборах (магнитофоны, кинокамеры и т. п.) ,где требуется плавность и бесшумность работы.

Фрикционные вариаторы широко применяют как в силовых, так и в кинематических передачах, когда требуется бесступенчатое регулирование передаточного числа (подробно см. § 3.21).

§ 3.20. НЕРЕГУЛИРУЕМЫЕ ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Цилиндрическая фрикционная передача (рис. 3.58) применяется для передачи движения между валами с параллельными осями. Передаточное число

$$u=\omega_1/\omega_2=d_2/[d_1(1-\varepsilon)]\approx d_2/d_1, \qquad (3.56)$$

где $\varepsilon\approx0{,}01\ldots0{,}03$ — коэффициент скольжения. В силовых передачах рекомендуется $u\leqslant6$.

Коническая фрикционная передача (рис. 3.59) применяется для передачи движения между валами с пересекающимися осями. Угол Σ между осями валов может быть различным, чаще всего $\Sigma=\delta_1+\delta_2=90°$, где δ_1 и δ_2 — углы при вершинах конусов ведущего и ведомого катков. Подробно см. [12, 18].

Материалы фрикционных катков должны иметь: высокий коэффициент трения f, что уменьшает требуемую силу прижатия F_r;

* О постоянном передаточном числе можно говорить только условно, так как из-за неизбежного упругого скольжения катков оно не остается постоянным.

высокий модуль упругости E, что уменьшает потери на трение; высокую износостойкость; контактную прочность и теплопроводность. Наиболее распространенное сочетание материалов катков: закаленная сталь по закаленной стали; чугун по чугуну; текстолит по стали или чугуну. Иногда для повышения коэффициента трения один из катков облицовывают прессованным асбестом, прорезиненной тканью и т. п. Как правило, рекомендуется ведомый каток делать из более твердого материала, чтобы избежать образования на нем лысок, появляющихся при буксовании передачи. Буксование наступает при перегрузках, когда не соблюдается условие (3.54). При буксовании ведомый каток останавливается, а ведущий скользит по нему, вызывая местный износ (лыски). Передачи с неметаллическими рабочими поверхностями могут работать только всухую, а с металлическими — в масле или всухую. При работе в масле увеличивается долговечность передачи, так как уменьшается износ и улучшается охлаждение катков (теплопроводность).

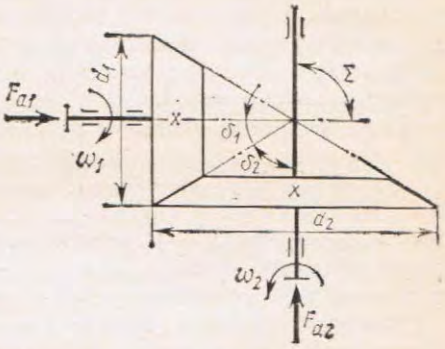


Рис. 3.59

Виды разрушения и основы расчета на прочность фрикционных передач. Основные виды разрушения рабочих поверхностей катков: *усталостное разрушение*, характерное для передач, работающих в масле (см. § 3.3 и рис. 3.3); *износ* характерен для передач, работающих всухую; *задир поверхности* возникает в быстроходных высоконагруженных передачах при разрыве масляной пленки на рабочей поверхности катков. Обычно задир связан с буксованием или перегревом передачи.

Все виды разрушения зависят от значения напряжений в месте контакта. Поэтому *основным критерием работоспособности и расчета фрикционных передач с металлическими катками является их контактная прочность*, которая зависит от значения контактных напряжений σ_H. Наибольшее значение σ_H определяют по формуле (3.2). Условие прочности

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q}{\rho_{пр}} \frac{E_{пр}}{2\pi(1-\nu^2)}} \leqslant [\sigma_H], \qquad (3.57)$$

где $[\sigma_H]$ — допускаемое контактное напряжение для менее прочного из материалов пары катков. Для закаленных сталей $[\sigma_H]$ = =1000. . .1200 МПа.

§ 3.21. ВАРИАТОРЫ

В большинстве современных рабочих машин необходимо регулировать скорость рабочих органов в зависимости от изменяющихся свойств обрабатываемого объекта, условий технологического процесса, загрузки машины и т. п. Для этого машины снабжают ступенчатыми коробками передач или механически регулируемыми передачами — *вариаторами*, которые обеспечивают плавное (бесступенчатое) изменение угловой скорости ведомого вала при постоянной угловой скорости ведущего вала. Вариаторы позволяют установить оптимальный скоростной режим и регулировать скорость на ходу. Применение их способствует повышению производительности машины, качеству продукции, уменьшению шума и вибраций. Основной кинематической характеристикой любого вариатора является *диапазон регулирования*

$$Д = \omega_{2\,max}/\omega_{2\,min} = u_{max}/u_{min}, \qquad (3.58)$$

где $\omega_{2\,max}$ и $\omega_{2\,min}$ — максимальная и минимальная угловые скорости ведомого вала; u_{max} и u_{min} — максимальное и минимальное значения передаточного числа передачи.

Имеется большое количество различных типов вариаторов. Рассмотрим только схемы фрикционных вариаторов с непосредственным контактом — лобовые и торовые и фрикционные вариаторы с гибкой связью — клиноременные.

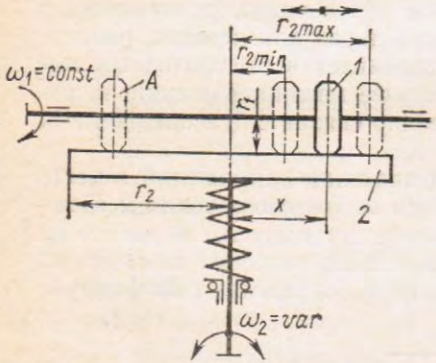


Рис. 3.60

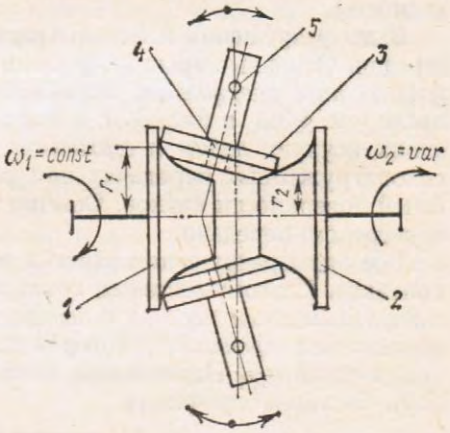


Рис. 3.61

Лобовой вариатор (рис. 3.60). Состоит из катков *1* и *2*, установленных на взаимно перпендикулярных валах и прижатых один к другому пружиной сжатия. Вращение от ведущего вала к ведомому передается силой трения. Каток *1* соединен с ведущим валом длинной направляющей шпонкой. При перемещении его вдоль шпонки изменяется расстояние *x* от оси вращения ведомого вала, вследствие

чего изменяется передаточное число u, а следовательно, и угловая скорость ω_2. Действительно, из условия равенства окружных скоростей катков (скольжением пренебрегаем) имеем $\omega_1 r_1 = \omega_2 x$, откуда $u = \omega_1/\omega_2 = x/r_1$.

Предельные значения передаточного числа:

$$u_{max} = \omega_1/\omega_{2\,min} \approx r_{2\,max}/r_1;\quad u_{min} = \omega_1/\omega_{2\,max} \approx r_{2\,min}/r_1.$$

Диапазон регулирования

$$Д = \omega_{2\,max}/\omega_{2\,min} = u_{max}/u_{min} = r_{2\,max}/r_{2\,min} \leqslant 3.$$

Если каток *1* передвинуть в положение *A*, то произойдет изменение направления вращения ведомого вала (реверсирование). Лобовые вариаторы применяют в винтовых прессах и различных приборах.

Торовый вариатор (рис. 3.61). Торовые чашки (сферические катки) *1* и *2* закреплены на концах валов. Вращение от ведущего вала к ведомому передается двумя роликами *3*, свободно установленными на осях *4*. Изменение угловой скорости ω_2 ведомого вала достигается поворотом роликов вокруг шарниров *5*. Ведущий вал вращается с постоянной угловой скоростью ω_1, а угловая скорость ω_2 может быть равна, больше или меньше ω_1. Если оси роликов перпендикулярны осям валов, то $\omega_2 = \omega_1$. При отклонении осей роликов влево, как показано на рис. 3.61, $\omega_2 > \omega_1$, а при отклонении вправо $\omega_2 < \omega_1$. Торовые вариаторы нормализованы для мощностей 1,5. . .15 кВт; диапазон регулирования при работе всухую $Д = 4...6$, при работе в масле $Д = 6...10$.

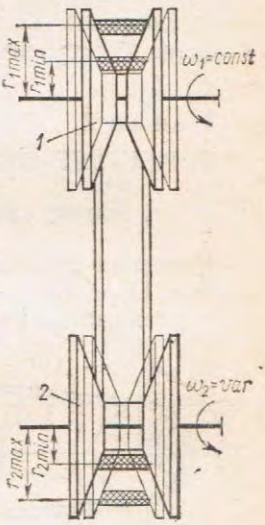


Рис. 3.62

Из всех вариаторов торовые наиболее компактны, имеют минимальное скольжение, но требуют высокой точности изготовления и монтажа.

Клиноременный вариатор (рис. 3.62). На параллельных валах попарно установлены раздвижные конические диски, из которых составлены два регулируемых шкива *1* и *2*. Для связи шкивов применяют стандартные клиновые нормальные ремни и клиновые широкие ремни (ОСТ 38.5.17—73). Изменение угловой скорости ведомого вала ω_2 достигается изменением соотношения рабочих радиусов шкивов r_1 и r_2 путем одновременного осевого сдвигания дисков одного шкива и раздвигания дисков другого шкива на одну и ту же величину.

При принудительном сдвигании конических дисков ведомого вала ремень перемещается к наружному диаметру шкива *2* — рабочий радиус r_2 увеличивается. При этом происходит раздвигание дисков

шкива *1*, что позволяет ремню переместиться к оси шкива — рабочий радиус r_1 уменьшается. В этом случае угловая скорость ω_2 увеличивается. Для уменьшения ω_2 надо раздвигать диски шкива *2* и сдвигать диски шкива *1*. При регулировании ω_2 длина ремня не изменяется.

Предельные значения передаточного числа:

$$u_{max} = \omega_1/\omega_{2\,min} \approx r_{2\,max}/r_{1\,min};\quad u_{min} = \omega_1/\omega_{2\,max} \approx r_{2\,min}/r_{1\,max}.$$

Диапазон регулирования $Д$ зависит от ширины ремня. Клиновые ремни нормальных сечений позволяют получить $Д$=1,3. . .1,8. Наиболее перспективными являются широкие клиновые ремни. Вариаторы с широким клиновым ремнем с двумя регулируемыми шкивами стандартизованы (ГОСТ 22931—78) для мощностей 0,37. . .15 кВт при $Д$=4. . .8.

Клиноременные вариаторы наиболее просты и достаточно надежны, благодаря чему они получили наибольшее распространение среди вариаторов в общем машиностроении. Их успешно применяют в металлорежущих станках, текстильных машинах, мотороллерах и специальных колесных машинах повышенной проходимости в качестве бесступенчатых коробок передач.

Глава 7
РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 3.22. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Ременная передача относится к передачам трением с гибкой связью. Передача состоит из двух шкивов: ведущего *1* и ведомого *2*, закрепленных на валах, и ремня, надетого на шкивы с предварительным натяжением (рис. 3.63). Нагрузка передается силами трения, возникающими между шкивами и ремнем. В качестве гибкой связи (рис. 3.64) в передачах применяют плоские (*а*, *б*), клиновые (*в*, *г*), поликлиновые (*д*) и круглые (*е*) ремни *.

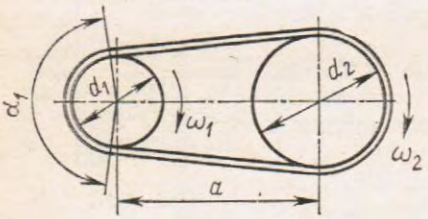


Рис. 3.63

В соответствии с применяемым ремнем передачи подразделяются на плоскоременные, клиноременные, поликлиноременные и круглоременные. В зависимости от скорости ремня передачи могут быть тихоходные (v до 10 м/с), среднескоростные (v до 30 м/с), быстроходные (v до 50 м/с) и сверхбыстроходные (v до 100 м/с).

Достоинства: плавность и бесшумность работы; простота конструкции и эксплуатации; возможность передачи мощности на

* Зубчатые ремни см. § 3.28.

большие расстояния (до 15 м); смягчение толчков и ударов вследствие упругости ремня; предохранение механизмов от перегрузки вследствие возможного проскальзывания ремня; возможность бесступенчатого регулирования скорости. *Недостатки*: большие габариты; некоторое непостоянство передаточного числа из-за неизбежного упругого скольжения ремня; повышенные нагрузки на валы и подшипники от натяжения ремня; низкая долговечность ремней (1000...5000 ч).

Применяют во всех отраслях машиностроения и в основном при параллельном расположении осей и вращении шкивов в одном на-

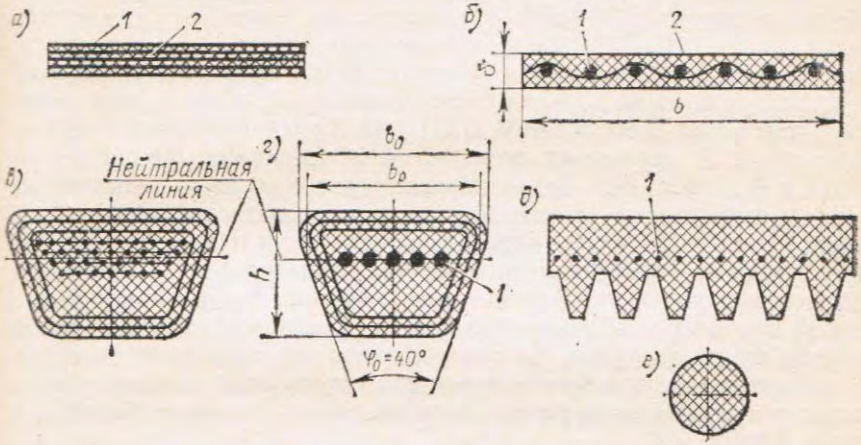


Рис. 3.64

правлении (так называемые открытые передачи) *. Передаваемая мощность P обычно до 50 кВт при скорости ремня $v=5...100$ м/с для плоскоременных и $v=5...40$ м/с для клино- и поликлиноременных передач. Ограничение мощности и минимальной скорости вызвано большими габаритами передачи. Верхний предел скоростей ограничивается ухудшением условий работы ремней в связи с ростом действующих на них центробежных сил, нагревом, образованием воздушных подушек между ремнем и шкивами и отсюда резким понижением долговечности и к. п. д. передач.

Ременные передачи применяют в основном для быстроходной ступени привода, так как в этом случае их важнейший недостаток — большие габариты — оказывает наименьшее влияние на габариты и массу привода в целом. Плоскоременные передачи рекомендуются при больших межосевых расстояниях и высоких скоростях, а клино- и поликлиноременные — при малых межосевых расстояниях и боль-

---

* Схемы других передач плоским ремнем, например перекрестную, полуперекрестную, угловую и др. (см. [25]), в машиностроении применяют крайне редко.

ших передаточных числах. Круглоременные передачи применяют только при малых мощностях (швейные машины, настольные станки, приборы).

§ 3.23. ДЕТАЛИ РЕМЕННЫХ ПЕРЕДАЧ

Приводные ремни должны обладать достаточными прочностью, гибкостью, износостойкостью и высоким коэффициентом трения со шкивами. Основные типы приводных ремней — плоские, клиновые и поликлиновые.

Плоские ремни. Наибольшее распространение имеют резинотканевые ремни (ОСТ 38 0598—76) и ремни из синтетических материалов (ТУ 17-1245—74). *Резинотканевые ремни* (рис. 3.64, *а*) в основном применяют при скорости ремня $v \leqslant 30$ м/с. Состоят из тканевого каркаса, т. е. из нескольких слоев технической ткани *1* (например, бельтинг марок Б-800 и Б-820, БКНЛ-65, капроновая ткань и др.) — прокладок *2*, связанных резиновыми прослойками (ремни могут быть и без прослоек). Ткань передает основную часть нагрузки, а резина защищает ее от повреждения и повышает коэффициент трения. Ремни изготовляют нарезной конструкции и конечной длины (из рулона отрезают ремни требуемой ширины и длины). Соединение концов выполняют склеиванием или сшивкой. Ремни обладают высокой прочностью и гибкостью, малой чувствительностью к влаге и колебаниям нагрузки. Не рекомендуется для применения в среде с повышенным содержанием паров нефтепродуктов, которые разрушают резину. Размеры резинотканевых ремней на основе бельтинга даны в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Ширина ремня b, мм	Число прокладок z	Толщина ремня δ, мм	
		с прослойками	без прослоек
20...71	3; 4; 5;	4,5; 6; 7,5	3,75; 5,0; 6,25
80...112	3; 4; 5; 6	4,5; 6,0; 7,5; 9,0	5,0; 6,25; 7,5
125...250	4; 5; 6	6,0; 7,5; 9,0	5,0; 6,25; 7,5

Примечания: 1. Толщина одной прокладки с резиновой прослойкой 1,5 мм, без прослойки — 1,25 мм. 2. Стандартные значения ширины ремня b (мм): 20, 25, 32, 40, 50, 63, 71, 80, 90, 100, 112, 125, 140, 160, 180, 200, 224, 250...500.

Ремни из синтетических материалов (рис. 3.64, *б*) применяют при скорости ремня $v \leqslant 50...100$ м/с и передаваемой мощности P до 15 кВт (известны ремни, передающие мощность до 3000 кВт). Их изготовляют бесконечными (бесшовными) толщиной $\delta = 0{,}5$ и 0,7 мм, шириной $b = 10...100$ мм и длиной $L_p = 250...3350$ мм. Ремни — тканые из мешковых капроновых тканей просвечивающего переплетения со специальным пленочным фрикционным покрытием *2*,

В готовом ремне уточные нити *1* являются тяговым элементом ремня.

Ремни из синтетических материалов весьма перспективны. Они обладают высокой прочностью и долговечностью. Надежно работают при малых диаметрах шкивов. Применяют их во всех отраслях машиностроения и особенно широко в станкостроительной и подшипниковой промышленности, где повышены требования к точности обработки изделия. Последнее достигается снижением колебаний привода вследствие малой массы ремня.

Ремни из других материалов — кожаные, хлопчатобумажные и шерстяные — имеют ограниченное применение. Кожаные ремни обладают высокой тяговой способностью и долговечностью. Однако они дефицитны и дороги. Хлопчатобумажные и шерстяные ремни имеют сравнительно низкую тяговую способность. Рекомендуются для работы в запыленной и влажной среде, при повышенной температуре, а также в среде, насыщенной парами кислот и бензина.

Клиновые ремни (рис. 3.64, *в г*). Клиновые ремни — это бесконечные ремни трапецеидального сечения с рабочими боковыми гранями и углом клина прямолинейного участка ремня $\varphi_0=40°$. Благодаря клиновому действию ремни обладают повышенной силой сцепления со шкивами и, следовательно, повышенной тяговой способностью, которая при равном натяжении примерно в три раза выше, чем у плоских ремней. Это позволяет при одинаковой передаваемой мощности получить передачу с меньшим натяжением ремня и меньшими габаритами. В зависимости от значения отношения расчетной ширины b_p по нейтральной линии к высоте сечения ремня h клиновые ремни изготовляют трех типов: нормальных сечений, $b_p/h=1{,}4$, узких, $b_p/h=1{,}1$ и широкие (вариаторные) ремни, $b_p/h=2...4{,}5$.

Клиновые ремни нормальных сечений (ГОСТ 1284.1—80) применяют при скорости ремня $v\leqslant 30$ м/с. Состоят из корда, оберточного тканевого слоя и слоев резины, свулканизованных в одно изделие. Корд является тяговым элементом ремня. Он выполняется из нескольких рядов прорезиненной ткани, расположенных в зоне нейтральной линии — кордотканевые ремни (*в*) или из одного ряда толстых шнуров *1* (из капрона, лавсана, вискозы) — кордошнуровые ремни (*г*). Последние более гибки и долговечны; применяют при шкивах уменьшенных диаметров. Клиновые нормальные ремни — это ремни общего назначения, их выпускают семи сечений: *О (Z)* *, *А (A)*, *Б (B)*, *В (C)*, *Г (D)*, *Д (E)* и *Е*, отличающихся размерами (рис. 3.65 и табл. 3.5). Сечение ремня выбирают в зависимости от передаваемой мощности P_1 и частоты вращения n_1 малого шкива (рис. 3.66). Сечение ремней *О (Z)* применяют для передаваемых мощностей до 2 кВт, а сечение *Е* — свыше 200 кВт. Недостатком ремней является их большая высота, что приводит к значительной деформации сечения при изгибе и к неравномерному распределению

* Обозначения сечений, указанные в скобках, соответствуют рекомендации СЭВ.

нормальных давлений в зоне контакта ремня со шкивами. Это снижает их к. п. д. и долговечность.

Клиновые узкие ремни (ТУ 38-40534—75) являются развитием ремней нормальных сечений. Применяются при $v \leqslant 40$ м/с. Их выпускают четырех сечений: *УО*, *УА*, *УБ*, *УВ*. Меньшая ширина ремня способствует более равномерному распределению нагрузки по нитям высокопрочного корда. Поэтому тяговая способность и долговечность их выше, чем у нормальных ремней, и при ровной площади

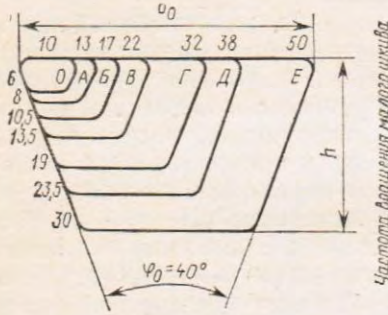


Рис. 3.65

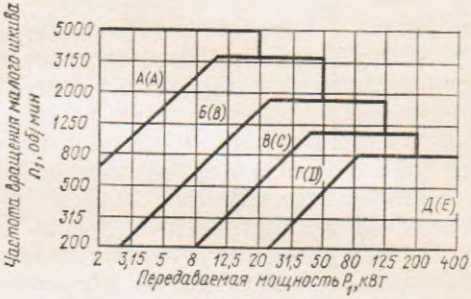


Рис. 3.66

сечения они передают примерно в два раза большую мощность. В перспективе клиновые узкие ремни заменят нормальные.

В клиноременной передаче может быть один ремень или комплект ремней. Комплектом считают два (или более) ремня, предназначенных для одновременной работы в многоручьевой передаче. Рекомендуется максимальное число ремней $z \leqslant 8$. При большом числе ремней трудно обеспечить равномерность их нагружения.

Поликлиновые ремни (ТУ 38-40533—71). Это бесконечные плоские ремни с продольными выступами-ребрами на внутренней по-

Таблица 3.5

Сечение ремня	Размеры ремней					
	Размеры сечения, мм (см. рис. 3.64, *г*)			Площадь сечения A_1, мм²	Минимальный расчетный диаметр малого шкива d_1, мм	Расчетная длина ремня L_p, мм
	b_0	b_p	h			
О (*Z*)	10	8,5	6	47	63	400...2500
А (*A*)	13	11	8	81	90	560...4000
Б (*B*)	17	14	10,5	138	125	800...6300
В (*C*)	22	19	13,5	230	200	1800...10600

Примечание. Расчетная длина ремня (длина на уровне нейтральной линии) L_p (мм): 400, 450, 500, 560, 630, 710, 800, 900, 1000, 1120, 1250, 1400, 1600, 1800, 2000, 2240, 2500, 2800, 3150, 3550, 4000, 4500, 5000, 5600, 6300...1 8000.

верхности (см. рис. 3.64,*д*). Применяются при $v \leqslant 40$ м/с. Их выпускают трех сечений: $К (J)$; $Л (L)$; $М (M)$ длиной 400...4000 мм и с числом ребер $z = 2...36$ для сечения $К$ и $z = 4...20$ для сечений $Л$ и $М$. Сечение ремня выбирают в зависимости от передаваемой мощности P_1^*, частоты вращения n_1 и диаметра d_1 малого шкива (рис. 3.67).

Поликлиновые ремни сочетают достоинства плоских ремней (монолитность и гибкость) и клиновых (повышенная тяговая способность). Эти ремни тоньше клиновых, а ширина их примерно в

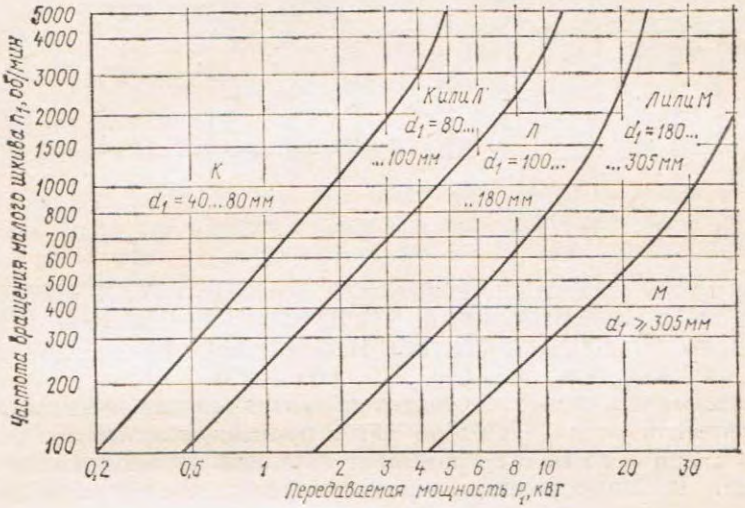


Рис. 3.67

1,5 раза меньше, чем комплекта клиновых ремней ровной тяговой способности. Это объясняется более равномерным распределением нагрузки по рабочим поверхностям ремня, чего трудно добиться при большом числе параллельно работающих клиновых ремней. Они обеспечивают большее постоянство передаточного числа, обладают повышенной плавностью при большой скорости и малыми габаритами. Передачи поликлиновыми ремнями являются развитием клиновых передач. Основные параметры их см. [30].

Шкивы. Форма рабочей поверхности обода шкива определяется видом ремня. Для плоских ремней шкивы имеют гладкую рабочую поверхность обода. Для центрирования ремня поверхность ведомого шкива делается выпуклой (рис. 3.68, *а*), а ведущего — цилиндрической.

Для клиновых ремней (рис. 3.68, *б*) конструкция шкива и размеры обода зависят от числа и размеров канавок для ремней. Число и сечение ремней определяют расчетом. При огибании шкива угол

---

* Если заданным P_1 и n_1 соответствуют ремни двух сечений, например $К$ и $Л$, то рекомендуется принимать ремень сечения $К$, как имеющий меньшие размеры. Если в этом случае по расчету получилось число ребер $z > 36$, то надо принимать ремень сечения $Л$.

клина ремня по сравнению с исходным ($\varphi_0=40°$) уменьшается; изменение угла тем больше, чем меньше диаметр шкива. Для обеспечения правильного контакта ремня со шкивом угол канавки α выбирают в зависимости от диаметра шкива. По стандарту канавки выполняют с углом $\alpha=34...40°$. Конструкция шкива для поликлиновых ремней показана на рис. 3.68, *в*, а для круглых ремней — на рис. 3.68, *г*.

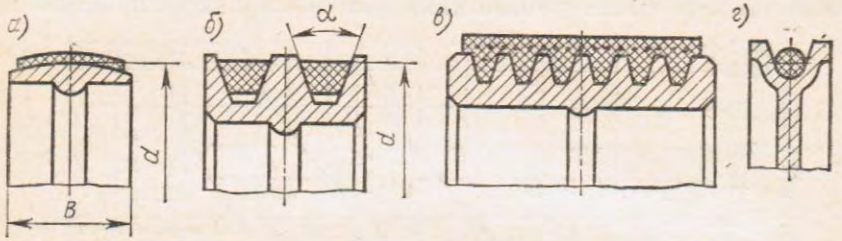


Рис. 3.68

Диаметры шкивов плоскоременных передач по ГОСТ 17383—73 (выборка) и клиноременных по ГОСТ 20898—75 (выборка) d (мм): 63, 71, 80, 90, 100, 112, 125, 140, 160, 180, 200, 224, 250, 280, 315, 355, 400, 450, 500, 560, 630, 710, 800...4000.

Материалы и способ изготовления шкивов зависят от максимальной скорости ремня. При v до 30 м/с применяют литые шкивы из чугуна; при v до 60 м/с применяют стальные литые или сварные шкивы. В быстроходных передачах рекомендуется применять

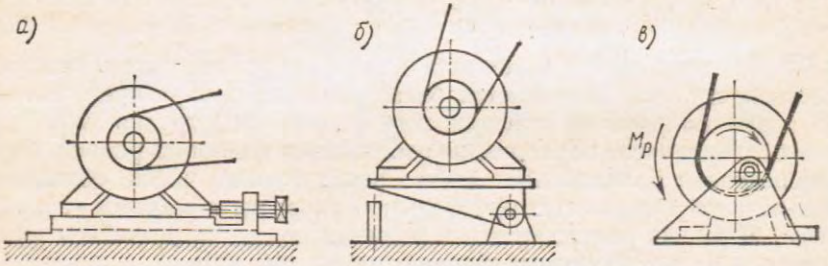


Рис. 3.69

шкивы из алюминиевых сплавов. Шкивы из пластмасс применяют для уменьшения массы. Они экономичны при массовом производстве и не требуют механической обработки. Шкивы из текстолита допускают v до 25 м/с.

Натяжные устройства. Натяжные устройства в ременных передачах позволяют свободно надевать новые ремни на шкивы, создавать предварительное натяжение и периодически восстанавливать его или непрерывно поддерживать по мере вытягивания ремней в процессе эксплуатации. Наиболее простым и распространенным способом натяжения ремней является перемещение одного из шкивов.

Обычно этот способ используют для передачи движения от электродвигателя, который устанавливают в салазках плиты — устройство периодического действия (рис. 3.69, *а*) или на качающейся плите — устройство постоянного действия (рис. 3.69, *б*), где натяжение создается силой тяжести качающейся части. На практике большинство передач работает с переменным режимом нагрузки, поэтому ремни с постоянным предварительным натяжением в период недогрузок оказываются излишне натянутыми, что ведет к резкому снижению долговечности. В этом случае целесообразно применять автоматическое натяжение ремня, при котором оно меняется в зависимости от нагрузки в результате действия реактивного момента, возникающего на статоре двигателя (рис. 3.69, *в*).

§ 3.24. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Диаметры шкивов (см. рис. 3.63) следует брать возможно большими (если позволяют габариты), это повышает долговечность, к. п. д. и тяговую способность передачи. При проектировочном расчете передач резинотканевыми ремнями диаметр d_1 меньшего шкива рекомендуется определять по формуле М. А. Саверина:

$$d_1 = (0{,}052 \ldots 0{,}061) \sqrt[3]{P_1/\omega_1}, \qquad (3.59)$$

где P_1 — передаваемая мощность, Вт; ω_1 — угловая скорость меньшего шкива, рад/с; d_1 — м. Для синтетических ремней зависимость (3.59) дает завышенные результаты. Поэтому при расчете этих ремней рекомендуется предварительно выбрать толщину ремня $\delta = 0{,}5$ или 0,7 мм и диаметр d_1 определить из соотношения $d_1/\delta \leqslant 100 \ldots 150$. Минимально допустимые диаметры d_1 клиноременных передач даны в табл. 3.5. Для поликлиновых ремней

$$d_1 = 0{,}03 \sqrt[3]{P_1/\omega_1}. \qquad (3.60)$$

Минимальное значение d_1 для сечений: K — 40 мм, $Л$ — 80 мм и M — 180 мм. Диаметр большого шкива $d_2 = d_1 u$ [(см. формулу (3.80)]. Диаметры d_1 и d_2 округляют до стандартных значений (см. § 3.23).

Межосевое расстояние a (см. рис. 3.63) определяется конструктивными требованиями к ременному приводу (габариты передачи, необходимый угол обхвата α_1 на малом шкиве и т. д.). Для плоскоременных передач

$$a_{\min} \geqslant (1{,}5 \ldots 2)(d_1 + d_2). \qquad (3.61)$$

Коэффициент 1,5 принимают для передач синтетическими ремнями, а коэффициент 2 — для передач резинотканевыми ремнями. Для клиноременных передач

$$a_{\min} = 0{,}55(d_1 + d_2) + h; \quad a_{\max} = 2(d_1 + d_2). \qquad (3.62)$$

Обычно для увеличения долговечности ремня принимают $a > a_{\min}$ и руководствуются следующими данными:

u	1	2	3	4	5	6
a/d_2	1,5	1,2	1,0	0,95	0,9	0,85

Расчетная длина ремня L_p в зависимости от выбранного a определяется как сумма прямолинейных участков и дуг обхвата шкивов:

$$L_p \approx 2a + 0{,}5\pi (d_1 + d_2) + 0{,}25 (d_2 - d_1)^2/a. \qquad (3.63)$$

Межосевое расстояние при окончательно установленной длине ремня L_p

$$a' = 0{,}25 (\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 8\Delta_2}), \qquad (3.64)$$

где $\Delta_1 = L_p - 0{,}5\pi (d_1 + d_2)$; $\Delta_2 = 0{,}25 (d_2 - d_1)^2$.

Угол обхвата ремнем малого шкива

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57^\circ (d_2 - d_1)/a'. \qquad (3.65)$$

Значение угла α_1 зависит от тяговой способности, которая у передач резинотканевыми ремнями ниже, чем у клиноременных. По этой причине угол α_1 у них больше: $\alpha_1 \geqslant 150^\circ$, тогда как у передач синтетическими ремнями и клиноременных $\alpha_1 \geqslant 120^\circ$, но и при $\alpha_1 = 90^\circ$ последние работают надежно. В результате габариты клиноременных передач значительно меньше, чем передач резинотканевым ремнем. Для увеличения угла α_1 увеличивают межосевое расстояние a.

§ 3.25. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ В ВЕТВЯХ РЕМНЯ. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ВАЛЫ

Силы в ветвях ремня. В ременных передачах полезная нагрузка передается силами трения, создаваемыми предварительным натяжением ремня силой F_0. В состоянии покоя и при холостом ходе каждая ветвь ремня натянута одинаково с силой F_0 (рис. 3.70, *а*). При рабочем ходе, т. е. при передаче вращающего момента M_1, происходит перераспределение натяжений в ветвях ремня: натяжение в ведущей ветви * увеличивается до F_1, а в ведомой уменьшается до F_2 (рис. 3.70, *б*). Из условия равновесия шкива имеем

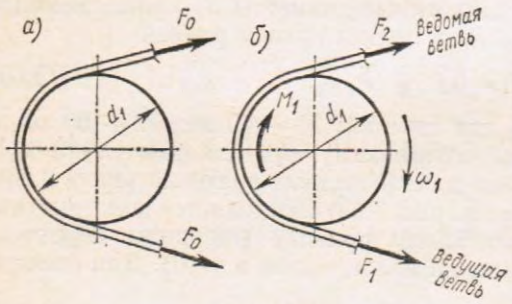


Рис. 3.70

$$M_1 + F_2 d_1/2 - F_1 d_1/2 = 0$$

или

$$F_1 - F_2 = F_t, \qquad (3.66)$$

---

* Ветвь ремня, набегающую на ведущий шкив, называют ведущей, а ветвь ремня, сбегающую с него,— ведомой.

где $F_t=2M_1/d_1$ — окружная сила, передаваемая ремнем. При работе передачи без учета центробежных сил (см. ниже) геометрическая длина ремня остается неизменной, так как дополнительное удлинение ведущей ветви компенсируется равным сокращением ведомой ветви. Поэтому сумма натяжений ветвей под нагрузкой и на холостом ходу остается постоянной:

$$F_1+F_2=2F_0. \tag{3.67}$$

Решив совместно уравнения (3.66) и (3.67), получим

$$F_1=F_0+0{,}5F_t;\ F_2=F_0-0{,}5F_t. \tag{3.68}$$

Эти уравнения устанавливают изменение натяжений F_1 и F_2 в зависимости от сил F_t и F_0, но не вскрывают тяговой способности передачи, которая связана силой трения между ремнем и шкивом. Эта связь без учета центробежных сил установлена уравнением Эйлера:

$$F_1=F_2e^{f\alpha_c}, \tag{3.69}$$

где e — основание натурального логарифма; f — коэффициент трения (для резинотканевых ремней $f\approx0{,}35$); α_c — угол скольжения (для гарантий от пробуксовки принимают $\alpha_c\approx0{,}7\alpha_1$). Формула (3.69) показывает, что отношение F_1/F_2, а следовательно, и сила F_t зависят от угла скольжения и коэффициента трения (выгодно увеличивать оба параметра).

При обегании ремнем шкивов в ремне возникает дополнительная сила натяжения F_v от действия центробежных сил

$$F_v=\rho Av^2, \tag{3.70}$$

где ρ — плотность материала ремня, кг/м³; A — площадь поперечного сечения ремня, м². Сила F_v ослабляет полезное действие предварительного натяжения F_0. Она отбрасывает ремень от шкива и тем самым понижает тяговую способность передачи. Однако влияние силы F_v на работоспособность передачи существенно сказывается только при $v>25$ м/с.

Таким образом, натяжение в ведущей и ведомой ветвях ремня при работе $F_1=F_0+0{,}5F_t+F_v$, $F_2=F_0-0{,}5F_t+F_v$ и для холостого хода F_0+F_v.

Напряжения в ремне. *Напряжение от предварительного натяжения*

$$\sigma_0=F_0/A. \tag{3.71}$$

Для плоских резинотканевых ремней принимают $\sigma_0=1{,}8$ МПа, для синтетических $\sigma_0=10$ МПа (более подробно см. [17]), для клиновых нормальных ремней $\sigma_0=1{,}45$ МПа. С увеличением σ_0 снижается долговечность ремня.

Удельная окружная сила (полезное напряжение)

$$k=F_t/A. \tag{3.72}$$

Напряжения от натяжения в ветвях ремня при рабочем ходе:

$$\sigma_1 = F_1/A = \sigma_0 + 0{,}5k;\ \sigma_2 = F_2/A = \sigma_0 - 0{,}5k. \qquad (3.73)$$

Напряжение от центробежных сил

$$\sigma_v = F_v/A = 10^{-6}\rho v^2. \qquad (3.74)$$

Здесь множитель 10^{-6} введен для того, чтобы выразить ρ в МПа.

Напряжение изгиба возникает в ремне при огибании шкивов (рис. 3.71). По закону Гука, $\sigma_и = E\varepsilon$, где $\varepsilon = y_{max}/x$ — относительное удлинение волокон на выпуклой стороне ремня при изгибе; $y_{max} = 0{,}5\delta$ и $x = 0{,}5(d+\delta)$; следовательно, $\sigma_и = E\delta/(d+\delta)$. Толщина ремня δ мала по сравнению с диаметром d шкива, поэтому можно принять

$$\sigma_и = E\delta/d. \qquad (3.75)$$

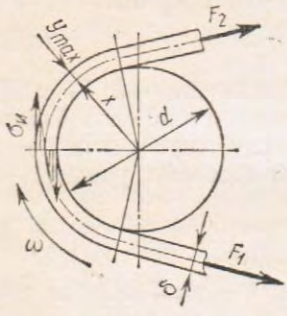


Рис. 3.71

Здесь E — модуль упругости материала ремня; для резинотканевых ремней $E = 200...350$ МПа. Из формулы (3.75) следует, что наибольшее напряжение изгиба в ремне возникает на малом шкиве.

На рис. 3.72 показана эпюра суммарных напряжений в ремне. Наибольшего значения они достигают в сечении ремня при набегании его на малый шкив:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 + \sigma_v + \sigma_{и1} = \sigma_0 + 0{,}5k + \sigma_v + \sigma_{и1}. \qquad (3.76)$$

Сравнивая различные составляющие σ_{max} и учитывая, что по соображениям компактности передачи стремятся принимать не-

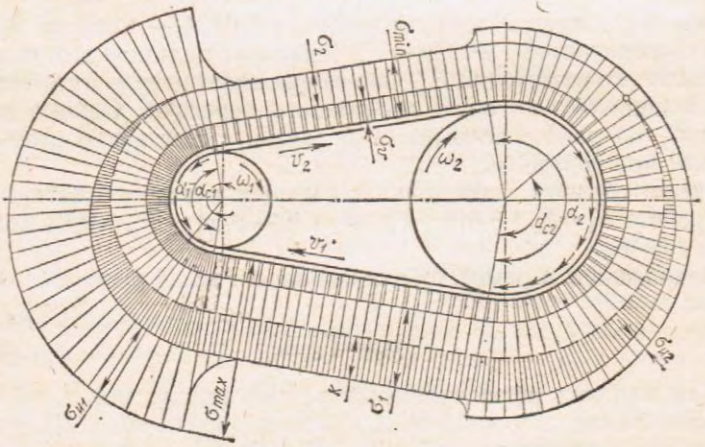


Рис. 3.72

большие значения d_1, можно отметить напряжение изгиба $\sigma_{и1}$ как наибольшее. Оно может в несколько раз превышать все другие со-

ставляющие суммарного напряжения в ремне и, изменяясь по отнулевому циклу, является главной причиной усталостного разрушения ремня. На практике значение $\sigma_{и1}$ ограничивается минимально допустимым δ/d_1 (см. § 3.27).

Силы, действующие на валы и подшипники. Силы натяжения ветвей ремня нагружают валы и подшипники (рис. 3.73). Равнодействующая натяжений — сила, действующая на вал шкива,

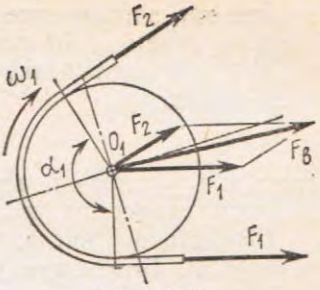


Рис. 3.73

$$F_в = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(180° - \alpha_1)} \approx 2F_0 \sin(\alpha_1/2). \quad (3.77)$$

Обычно $F_в$ в 2...3 раза большей окружной силы F_t, что является существенным недостатком ременных передач.

§ 3.26. СКОЛЬЖЕНИЕ РЕМНЯ И ПЕРЕДАТОЧНОЕ ЧИСЛО

Скольжение ремня. В ременной передаче различают два вида скольжения: *упругое* при нормальной работе передачи и *буксование* при перегрузке. Рассмотрим причины их возникновения.

Натяжения ветвей ремня F_1 и F_2 неодинаковы. При огибании ремнем ведущего шкива натяжение его падает от F_1 до F_2. Ремень укорачивается и скользит по шкиву в направлении, обратном его вращению (см. рис. 3.72 мелкие стрелки на шкиве), т. е. ремень отстает от шкива, так как его скорость оказывается меньше скорости шкива. На ведомом шкиве натяжение ремня возрастает от F_2 до F_1. Ремень удлиняется, что также приводит к его скольжению (ремень опережает шкив). Такое скольжение ремня называют *упругим*.

Упругое скольжение происходит не по всей дуге обхвата α_i, а по дуге α_{ci}, называемой дугой скольжения. Дуга скольжения располагается со стороны сбегания ремня со шкива. Со стороны набегания ремень имеет дугу покоя $\alpha_i - \alpha_{ci}$, по которой он движется вместе со шкивом без скольжения, имея наибольшую нагрузку. При холостом ходе упругое скольжение и дуга скольжения равны нулю. По мере роста полезной нагрузки (силы F_t) дуга скольжения растет, когда $\alpha_{ci} = \alpha_i$ наступает *буксование передачи*. При буксовании полезная нагрузка не может быть передана, т. е. тяговая способность ремня исчезает. Таким образом, упругое скольжение не является постоянной величиной, а зависит от значения нагрузки.

Упругое скольжение ремня — это нормальное и закономерное явление для любой ременной передачи. Оно возникает в результате разности натяжения ведущей и ведомой ветвей и является причиной непостоянства передаточного числа и снижения скорости ремня. При этом потеря скорости $(v_1 - v_2)$ происходит только на ведущем

шкиве, где направление скольжения, показанное мелкими стрелками на дуге α_{c1}, не совпадает с направлением вращения шкива.

Упругое скольжение ремня характеризуется *коэффициентом скольжения*:

$$\varepsilon = (v_1 - v_2)/v_1, \tag{3.78}$$

где v_1 и v_2 — скорости ведущей и ведомой ветвей ремня, равные окружным скоростям шкивов.

Передаточное число. Окружные скорости шкивов $v_1 = \omega_1 d_1/2$ и $v_2 = \omega_2 d_2/2$. Вследствие упругого скольжения $v_2 < v_1$ из формулы (3.78) $v_2 = v_1(1-\varepsilon)$. При этом передаточное число

$$u = \omega_1/\omega_2 = v_1 d_2/(v_2 d_1) = d_2/[d_1(1-\varepsilon)]. \tag{3.79}$$

При нормальных рабочих нагрузках $\varepsilon \approx 0{,}01 \ldots 0{,}02$. Небольшое значение ε позволяет для обычных расчетов принимать

$$u \approx d_2/d_1. \tag{3.80}$$

Для плоскоременных передач рекомендуется $u \leqslant 5$, для клиноременных $u \leqslant 7$.

§ 3.27. РАСЧЕТ РЕМЕННЫХ ПЕРЕДАЧ

Критерии работоспособности ременных передач: *тяговая способность* — надежность сцепления ремня со шкивами и *долговечность*, определяемая усталостью ремня.

Тяговая способность ремня характеризуется *кривыми скольжения и к. п. д.* (рис. 3.74), устанавливающими зависимость относительного скольжения ε и к. п. д. передачи η от нагрузки, которую выражают через коэффициент тяги ψ, показывающий, какая часть предварительного натяжения ремня полезно используется для передачи нагрузки:

$$\psi = (F_1 - F_2)/(F_1 + F_2) = F_t/(2F_0) = k/(2\sigma_0). \tag{3.81}$$

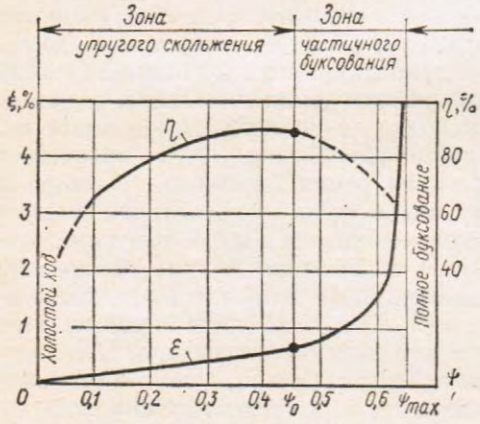


Рис. 3.74

Кривые скольжения для всех типов ремней получают экспериментально. При постоянном натяжении $F_1 + F_2 = 2F_0$ постепенно повышают полезную нагрузку F_t, а следовательно, и коэффициент тяги ψ и измеряют значение коэффициента скольжения ε (точнее, v_1 и v_2), а также к. п. д. передачи η. При возрастании коэффициента тяги ψ от нуля до критического значения ψ_0 наблюдается только упругое

скольжение, которое пропорционально нагрузке, и кривая скольжения имеет прямолинейный участок. Передача работает нормально.

При дальнейшем увеличении коэффициента тяги от ψ_0 до ψ_{max} к упругому скольжению добавляется частичное буксование. Нормальная работа передачи нарушается. Зона частичного буксования ($\psi_0 \ldots \psi_{max}$) определяет способность передачи переносить кратковременные перегрузки, например при пуске. При некотором значении ψ_{max} наступает полное буксование, ведомый шкив останавливается.

Коэффициент тяги ψ_0 характеризует предел рационального использования ремня. Значение ψ_0 соответствует наибольшей нагрузке на ремень F_t, до которой отсутствует буксование. Из выражения (3.81) находим

$$F_t = 2\psi_0 F_0. \qquad (3.82)$$

К. п. д. передачи растет с ростом нагрузки вследствие уменьшения роли потерь холостого хода и достигает максимума в зоне критического значения коэффициента тяги. В зоне частичного буксования к. п. д. резко снижается вследствие увеличения потерь на скольжение, при этом ремень быстро изнашивается. Поэтому рабочую нагрузку рекомендуется выбирать вблизи критического значения ψ_0. В этом случае значение к. п. д. принимают: для плоскоременных передач $\eta \approx 0{,}97$, для клиноременных $\eta \approx 0{,}96$.

Допускаемая удельная окружная сила $[k]$. Разделив обе части равенства (3.82) на площадь A поперечного сечения ремня, получим

$$k_0 = 2\psi_0\sigma_0,$$

где k_0 — допускаемая номинальная удельная окружная сила, полученная при испытании ремней в стандартных условиях ($\alpha_1 = 180°$, $v = 10$ м/с, нагрузка спокойная, передача горизонтальная). Опыты показывают, что значение k_0 зависит от типа ремня, его толщины δ, диаметра d_1 и начального напряжения σ_0. Анализ кривых скольжения, полученных при испытании плоских ремней в стандартных условиях при принятом σ_0, позволил установить зависимость для определения значения k_0:

$$k_0 = S - W\delta/d_1, \qquad (3.83)$$

где S и W — коэффициенты, имеющие следующие значения:

	S	W	σ_0, МПа	δ/d_1
Резинотканевый ремень	2,5	10	1,8	1/40
Синтетический ремень	11,6	440	10	1/(100...150)

Значения k_0 для клиновых ремней при $\sigma_0 = 1{,}45$ МПа для различных сечений ремня следующие:

	O (Z)			A (A)			$Б$ (B)		
d_1, мм	71	80 ≥ 90	100	112 ≥ 125	140	160 ≥ 180			
k_0, МПа	1,70	1,81	1,92	1,70	1,81	2,00	1,70	1,92	2,11

Условия работы проектируемых передач отличаются от стандартных. Поэтому расчет их следует вести не по k_0, а по допускаемой

удельной окружной силе $[k]$, которая поправочными коэффициентами учитывает действительные условия работы передачи:

$$[k] = k_0 C_\alpha C^v C_\theta / C_p, \tag{3.84}$$

где C_α — коэффициент, учитывающий влияние на тяговую способность угла обхвата на малом шкиве:

Угол обхвата α_1, град	180	170	160	150	140	130	120	110	100	90
C_α для плоских ремней	1,0	0,97	0,94	0,91	0,88	0,85	0,82	—	—	—
C_α для клиновых и поликлиновых ремней	1,0	0,98	0,95	0,92	0,89	0,86	0,83	0,78	0,74	0,68

C_v — скоростной коэффициент, учитывающий ослабление сцепления ремня со шкивами под действием центробежной силы. Для резинотканевых ремней $C_v = 1{,}04...0{,}0004\,v^2$, для синтетических $C_v = 1{,}01...0{,}0001\,v^2$, для клиновых и поликлиновых $C_v = 1{,}05...0{,}0005\,v^2$; C_θ — коэффициент расположения передачи. Для плоскоременных передач C_θ зависит от угла наклона θ линии центров передачи к горизонту. Значения C_θ равны 1,0; 0,9 и 0,8 при θ, соответственно равных 0...60°; 60...80° и 80...90°. Для клиноременных и поликлиноременных передач $C_\theta = 1$; C_p — коэффициент динамичности нагрузки и режима работы. Значения C_p при односменной работе:

Характер нагрузки	спокойная	умеренные колебания	значительные колебания
C_{p1}	1,0	1,1	1,2

При двух- и трехсменной работе коэффициент режима соответственно принимают: $C_{p2} = 1{,}1\,C_{p1}$; $C_{p3} = 1{,}4\,C_{p1}$ (более подробно см. ГОСТ 1284.3—80). Таким образом, расчет по тяговой способности сводится к выполнению условия

$$k = F_t / A \leqslant [k]. \tag{3.85}$$

За основу создаваемых методов расчета ремней на долговечность принята кривая усталости (см. рис. 2.111), описываемая уравнением

$$\sigma_{max}^m N = C, \tag{3.86}$$

где σ_{max} — максимальное напряжение цикла [см. формулу (3.76)]; m и C — параметры кривой усталости (для резинотканевых ремней $m=6$; для клиновых $m=11$); N — число циклов напряжений за полный срок службы (до разрушения). Более подробно см. [22, 23].

Расчет плоскоременных передач. В связи с тем что в настоящее время еще не накоплены экспериментальные данные для теоретически обоснованных расчетов на долговечность по формуле (3.86), долговечность учитывают косвенным путем, а основным расчетом является расчет *по тяговой способности*, который выполняют как проектировочный. При расчете по тяговой способности определяют

требуемую площадь сечения ремня:

$$A = b\delta = F_t/[k], \qquad (3.87)$$

где b и δ — ширина и толщина ремня (см. рис. 3.64, *б* и табл. 3.4).

Расчет *на долговечность* выполняют как проверочный по частоте пробегов ремня в секунду. Долговечность ремня, т. е. его способность сопротивляться усталостному разрушению, зависит как от значений напряжений, так и от частоты цикла напряжений. Из эпюры напряжений (см. рис. 3.72) видно, что ремень работает при переменных напряжениях, причем один цикл напряжений соответствует полному пробегу ремня. Частота цикла напряжений равна частоте пробега ремня в секунду:

$$U = v/L_p \leqslant [U], \qquad (3.88)$$

где U — действительная частота пробега ремня в секунду, $с^{-1}$; v — скорость ремня, м/с; L_p — длина ремня, м; $[U]$ — допускаемая частота пробега ремня, $с^{-1}$, при которой не появляются признаки усталостного разрушения. Для резинотканевых ремней $[U] \leqslant 5$ $с^{-1}$, для синтетических $[U] \leqslant 50$ $с^{-1}$. При соблюдении условия (3.88), как показал опыт эксплуатации среднескоростных передач, обеспечивается средняя долговечность ремней 1000...5000 ч. Если $U > [U]$, то увеличивают L_p.

Расчет передач клиновыми и поликлиновыми ремнями. Расчет производят из условий тяговой способности и долговечности*. Ограниченное число типоразмеров стандартных клиновых и поликлиновых ремней позволило экспериментально определить номинальную мощность P_0, передаваемую одним ремнем данного сечения длиною L_0 в стандартных условиях. Значения P_0 (кВт) для клиновых ремней нормальных сечений по ГОСТ 1284.3—80 даны в табл. 3.6, а для поликлиновых ремней с десятью ребрами — см. приложение 3.

Условия работы проектируемых передач отличаются от стандартных. Поэтому расчет их следует вести с учетом поправочных коэффициентов по мощности, передаваемой одним ремнем данного сечения в действительных условиях эксплуатации P_p (кВт):

$$P_p = P_0 C_\alpha C_L / C_p, \qquad (3.89)$$

где C_L — коэффициент, учитывающий влияние на долговечность длины ремня; он зависит от отношения расчетной длины ремня L_p к исходной L_0. Для клиновых ремней значения L_0 даны в табл.3.6. Для поликлиновых L_0 принимают равным для сечений: $К$ — 710 мм, $Л$ — 1600 мм и $М$ — 2240 мм. Коэффициент C_L имеет следующие значения:

L_p/L_0	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	2,0
Клиновой ремень нормального сечения	0,82	0,86	0,89	0,95	1,0	1,04	1,07	1,1	1,15
Поликлиновой ремень	0,85	0,89	0,91	0,96	1,0	1,03	1,06	1,08	1,12

* Долговечность клиновых и поликлиновых ремней можно косвенно учесть по частоте пробегов в секундах $U = v/L_p \leqslant [U] = 10...20 с^{-1}$.

Таблица 3.6

Сечение ремня	Диаметр малого шкива d_1, мм	Частота вращения малого шкива n_1, об/мин						
		700	800	950	1200	1450	1600	1800
А (A)	90	0,69	0,77	0,88	1,05	1,21	1,31	1,42
(L_0 = 1700 мм)	100	0,84	0,94	1,08	1,30	1,50	1,62	1,76
	125	1,22	1,36	1,57	1,89	2,19	2,36	2,58
	140	1,43	1,60	1,85	2,24	2,59	2,79	3,04
Б (B)	125	1,48	1,64	1,86	2,20	2,50	2,66	2,85
(L_0 = 2240 мм)	140	1,87	2,08	2,37	2,82	3,21	3,42	3,68
	160	2,38	2,65	3,03	3,61	4,13	4,40	4,73
	180	2,88	3,21	3,67	4,38	5,01	5,34	5,73
В (C)	200	4,21	4,64	5,22	6,03	6,66	6,93	7,16
(L_0 = 3750 мм)	224	5,29	5,83	6,58	7,69	8,49	8,83	9,12

Примечание. С увеличением d_1 при заданном сечении ремня повышаются P_0, тяговая способность и долговечность.

При расчете *клиноременных передач* определяют требуемое число ремней z в передаче для обеспечения среднего ресурса эксплуатации (2000 ч). По ГОСТ 1284.3—80,

$$z = P_1/(P_p C_z), \tag{3.90}$$

где P_1 — передаваемая мощность на ведущем валу, кВт; C_z — коэффициент, учитывающий неравномерную загрузку ремней, вводится при $z \geqslant 2$; $C_z = 0{,}95$ при $z = 2...3$; $C_z = 0{,}9$ при $z = 4...6$; $C_z = 0{,}85$ при $z > 6$.

Сила предварительного натяжения одного ремня без учета влияния центробежных сил (ГОСТ 1284.2—80)

$$F_0 = 850 P_1 C_p C_L/(zvC_\alpha). \tag{3.91}$$

Сила, действующая на вал,

$$F_в = 2F_0 z \sin(\alpha_1/2). \tag{3.92}$$

При расчете *поликлиновых передач* определяют требуемое число ребер:

$$z = 10P_1/P_p. \tag{3.93}$$

Для поликлиновых передач силы F_0 и $F_в$ определяют по формулам (3.91) и (3.92) при $z = 1$.

Пример 3.1. Рассчитать открытую плоскоременную горизонтальную передачу резинотканевым ремнем от электродвигателя мощностью $P_1 = 7{,}5$ кВт при $n_1 = 1440$ об/мин ($\omega_1 = 151$ рад/с) и передаточном числе $u = 3{,}1$. Работа односменная, нагрузка спокойная.

Решение. 1. Диаметр малого шкива [см. формулу (3.59)]

$$d_1 = (0{,}052 \ldots 0{,}061) \sqrt[3]{P_1/\omega_1} = (0{,}052 \ldots 0{,}061) \sqrt[3]{7{,}5 \cdot 10^3/151} = 0{,}192 \ldots 0{,}224 \text{ м}.$$

По стандарту (см. § 3.23) принимаем $d_1 = 200$ мм.

2. Скорость ремня $v=\omega_1 d_1/2=151\cdot200\cdot10^{-3}/2$ м/с=15 м/с, что меньше максимальной ($v\leqslant30$ м/с).

3. Диаметр большого шкива [см. формулу (3.80)] $d_2\approx d_1 u=(200\cdot3,1)$ мм=620 мм. По стандарту принимаем $d_2=630$ мм.

4. Фактическое передаточное число $u'=d_2/d_1=630/200=3,15$.

Отклонение от заданного составляет 1,58%. Допускается ±5%.

5. Межосевое расстояние [см. формулу (3.61)] $a=2(d_1+d_2)=2(200+630)$ мм=1660 мм.

6. Расчетная длина ремня без учета припуска на соединение концов [см. формулу (3.63)]

$$L_p\approx[2\cdot1660+0,5\pi(630+200)+0,25(630-200)^2/1600]\text{ мм}=4660\text{ мм}.$$

7. Число пробегов ремня [см. формулу (3.88)] $U=v/L_p=15/4,66\text{ с}^{-1}=3,22\text{ с}^{-1}$. Если $U>5$, то увеличивают L_p.

8. Уточнение a не производим, так как ремень сшивной, а не бесконечный.

9. Угол обхвата ремнем малого шкива [см. формулу (3.65)]

$$\alpha_1=180^\circ-57^\circ(630-200)/1660=165^\circ>[\alpha_1]=150^\circ.$$

10. Толщина ремня δ. Для резинотканевых ремней $\delta/d_1=1/40$. При $d_1=200$ мм $\delta=200/40$ мм=5 мм. По табл. 3.4 принимаем толщину ремня $\delta=4,5$ мм (три прокладки с резиновыми прослойками). С увеличением δ долговечность ремня уменьшается.

11. Допускаемая номинальная удельная окружная сила [см. формулу (3.83)] $k_0=S-W\delta/d_1=2,5-10\cdot4,5/200$ МПа=2,28 МПа.

12. Согласно условиям работы, принимаем коэффициенты: $C_\alpha=0,955$ (см. § 3.27);

$$C_v=1,04-0,0004v^2=1,04-0,0004\cdot15^2=0,95;\quad C_\theta=1,0;\quad C_p=1,0.$$

13. Допускаемая удельная окружная сила [см. формулу (3.84)] $[k]=k_0C_\alpha C_v C_\theta/C_p=2,28\cdot0,955\cdot0,95\cdot1/1$ МПа=2,07 МПа.

14. Окружная сила

$$F_t=P_1/v=7,5\cdot10^3/15\text{ Н}=500\text{ Н}.$$

15. Ширина ремня [см. формулу (3.87)]

$$b=F_t/([k]\,\delta)=500/(2,07\cdot10^6\cdot4,5\cdot10^{-3})=0,0537\text{ м}=53,7\text{ мм}.$$

Принимаем $b=63$ мм (см. примечание 2 к табл. 3.4).

16. Сила предварительного натяжения ремня при $\sigma_0=1,8$ МПа [см. формулу (3.71)]

$$F_0=A\sigma_0=\delta b\sigma_0=(4,5\cdot10^{-3}\cdot63\cdot10^{-3}\cdot1,8\cdot10^6)\text{ Н}=510\text{ Н}.$$

17. Сила, действующая на вал [см. формулу (3.77)],

$$F_в=2F_0\sin(\alpha_1/2)=2\cdot510\sin(165^\circ/2)\text{ Н}=1010\text{ Н}.$$

Пример 3.2. По данным примера 3.1 рассчитать клиноременную передачу ремнями нормальных сечений.

Решение. 1. По передаваемой мощности $P_1=7,5$ кВт и частоте вращения малого шкива $n_1=1440$ об/мин принимаем ремень сечения *Б* (см. рис. 3.66).

2. По табл. 3.6 принимаем диаметр малого шкива $d_1=140$ мм.

3. Скорость ремня $v=\pi d_1 n_1/60=\pi\cdot140\cdot10^{-3}\cdot1440/60$ м/с=10,6 м/с, что меньше максимальной ($v\leqslant30$ м/с).

4. Диаметр большого шкива $d_2\approx d_1 u=140\cdot3,1)$ мм=434 мм. По стандарту (см. § 3.23) принимаем $d_2=450$ мм.

5. Фактическое передаточное число $u'=d_2/d_1=450/140=3,21$. Отклонение от заданного составляет 3,5%. Допускается ±5%.

6. Ориентировочное межосевое расстояние [см. формулу (3.62) и табл. 3.5] $a_{min}=0,55(d_1+d_2)+h=0,55(140+450)+10,5$ мм=335 мм.

Для увеличения долговечности ремня, согласно рекомендации § 3.24 из отношения a/d_2 при $u'=3,21$ принимаем $a=0,99\ d_2=(0,99\cdot450)$ мм=446 мм.

7. Расчетная длина ремня [см. формулу (3.63)]

$$L_p\approx2\cdot446+0,5\pi(450+140)+0,25(450-140)^2/446\text{ мм}=1872\text{ мм}.$$

По стандарту (см. примечание к табл. 3.5) принимаем $L_p=2000$ мм.

8. Окончательное межосевое расстояние [см. формулу (3.64)]

$$a' = 0{,}25\left(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 8\Delta_2}\right) = 0{,}25\left(1074 + \sqrt{1074^2 - 8 \cdot 24\,025}\right) \text{ мм} = 514 \text{ мм}.$$

9. Угол обхвата ремнем малого шкива [см. формулу (3.65)]

$$\alpha_1 + 180° - 57°\,(d_2 - d_1)/a' = 180° - 57°\,(450 - 140)/514 = 145{,}6° > [\alpha_1] = 120°.$$

10. Согласно условиям работы, принимаем коэффициенты: $C_\alpha = 0{,}9$; $C_p = 1$ (см. § 3.27).

11. Исходная длина ремня $L_0 = 2240$ мм (см. табл. 3.6). Относительная длина

$$L_p/L_0 = 2000/2240 = 0{,}893, \quad C_L = 0{,}98 \text{ (см. § 3.27)}.$$

12. По табл. 3.6 (интерполированием) при $d_1 = 140$ мм и $n_1 = 1440$ об/мин принимаем номинальную мощность, передаваемую одним ремнем сечения *Б*, $P_0 = 3{,}2$ кВт.

13. Мощность, передаваемая одним ремнем в условиях эксплуатации [см. формулу (3.89)], $P_p = P_0 C_\alpha C_L / C_p = 3{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}98/1$ кВт $= 2{,}82$ кВт.

14. Предполагаем, что число ремней $z = 2...3$, тогда $C_z = 0{,}95$ (см. § 3.27).

15. Требуемое число ремней z [см. формулу (3.90)] $z = P_1/(P_p C_z) = 7{,}5/(2{,}82 \times 0{,}95) = 2{,}8$. Принимаем $z = 3$.

16. Сила предварительного натяжения одного ремня [см. формулу (3.91)]

$$F_0 = 850 P_1 C_p C_L/(zvC_\alpha) = 850 \cdot 7{,}5 \cdot 1 \cdot 0{,}98/(3 \cdot 10{,}6 \cdot 0{,}9) \text{ Н} = 219 \text{ Н}$$

(при расчете F_0 коэффициент C_p принимают для односменной работы).

17. Сила, действующая на вал [см. формулу (3.92)],

$$F_в = 2F_0 z \sin(\alpha_1/2) = 2 \cdot 219 \cdot 3 \sin(145{,}6°/2) \text{ Н} = 1250 \text{ Н}.$$

Сравнивая результаты расчетов вышеуказанных передач, работающих в одинаковых условиях и передающих одинаковую мощность при равной частоте вращения, можно указать на значительный выигрыш в габаритах передачи; так, для плоскоременной передачи межосевое расстояние $a = 1660$ мм, а для клиноременной $a = 514$ мм.

§ 3.28. ПЕРЕДАЧИ ЗУБЧАТЫМ РЕМНЕМ

Зубчатые ремни (ОСТ 38-05114—76) выполняют бесконечными, плоскими с выступами (зубьями) трапецеидальной формы на внутренней поверхности, которые входят в зацепление с зубьями на шкивах (рис. 3.75). Таким образом, передача работает по принципу зацепления, а не трения. К ременным передачам она относится условно только по названию и конструкции тягового органа. По сравнению с другими видами передач гибкой связью она обладает рядом преимуществ: отсутствие скольжения; малые габариты; малые силы на валы и подшипники, так как нет необходимости в большом предварительном натяжении ремня *; высокий к. п. д. (до 0,98) и незначительная вытяжка ремня. Применяют для передачи мощности до 100 кВт (уникаль-

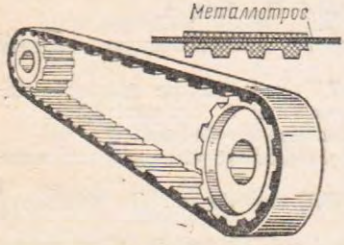


Рис. 3.75

* Предварительное натяжение необходимо только для устранения зазоров в зацеплении и правильного набегания ремня на шкивы.

ные передачи до 500 кВт) при скорости $v=5...50$ м/с, а в отдельных случаях до 80 м/с. Передаточное число $u\leqslant 12$ (иногда $u\leqslant 30$).

Зубчатые ремни изготовляют из эластичной малостойкой резины или пластмассы и армируют спиралью навитым по длине ремня металлическим тросом или тросом из стекловолокна, который является тяговым элементом ремня и практически гарантирует неизменность шага ремня. Для повышения износостойкости зубья ремня покрывают тканым нейлоном. Передачи зубчатым ремнем ввиду их быстроходности особенно рекомендуется применять в качестве понижающих в приводах от электродвигателей к ведущим валам передаточных механизмов и машин, где использование клиновых и других ремней нерационально или недопустимо по скорости.

Расчет передачи. При расчете определяют модуль ремня, исходя из условия отсутствия усталостного разрушения зубьев по напряжениям сдвига. Для упрощения расчета ряд величин — коэффициент ширины ремня $\psi_p=b/m$, допускаемое напряжение сдвига для зубьев ремня $[\tau_{ср}]$, допускаемое число зубьев меньшего шкива z_1 и число зубьев ремня z_0, находящихся в зацеплении с малым шкивом,— взяты в осредненном значении и объединены постоянным числовым коэффициентом. При этих допущениях модуль ремня

$$m=0{,}0165\sqrt[3]{P_1/\omega_1}, \qquad (3.94)$$

где P_1 — передаваемая мощность, кВт; ω_1 — угловая скорость меньшего шкива, рад/с. Значение m округляют до ближайшего стандартного (ОСТ 38-05114—76). По полученному значению m определяют размеры зубчатых ремней (табл. 3.7).

Таблица 3.7

Параметр	Модуль m, мм					
	2	3	4	5	7	10
Число зубьев малого шкива z_1	10; 12; 14; 16; 18	10; 12; 14; 16; 18	14; 16; 18; 20; 22	14; 16; 18; 20; 22	17; 20; 22; 24; 26	17; 20; 12; 24; 26; 28
Число зубьев ремня z_p	40...160	40...160	48...250	48...200	56...140	56...100
Ширина ремня b, мм	8; 10; 12,5; 16; 20	12,5; 16; 20; 25; 32	20; 25; 32; 40; 50	25; 32; 40; 50; 63	50; 63; 80; 100	50; 63; 80; 100

Примечание. Стандартные значения z_p: 40; 45; 50; 56; 63; 71; 80; 90; 100; 112; 125; 140; 160; 180; 200; 250.

Число зубьев малого шкива z_1 выбирают из табл. 3.7 в зависимости от модуля. Число зубьев большего шкива $z_2=z_1u$.

Диаметры шкивов — диаметры окружностей, совпадающих с нейтральной линией ремня (по центру металлотроса):

$$d_1=mz_1; \quad d_2=mz_2. \qquad (3.95)$$

Межосевое расстояние выбирают предварительно, исходя из условия $a_{min} \leqslant a \leqslant a_{max}$:

$$a_{min} = 0{,}5\,(d_1 + d_2) + 2m; \quad a_{max} = 2\,(d_1 + d_2). \tag{3.96}$$

Длину ремня L'_p в зависимости от выбранного a предварительно определяют по формуле (3.63). По L' находят ориентировочное значение числа зубьев ремня:

$$z'_p = L'/(\pi m). \tag{3.97}$$

Полученное значение z'_p округляют до стандартного (см. примечание к табл. 3.7). В соответствии с принятым числом зубьев z_p устанавливают окончательную длину ремня

$$L_p = \pi m z_p \tag{3.98}$$

и по формуле (3.64) определяют окончательное межосевое расстояние a (с точностью до 0,1 мм).

Число зубьев ремня, находящихся в зацеплении с малым шкивом,

$$z_{p_0} = z_1 \alpha_1 / 360^\circ, \tag{3.99}$$

где α_1 — угол обхвата ремнем малого шкива [см. формулу (3.65)]. Рекомендуется принимать $z_{p_0} \geqslant 6$. При $z_{p_0} < 6$ необходимо увеличить межосевое расстояние.

Допускаемая удельная окружная сила, передаваемая зубчатым ремнем,

$$[k] = k_0 C_u C_F / C_p, \tag{3.100}$$

где k_0 — допускаемая номинальная удельная окружная сила при $u \geqslant 1$, двух шкивах и $z_{p_0} \geqslant 6$. Выбирается в зависимости от модуля m:

m, мм	2	3	4	5	7	10
k_0, Н/мм	5	10	25	35	45	60

C_u — коэффициент, вводимый только для ускоренных передач (см. [25]); C_F — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между проволоками металлотроса вследствие технологических особенностей изготовления. При расчетах принимают $C_F = 0{,}85$; C_p — коэффициент динамичности нагрузки и режима работы (см. § 3.27).

При расчете на прочность устанавливают требуемую ширину ремня b, которая без учета влияния центробежных сил

$$b = F_t/[k], \tag{3.101}$$

где $F_t = 2M_1/d_1$ — окружная сила, передаваемая ремнем. Полученное значение b округляют до большего стандартного (см. табл. 3.7).

Сила, действующая на вал, $F_в = (1{,}0 \ldots 1{,}2) F_t$.

Более полный расчет передачи зубчатым ремнем см. [17, 22].

Глава 8

ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 3.29. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Зубчатая передача относится к передачам зацеплением с непосредственным контактом пары зубчатых колес (рис. 3.76). Меньшее из колес передачи принято называть *шестерней*, а большее — *коле-*

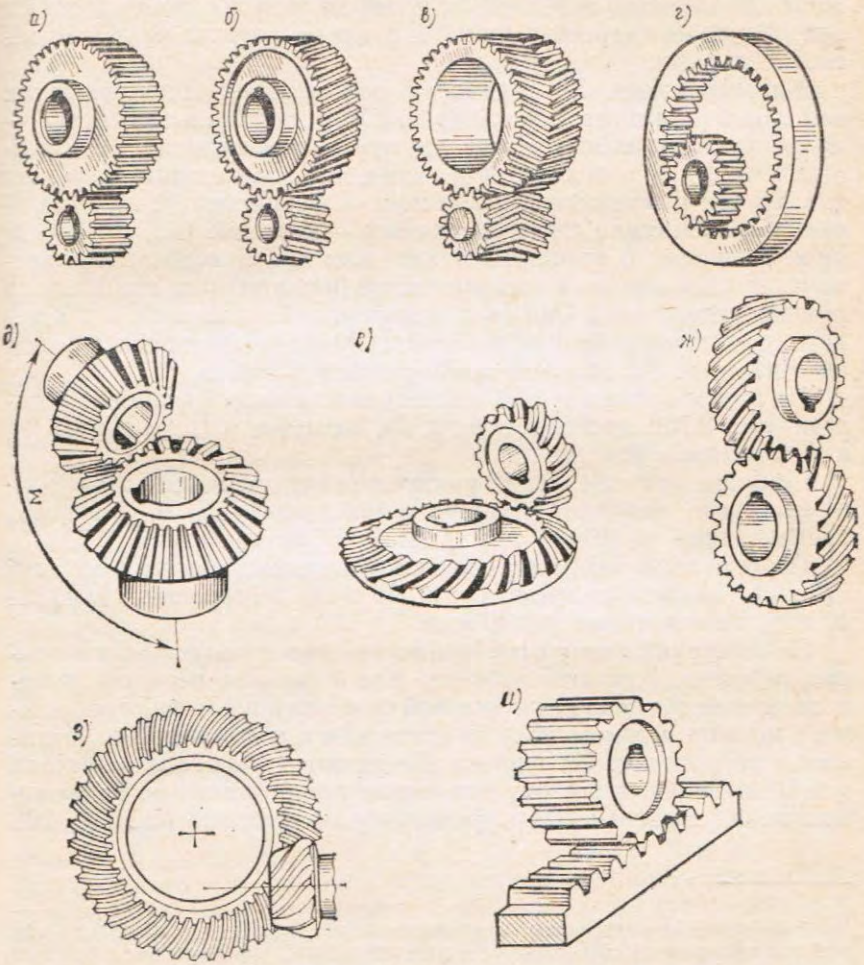


Рис. 3.76

сом. Термин «зубчатое колесо» является общим. Зубчатая передача предназначена в основном для передачи вращательного движения.

Достоинства: высокая нагрузочная способность; малые габариты; большая надежность работы; постоянство передаточного числа;

высокий к. п. д. (до 0,97...0,99 в одной ступени); простота в эксплуатации. *Недостатки*: повышенные требования к точности изготовления и монтажа; шум при больших скоростях; плохие демпфирующие свойства, не позволяющие компенсировать динамические нагрузки; возможность опасных перегрузок и недопустимость бесступенчатого регулирования скорости.

Зубчатые передачи — это самый распространенный вид механических передач в машиностроении и приборостроении. Их применяют для передачи мощности от долей до десятков тысяч киловатт при окружных скоростях до 100 м/с и передаточных числах до нескольких сотен.

Классификация. По взаимному расположению геометрических осей колес различают передачи (рис. 3.76): с *параллельными осями* — цилиндрические внешнего или внутреннего зацепления * с неподвижными (*а...г*) и подвижными осями, т. е. планетарные передачи (см. § 3.41); с *пересекающимися осями* — конические (*д*, *е*); со *скрещивающимися осями* (гиперболоидные) — винтовые (*ж*), гипоидные (*з*) и червячные. В некоторых механизмах для преобразования вращательного движения в поступательное (или наоборот) применяется реечная передача (*и*). Она является частным случаем зубчатой передачи с цилиндрическими колесами. Рейка рассматривается как одно из колес с бесконечно большим числом зубьев.

По расположению зубьев на поверхности колес различают передачи (рис. 3.76): *прямозубые* (*а*, *г*, *д*), *косозубые* (*б*), *шевронные* (*в*) и с *круговым* зубом (*е*).

По форме профиля зуба ** различают передачи *эвольвентные* и *неэвольвентные*, например передачи с зацеплением М. Л. Новикова, предложенные в 1954 г. (см. § 3.43), и *циклоидальные* ***.

По окружной скорости различают передачи: *тихоходные* ($v \leqslant 3$ м/с), *среднескоростные* ($v = 3...15$ м/с), *скоростные* ($v = 15...40$ м/с), *быстроходные* ($v > 40$ м/с).

По конструктивному оформлению различают *открытые* и *закрытые* передачи. Закрытая зубчатая или червячная передача, предназначенная для понижения угловой скорости и повышения вращающего момента ведомого вала по сравнению с валом ведущим, называется *редуктором*. Их широко применяют в различных отраслях машиностроения, и поэтому они весьма разнообразны по своим кинетическим схемам и конструктивному оформлению (см. [19, 30].

---

* Передачи с внутренним зацеплением более компактны, обладают более высокой нагрузочной способностью и долговечностью, чем передачи с внешним зацеплением при равных кинематических возможностях. Оба колеса этих передач имеют одинаковое направление вращения.

** Профилем называют кривые, ограничивающие боковые поверхности зубьев в их торцовом сечении.

*** Циклоидальное зацепление имеет профили зубьев, очерченные по циклоидальным кривым. Оно обеспечивает высокую точность при очень малых габаритах и нагрузках. Применяется в приборах времени. В машиностроении не применяются, поэтому здесь не рассматривается.

§ 3.30. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Основная теорема зацепления. В зубчатых передачах вращение от одного колеса другому передается силами в точках контакта боковых поверхностей зубьев. Поверхности взаимодействующих зубьев зубчатых колес, обеспечивающие *постоянное передаточное число*, называют сопряженными поверхностями зубьев. Для получения таких поверхностей профили зубьев нужно очертить кривыми, подчиняющимися определенным законам. Эти законы вытекают из основной теоремы зацепления: *общая нормаль пп к профилям зубьев, проведенная через точку их касания, в любой момент зацепления проходит через полюс зацепления П, делящий межосевую линию O_1O_2 на отрезки, обратно пропорциональные угловым скоростям.*

Для доказательства теоремы рассмотрим пару сопряженных зубьев в зацеплении (рис. 3.77). Профили зубьев шестерни и колеса касаются в точке K. Расстояние a_w между центрами вращения O_1 и O_2 неизменно. Проведем через точку K общие для обоих профилей касательную tt и нормаль nn. Окружные скорости точки K относительно центров O_1 и O_2: $v_1=O_1K\omega_1$ и $v_2=O_2K\omega_2$.

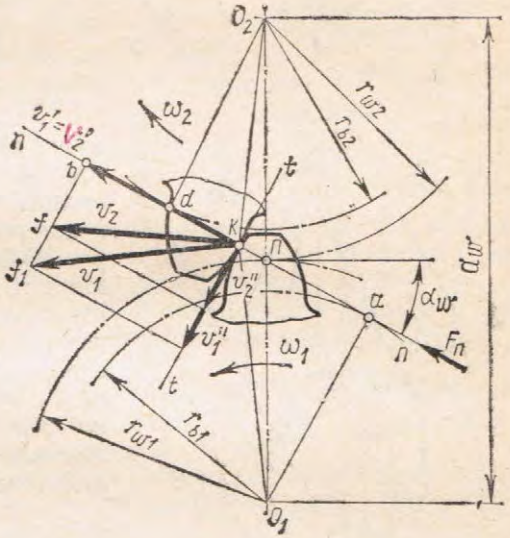


Рис. 3.77

Разложим v_1 и v_2 на составляющие v_1' и v_2' по направлению нормали nn и составляющие v_1'' и v_2' по направлению касательной tt. Для обеспечения постоянства касания профилей необходимо соблюдать условие $v_1'=v_2'$, в противном случае при $v_1'<v_2'$ зуб шестерни отстанет от зуба колеса, а при $v_1'>v_2'$ произойдет врезание зубьев. Опустим из центров O_1 и O_2 перпендикуляры O_1a и O_2d на нормаль nn. Из подобия треугольников bf_1K и aKO_1 находим $v_1'/v_1=O_1a/O_1K$, откуда $v_1'=(v_1/O_1K)O_1a=\omega_1O_1a$.

Из подобия треугольников bfK и dKO_2 находим $v_2'/v_2=O_2d/O_2K$, откуда $v_2'=(v_2/O_2K)O_2d=\omega_2O_2d$. Но $v_1'=v_2'$; следовательно, $\omega_1O_1a=\omega_2O_2d$, а передаточное число $u=\omega_1/\omega_2=O_2d/O_1a$.

Нормаль nn пересекает межосевую линию O_1O_2 в точке $П$, называемой *полюсом зацепления*. Из подобия треугольников $O_2Пd$ и

$O_1Па$ находим $O_2d/O_1a = O_2П/O_1П$, поэтому

$$u = \omega_1/\omega_2 = O_2П/O_1П = \text{const}. \qquad (3.102)$$

Теорема доказана. Следствие. Постоянное передаточное число пары зубчатых колес обеспечивается тем, что полюс зацепления $П$ сохраняет неизменным свое положение на межосевой линии, так как при вращении колес положение центров O_1 и O_2 не меняется.

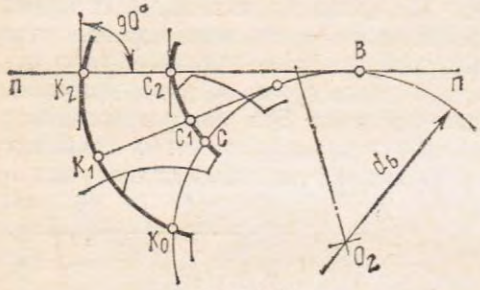


Рис. 3.78

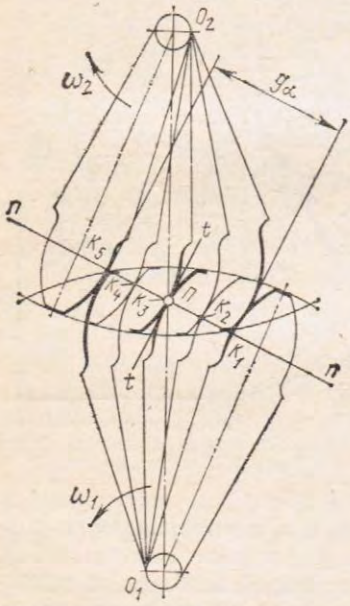


Рис. 3.79

Из теоретически возможных профилей, удовлетворяющих требованиям основной теоремы зацепления, преимущественное применение в машиностроении получили *эвольвентные профили* (эвольвентное зацепление) *, так как их легко получить при нарезании зубьев простым инструментом реечного типа. Кроме того, эвольвентное зацепление допускает некоторое изменение межосевого расстояния a_w, которое может возникнуть в результате неточности изготовления и монтажа, без нарушения правильности зацепления; обеспечивает сцепление данного колеса с другими колесами, имеющими любое число зубьев при одинаковом модуле, и постоянство давления на зубья.

Эвольвента и ее свойства (рис. 3.78). *Эвольвентой* (разверткой круга) называется кривая, описываемая точкой K прямой nn, перекатывающейся без скольжения по окружности. Любая точка прямой опишет кривую, которая будет эвольвентой. Прямая nn называется *производящей прямой*, а окружность, по которой перекатывается прямая,— *основной окружностью* для данной эвольвенты, ее диаметр обозначается d_b. Профили зуба образуются двумя симметричными эвольвентами.

Свойства эвольвенты: 1) производящая прямая во всех положениях касательна к основной окружности и нормальна ко всем производимым ею эвольвентам; 2) отрезок производящей прямой от эволь-

* Эвольвентное зацепление предложено Л. Эйлером в 1760 г.

венты до точки касания с основной окружностью (например, K_2B) является радиусом кривизны эвольвенты ρ в соответствующей ее точке (K_2); 3) с увеличением диаметра d_b эвольвента становится все более пологой, а при $d_b=\infty$ обращается в прямую; 4) расстояния между эвольвентами по основной окружности и по нормали равны между собой (например, длина дуги K_0C равна длине отрезка K_2C_2).

Линия зацепления и угол зацепления. Проведем из центров O_1 и O_2 (см. рис. 3.77) радиусами O_1a и O_2d окружности. Тогда на основании первого свойства эвольвенты можно утверждать, что полученные окружности являются основными с радиусами r_{b_1} и r_{b_2}, а общая нормаль nn — производящей прямой эвольвент обоих профилей.

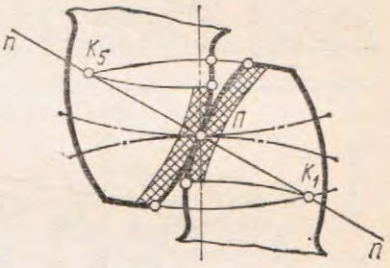


Рис. 3.80

При вращении колес точка зацепления K_3 эвольвентных профилей перемещается по общей нормали nn (рис. 3.79). Таким образом, общая нормаль nn (см. рис. 3.77) — это траектория общей точки контакта зубьев при ее движении и называется *линией зацепления*. Так как сила давления F_n профиля зуба шестерни на профиль зуба колеса может передаваться только по общей нормали nn к обоим профилям, то линия зацепления является одновременно линией давления. Длина активной линии зацепления g_α (рис. 3.79) — это отрезок линии зацепления, отсекаемый окружностям вершин зубьев обоих колес. Он определяет начало (точка K_1) и конец (точка K_5) зацепления зубьев.

Острый угол α_w (см. рис. 3.77) между линией зацепления и прямой, перпендикулярной межосевой линии, называется *углом зацепления*. Его значение стандартизовано: $\alpha_w=20°$.

Скольжение взаимодействующих зубьев. Зацепление двух зубьев происходит по рабочим участкам профилей (рис. 3.80, заштрихованные участки), которые определяют графически путем переноса конечных точек K_1 и K_5 (см. рис. 3.79) линии зацепления на профили зубьев. При вращении колес вследствие неравенства касательных составляющих v_1'' и v_2'' окружных скоростей (см. рис. 3.77) возникает относительное скольжение рабочих участков профилей. Различие значений v_1'' и v_2'' объясняется тем, что эвольвенты профилей взаимодействуют дугами различной длины. Чем дальше от полюса, тем больше разница в соответствующих дугах и больше скольжение. Максимальное скольжение наблюдается в крайних точках зацепления (на ножках и головках зубьев). В полюсе зацепления скольжения нет ($v_1''=v_2''$). При переходе через полюс изменяется направление скольжения. Скольжение сопровождается трением, которое является причиной потерь в зацеплении и износа зубьев.

§ 3.31. ЗАЦЕПЛЕНИЕ ДВУХ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ КОЛЕС

Эвольвентное зацепление колес характеризуется следующими основными элементами и параметрами.

Начальные окружности (см. рис. 3.77) относятся только к зубчатой передаче. Обозначим отрезки $O_1П$ и $O_2П$ через r_{w1} и r_{w2} и представим их радиусами окружностей, имеющих постоянное касание в полюсе зацепления $П$, тогда согласно основной теореме зацепления $\omega_1/\omega_2=r_{w2}/r_{w1}$, откуда получаем равенство окружных скоростей $\omega_1 r_{w1}=\omega_2 r_{w2}$. Это значит, что при вращении зацепленных зубчатых колес окружности радиусов r_{w1} и r_{w2} перекатываются одна по другой без скольжения. Эти окружности называют *начальными*. Начальные окружности являются сопряженными, т. е. это понятие относится к паре колес, находящихся в зацеплении. При изменении межосевого расстояния a_w (рис. 3.81) диаметры начальных окружностей d_{w1} и d_{w2} тоже соответственно изменяются, так как $a_w=(d_{w1}+d_{w2})/2$. Таким образом, у пары колес может быть сколько угодно начальных окружностей. У отдельно взятого колеса начальная окружность неизвестна (не существует) до тех пор, пока неизвестны парное колесо и a_w.

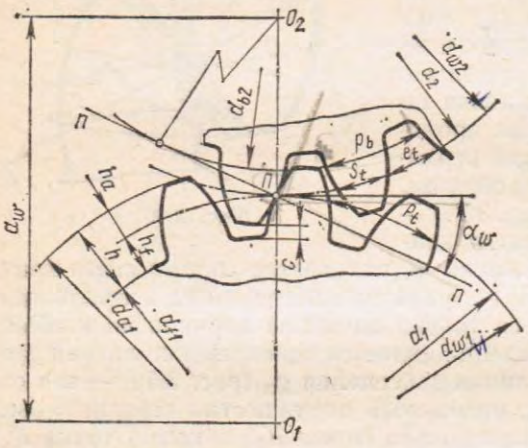


Рис. 3.81

Делительная окружность принадлежит отдельно взятому колесу и получается при его зацеплении со стандартной рейкой (см. § 3.32). Таким образом, окружность, являющаяся начальной при зацеплении с рейкой, называется *делительной*; ее диаметр обозначается d. На делительной окружности шаг зубчатого колеса равен шагу рейки, а угол зацепления α_w — углу профиля рейки α. При изменении a_w диаметр d не изменяется. Если в передаче $a_w=(d_1+d_2)/2$, то начальные и делительные окружности совпадают ($d_w=d$), что характерно для большинства зубчатых передач. В дальнейшем рассматривается именно такой случай зацепления.

Окружность вершин зубьев — это окружность, ограничивающая высоту зубьев; ее диаметр обозначается d_a.

Окружность впадин зубьев — это окружность, ограничивающая глубину впадин; ее диаметр обозначается d_f.

Окружной шаг зубьев p_t — расстояние между одноименными профилями соседних зубьев по дуге делительной или любой другой концентрической окружности зубчатого колеса. Различают дели-

тельный, основной и другие окружные шаги зубьев, соответствующие делительной, основной и другим концентрическим окружностям зубчатого колеса. Значение окружного шага зависит от того, по какой из окружностей он измеряется. По любой окружности $p_t = s_t + e_t$, где s_t — окружная толщина зуба; e_t — окружная ширина впадины. На рис. 3.81 шаг p_t, а также s_t и e_t показаны по делительной окружности, на которой s_t и e_t равны между собой, а основной шаг p_b показан на основной окружности.

Окружной модуль зубьев m_t — линейная величина в π раз меньше шага, измеренного по делительной окружности: $m_t = p_t/\pi$. Для удобства расчетов и измерения зубчатых колес модуль выражают через делительный диаметр d и число зубьев z. Длина делительной окружности $\pi d = p_t z$, откуда $d = p_t z/\pi = m_t z = mz$, или

$$m = d/z, \tag{3.103}$$

где m — расчетный модуль цилиндрического зубчатого колеса.

Модуль — это часть делительного диаметра, приходящаяся на один зуб. Он является основным параметром зубчатой передачи, определяющим ее размеры. Для пары зацепляющихся колес модуль должен быть одинаковым.

Для обеспечения взаимозаменяемости зубчатых колес и унификации зуборезного инструмента значения m стандартизованы. Значение модулей по СТ СЭВ 310—76 (выборка) m (мм): 0,5...1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0; 5,0; 6,0; 8,0; 10,0...100.

Высота зуба h — расстояние между окружностями вершин и впадин зубьев цилиндрического зубчатого колеса: $h = h_a + h_f$, где h_a — высота головки; h_f — высота ножки зуба.

Коэффициент торцового перекрытия ε_α — это отношение длины активной линии зацепления g_α (см. рис. 3.79) к основному шагу p_b:

$$\varepsilon_\alpha = g_\alpha/p_b.$$

Для непрерывного зацепления и плавного хода передачи необходимо, чтобы до выхода из зацепления одной пары зубьев другая пара зубьев вошла в зацепление, т. е. попала на активную линию зацепления. Только в этом случае обеспечивается перекрытие работы одной пары зубьев другой и соблюдается условие непрерывной работы передачи: $\varepsilon_\alpha > 1$. Если $\varepsilon_\alpha < 1$, то произойдет размыкание контакта между зубьями.

Коэффициент ε_α характеризует плавность зацепления. Он показывает, сколько зубьев в среднем находится одновременно в зацеплении. Например, при $\varepsilon_\alpha = 1{,}4$ в течение 40% времени в зацеплении находятся две пары зубьев, а в течение 60% времени — одна. Таким образом, с увеличением ε_α увеличивается время работы передачи двумя парами зубьев, что повышает плавность хода и нагрузочную способность.

Для зубчатых передач без смещения коэффициент ε_α определяют по формуле

$$\varepsilon_\alpha \approx [1{,}88 - 3{,}2\,(1/z_1 + 1/z_2)]\cos\beta, \tag{3.104}$$

где z_1 и z_2 — числа зубьев шестерни и колеса; β — угол наклона линии зуба косозубого колеса. Для прямозубых колес $\cos\beta=1$. Из формулы (3.104) следует, что значение ε_α зависит от числа зубьев z и угла β. С увеличением z увеличивается ε_α, а с увеличением β уменьшается ε_α, что является одной из причин ограничения больших углов β (см. § 3.36).

§ 3.32. ЗАЦЕПЛЕНИЕ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА С РЕЙКОЙ

При увеличении числа зубьев до бесконечности колесо превращается в рейку, а эвольвентный профиль зуба — в прямолинейный, нормальный к линии зацепления (рис. 3.82), т. е. начальная окружность колеса обращается в прямую линию, называемую *делительной прямой рейки*. При работе реечной передачи делительная прямая

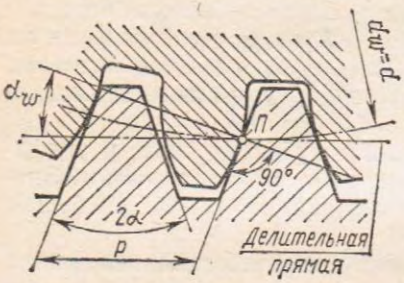


Рис. 3.82

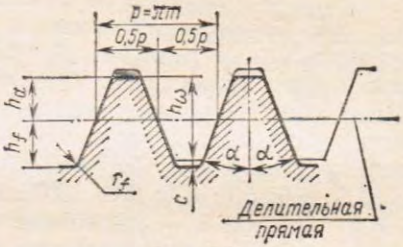


Рис. 3.83

рейки проходит через полюс зацепления $П$ и перекатывается без скольжения по начальной окружности колеса. Профиль зуба рейки прямолинейный, трапецеидальной формы, с углом 2α между боковыми сторонами.

Возможность зацепления эвольвентного зубчатого колеса с рейкой используется для нарезания зубчатых колес методом обкатки *.

Исходный контур. Исходным контуром называется контур рейки, дающий правильное беззазорное зацепление с зубчатым колесом. Этот контур положен в основу проектирования зубчатых передач и профилирования зуборезного инструмента. Исходный контур представляет собой зубчатую рейку с прямолинейным профилем (рис. 3.83). Форма и размеры нормального (без смещения, см. § 3.34) номинального исходного контура на цилиндрические колеса установлены СТ СЭВ 308—76. Параметры исходного контура: угол профиля $\alpha=20°$; высота головки $h_a=m$; высота ножки $h_f=1{,}25\,m$; глубина захода зубьев в паре исходных контуров $h_w=2\,m$ — эта рабочая часть рейки, т. е. то наибольшее линейное значение, на которое зубья одного колеса заходят во впадину другого; радиус кривизны переходной кривой $r_f=0{,}38\,m$; радиальный зазор $c=0{,}25\,m$.

* Обкатка — это движение, при котором рейка (режущий инструмент) и заготовка как бы находятся в зацеплении.

Исходный контур полностью определяет профили зубьев всех колес нормального зацепления и обеспечивает возможность их любого сочетания при одинаковом модуле.

§ 3.33. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗГОТОВЛЕНИИ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

В зависимости от материала и размеров колес заготовки для них могут быть получены литьем, ковкой или штамповкой. Зубья колес изготовляют накатыванием, нарезанием, реже литьем.

Накатывание зубьев. Накатывание — это образование зубьев на специальном прокатном стане в результате пластических деформаций нагретой до температуры 1000...1100°С заготовки. Деформирование заготовки производится валками, изготовленными в виде зуб-

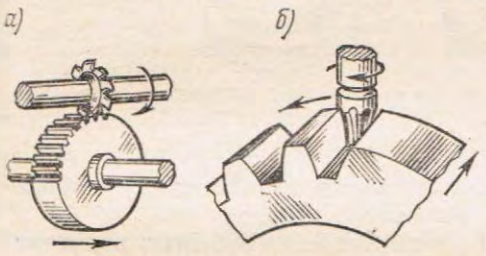


Рис. 3.84

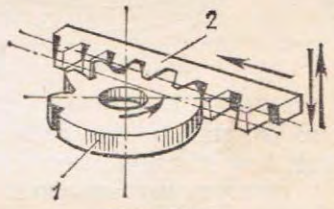


Рис. 3.85

чатых колес эвольвентного профиля. После накатывания улучшается структура поверхностного слоя металла (создается наклепанный слой), что значительно повышает износостойкость и прочность зубчатых колес. Применяется в массовом производстве для изготовления зубчатых колес 7-й и 8-й степени точности (см. ниже) с модулем до 5 мм.

Нарезание зубьев. Существует два метода нарезания зубьев — копирование и обкатка.

Метод копирования основан на прорезании впадин между зубьями дисковой модульной (рис. 3.84, *а*) или пальцевой (рис. 3.84, *б*) фрезами, форма режущих кромок которых соответствует форме впадин зуба колеса. После нарезания впадин заготовку вручную поворачивают на угол $360°/z$. Это малопроизводительный и неточный метод. Применяется в единичном производстве.

Метод обкатки основан на воспроизведении зацепления зубчатой пары. Одной из зубчатых деталей является обрабатываемая заготовка, а второй — режущий инструмент, например инструментальная рейка. В процесс нарезания заготовка *1* (рис. 3.85) вращается вокруг своей оси, а рейка *2* совершает возвратно-поступательное движение по вертикали и поступательное движение параллельно касательной к заготовке. В качестве режущего инструмента применяют червячные фрезы, имеющие в осевом сечении форму рейки (рис. 3.86), зуборезные долбяки (рис. 3.87) и др. Этот метод обеспечивает

высокую производительность и точность вследствие непрерывности процесса обкатки. Имеет основное применение при нарезании зубьев. Нарезание зубьев конических колес методом обкатки (рис. 3.88) производится строганием (*а*), фрезерованием (*б*) инструментом с прямобочным профилем или резцовыми головками (см. рис. 3.110).

Отделка зубьев. Зубья зубчатых колес 5...7-й степени точности после нарезания подвергают отделке. Способы отделочной обработ-

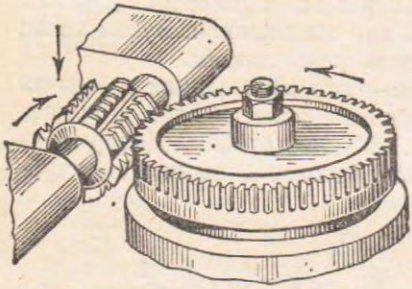


Рис. 3.86

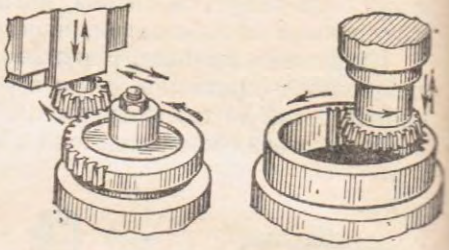


Рис. 3.87

ки: обкатка, шевингование, приработка, шлифование, хонингование, полирование, электрополирование и др.

Точность изготовления. При изготовлении зубчатых колес неизбежны погрешности, например отклонение шага и формы профиля зубьев, биение колес и др., которые вызывают дополнительные динамические нагрузки и шум при работе. Точность зубчатых передач

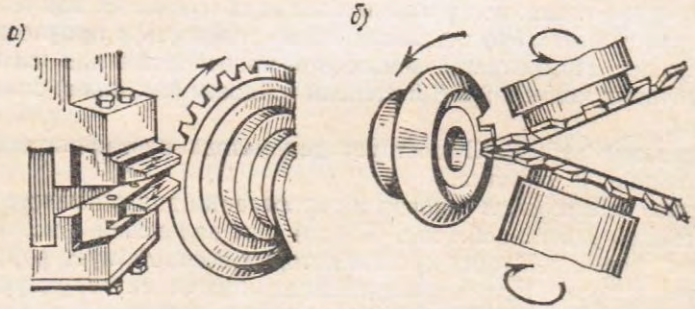


Рис. 3.88

регламентируется стандартами (ГОСТ 1643—72 для цилиндрических и СТ СЭВ 186—75 для конических передач), которые устанавливают 12 степеней точности, обозначаемых в порядке убывания точности цифрами 1, 2, 3, . . . , 12. Наибольшее распространение имеют 6-я (высокой точности), 7-я (точные), 8-я (средней точности) — передачи общего машиностроения; 9-я (пониженной точности) — обычно открытые передачи. Выбор степени точности производят в зависимости от окружной скорости колес v (табл. 3.8).

Таблица 3.8

Степень точности	Окружная скорость v, м/с			
	прямых зубьев		непрямых зубьев	
	цилиндрическая передача	коническая передача	цилиндрическая передача	коническая передача
6	До 15	До 12	До 30	До 20
7	» 10	» 8	» 15	» 10
8	» 6	» 4	» 10	» 7
9	» 2	» 1,5	» 4	» 3

Кроме степеней точности стандартами установлены показатели и нормы бокового зазора в зацеплении, исключающие заклинивание и обеспечивающие свободный поворот колес. Значение зазора регламентируется шестью видами сопряжения зубчатых колес: H — нулевой зазор; E — весьма малый зазор; C и D — уменьшенный зазор; B — нормальный зазор; A — увеличенный зазор. В большинстве передач предусматривается нормальный зазор. Нужно отметить, что значение бокового зазора определяется не степенью точности передачи, а ее назначением и условиями эксплуатации (реверсивность, быстроходность, температура, условия смазки и др.).

Подрезание зубьев. Подрезание зубьев возникает при нарезании методом обкатки колес с малым числом зубьев, т. е. если в нарезаемом колесе число зубьев z меньше минимально допустимого z_{min}. Подрезание заключается в том, что вершины зубьев режущего инструмента внедряются в ножки зубьев нарезаемого колеса.

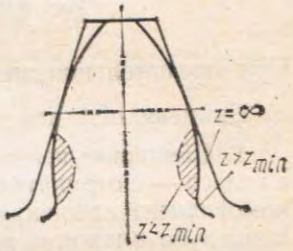


Рис. 3.89

На рис. 3.89 показано изменение формы прямого зуба в зависимости от числа зубьев нормального эвольвентного колеса. При $z=\infty$ колесо превращается в рейку. С уменьшением z уменьшается толщина зуба у основания и вершины, а кривизна эвольвентного профиля увеличивается. При дальнейшем уменьшении z ($z<z_{min}$) появляется подрезание ножки зуба; изгибная прочность зуба резко снижается и возрастает износ из-за уменьшения длины активного участка профиля (срезается часть эвольвенты у ножки зуба). По границе отсутствия подрезания устанавливается минимально допустимое число зубьев $z_{min}=17$. При необходимости нарезания зубьев меньше z_{min} для устранения подрезания применяют зубчатые колеса со смещением.

§ 3.34. ПОНЯТИЕ О ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ СО СМЕЩЕНИЕМ

Для устранения подрезания зубьев при $z<z_{min}$, для повышения изгибной и контактной прочности, а также вписывания зубчатых передач с любым числом зубьев в заданное межосевое расстояние

применяют зубчатые колеса со смещением. По сравнению с нормальным зацеплением профили зубчатых колес со смещением получаются очерчиванием их более выгодными участками эвольвенты той же основной окружности. Такие колеса получаются в результате некоторого смещения рейки (режущего инструмента) в радиальном направлении, поэтому они и называются колесами со смещением. Смещение рейки от центра колеса считают положительным, а к центру — отрицательным. Смещение характеризуется коэффициентом смещения x.

На рис. 3.90 показаны три положения рейки при нарезании зубьев. При нарезании без смещения ($x=0$) получаем нормальный профиль. При положительном смещении ($x>0$) профиль зуба очерчивается более удаленным участком эвольвенты (более выгодным). При этом уменьшается кривизна эвольвентного профиля (увеличивается радиус кривизны эвольвенты) и зуб у основания утолщается. В результате этого изгибная и контактная прочность зуба повышается, а также устраняется подрезание при малом числе зубьев (можно понизить z_{min} до 7...8). При отрицательном смещении ($x<0$) происходит обратное явление.

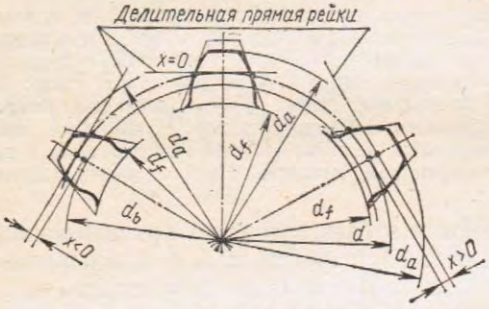


Рис. 3.90

Применяются два типа передач со смещением:

1. Шестерню изготовляют с положительным смещением $x_1>0$, а колесо — с отрицательным $x_2<0$, но так, что $x_1=x_2$ или суммарный коэффициент смещения $x_\Sigma=x_1+x_2=0$. При любом смещении толщина зуба и ширина впадины не одинаковы, но их сумма по делительной окружности равна шагу p. В зацеплении зубчатой пары при $x_\Sigma=0$ делительные окружности соприкасаются и являются начальными, как в передаче без смещения. Не изменяется также межосевое расстояние a_w и высота зуба h, но изменяется соотношение высоты головки и ножки. Такой вид смещения позволяет получить примерно равную прочность зубьев шестерни и колеса на изгиб и существенно увеличить допускаемую нагрузку по изгибу.

2. Суммарное смещение $x_\Sigma>0$, а также $x_1>0$ и $x_2>0$. В этом случае делительная толщина зубьев шестерни и колеса больше $0{,}5\,p$, а ширина впадин меньше $0{,}5\,p$. Поэтому делительные окружности не могут соприкасаться; зубчатые колеса необходимо раздвинуть, при этом возникнут новые начальные окружности, больше, чем делительные ($d_w>d$). Межосевое расстояние a_w увеличивается, а следовательно, увеличивается и угол зацепления α_w, который станет больше профильного угла инструмента α ($\alpha_w>\alpha$). При $x_\Sigma>0$ можно более широко влиять на различные параметры зацепления, а также

повысить контактную прочность. В этом достоинство такого вида смещения.

Зубчатые колеса со смещением изготовляют стандартным инструментом на тех же станках, что и колеса без смещения.

§ 3.35. МАТЕРИАЛЫ И КОНСТРУКЦИИ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Материалы. Материал зубчатых колес выбирают в зависимости от назначения и условия работы передачи. В качестве материалов зубчатых колес применяют легированные или углеродистые стали, чугуны и пластмассы.

Стали. Термически обработанные стали, механические характеристики которых даны в табл. 3.9, являются основным материалом для зубчатых колес. Термообработку производят для увеличения твердости. В зависимости от твердости рабочих поверхностей зубьев зубчатые колеса разделяются на две группы.

Таблица 3.9

Марка стали	Размеры, мм		Твердость		Предел прочности $\sigma_в$, МПа	Предел текучести $\sigma_т$, МПа	Термообработка
	d шестерни	b колеса	сердцевины HB	поверхности HRC			
	не более						
Заготовка — поковка (штамповка или прокат)							
45	Любой	Любая	179...207	—	600	320	Нормализация
45	125	30	235...262	—	780	540	Улучшение
45	80	50	269...302	—	890	650	»
40Х	200	125	235...262	—	790	640	»
40Х	125	80	269...302	—	900	750	»
40Х	125	80	269...302	45...50	900	750	Улучшение + ТВЧ
40ХН, 35ХМ	315	200	235...262	—	800	630	Улучшение
40ХН, 35ХМ	200	125	269...302	—	920	750	»
40ХН, 35ХМ	200	125	260...302	48...53	920	750	Улучшение + ТВЧ
45ХЦ	315	200	235...262	—	830	660	Улучшение
45ХЦ	200	125	269...302	—	950	780	»
40ХНМА	125	80	269...302	50...56	980	780	Улучшение + + азотирование
18ХГТ, 20ХНМ	200	125	30...43	56...63	1000	800	Цементация + + закалка
Стальное литье							
35Л	Любой	Любая	163...207	—	550	270	Нормализация
45Л	315	200	207...235	—	680	440	Улучшение
50ГЛ	315	200	235...262	—	850	500	»

Примечание. В таблице $d = d_{a1} + 6$ мм и $d = d_{ae1} + 6$ мм — диаметр заготовки цилиндрической и конической шестерни; $b = b_2 + 5$ мм — ширина заготовки колеса.

Первая группа — колеса с твердостью зубьев $H \leqslant$ HB 350. Термообработка — нормализация или улучшение — производится до нарезания зубьев. При этом можно получить высокую точность без применения отделки зубьев. Колеса хорошо прирабатываются и не подвержены хрупкому разрушению при динамических нагрузках. К недостаткам следует отнести сравнительно невысокую прочность, вследствие чего передачи с такими колесами получаются относительно больших размеров. Применяют в низконагруженных передачах, а также в передачах, габариты и масса которых не ограничены

Вторая группа — колеса с твердостью зубьев $H >$ HB 350 ($H >$ HRC 35) *. Термообработка — объемная закалка, закалка ТВЧ, цементация, азотирование и др. Высокая твердость зубьев позволяет в несколько (до 4 раз) повысить нагрузочную способность передачи по сравнению с первой группой. Нарезание зубьев производится до термообработки, а отделка — после термообработки. Колеса плохо прирабатываются, поэтому требуют повышенной точности изготовления.

Применяют в средне- и высоконагруженных передачах, а также при повышенных требованиях к габаритам и массе передачи.

В общем машиностроении экономически выгодно применять передачи с твердостью зубьев $H \leqslant$ HB350. При выборе материала для шестерни и колеса следует ориентироваться на применение одной и той же марки стали, но с различной твердостью (различной термообработкой) **. Для лучшей приработки зубьев и равномерного их износа для прямозубой передачи рекомендуется твердость материала шестерни выбирать на 20...30 единиц HB больше, чем для колеса: $HB_1 \geqslant HB_2 + 20...30$. Эта рекомендация вызвана тем, что шестерня за один оборот колеса входит в зацепление с ним в передаточное число раз больше, а поэтому возможность усталостного разрушения ее зубьев выше. Для косозубых и шевронных передач материал шестерни целесообразно выбирать с твердостью, значительно превышающей твердость материала колеса — не менее чем на 50...80 единиц HB : $HB_1 \geqslant HB_2 + 50...80$. Это позволяет существенно повысить нагрузочную способность косозубых передач. При твердости $H \geqslant$ HRC45 обоих колес не требуется обеспечивать разную твердость материала шестерни и колеса.

Чугуны. Рекомендуются серые чугуны СЧ 20, СЧ 35 и высокопрочный чугун ВЧ 30-2. Они хорошо противостоят усталостному выкрашиванию при плохой смазке, но имеют пониженную прочность при изгибе. Применяются для изготовления крупногабаритных колес тихоходных открытых передач.

Пластмассы. Рекомендуются текстолит, капрон, лингофоль и др. Обычно одно из колес зубчатой пары изготовляют из пластмассы.

---

* При $H >$ HB 350 твердость выражается в единицах Роквелла HRC (1 HRC $\approx$ $\approx$ 10 HB).

** При выборе материала для зубчатых колес кроме твердости необходимо учитывать их размеры. Так как прокаливаемость сталей различна, то, например, углеродистые конструкционные стали при больших размерах не могут быть закалены до высокой твердости.

Пластмассовые колеса обеспечивают бесшумную и плавную работу. Применяются в низконагруженных и кинематических передачах.

Конструкции зубчатых колес. Конструкция колес зависит от способа получения и последующей обработки заготовок, размеров колес и объема их производства. Зубчатые колеса диаметром $d_a \leqslant 150$ мм изготовляют из круглого проката или из поковок плоскими (рис. 3.91, *а*) и с выступающей ступицей (рис. 3.91, *б*). При $d_a \approx$ $\approx 150...600$ мм заготовку получают штамповкой (рис. 3.92, *а*, *б*), ковкой (рис. 3.92, *в*), редко литьем и сваркой. Для уменьшения деформаций при механической и термической обработке в последнее время зубчатые колеса делают массивными (рис. 3.92, *б*).

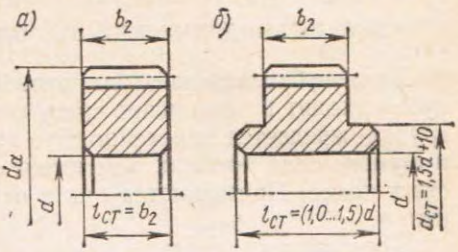


Рис. 3.91

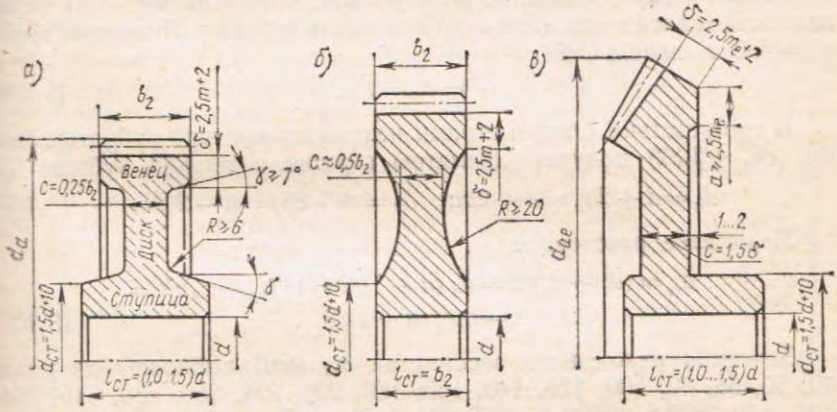


Рис. 3.92

Конические колеса диаметром $d_{ae} > 180$ мм в целях экономии легированных сталей часто изготовляют составными (рис. 3.93).

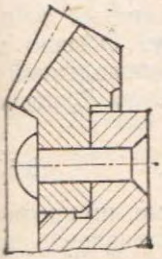


Рис. 3.93

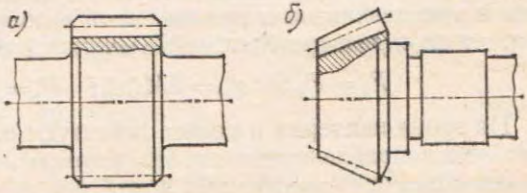


Рис. 3.94

Шестерни цилиндрические (рис. 3.94, *а*) и конические (рис. 3.94, *б*), как правило, изготовляют за одно целое с валом (вал-шестерня). Надежность вала-шестерни выше, а стоимость ниже, чем вала с насадной шестерней.

§ 3.36. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Прямозубая передача (см. рис. 3.76, *а*). В прямозубой передаче зубья входят в зацепление сразу по всей длине; следовательно, нагрузка передается мгновенно. Это явление сопровождается ударами и шумом, сила которых возрастает с увеличением окружной скорости v колес. Применяются как в открытом, так и закрытом исполнении.

Передаточное число

$$u = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1. \qquad (3.105)$$

Значение u ограничивается габаритами передачи. По СТ СЭВ 221—75 значения u: 2; 2,5; 3,15; 4; 5; 6,3; 8.

Основные геометрические размеры (см. рис. 3.81 и § 3.31) определяют в зависимости от модуля m и числа зубьев z. Диаметры делительный и начальный

$$d = d_w = mz. \qquad (3.106)$$

В соответствии с параметрами исходного контура зубчатой рейки (см. § 3.32) получим диаметры вершин и впадин зубьев:

$$d_a = d + 2h_a = d + 2m; \quad d_f = d - 2h_f = d - 2{,}5m. \qquad (3.107)$$

Межосевое расстояние

$$a_w = (d_1 + d_2)/2 = d_1(u+1)/2 = m(z_1 + z_2)/2 = \\ = mz_1(u+1)/2. \qquad (3.108)$$

Значения межосевого расстояния a_w (мм) выбирают из ряда: 40, 50, 63, 80, 100, 125, 140, 160, 180, 200, 224, 250, 280, 315, 355, 400, 450, 500, ...2500 (ГОСТ 2144—76 и СТ СЭВ 229—75).

Из формулы (3.108) находим

$$d_1 = 2a_w/(u+1); \quad d_2 = 2a_w u/(u+1). \qquad (3.109)$$

Силы в зацеплении определяют в полюсе зацепления $П$ (рис. 3.95). На шестерню действует вращающий момент M_1, который создает распределенную по контактным линиям нагрузку. Обычно эту нагрузку заменяют равнодействующей силой F_n, направленной по линии зацепления nn и приложенной в полюсе $П$. Силу F_n раскладывают на *окружную* F_t и *радиальную* F_r силы:

$$F_t = F_n \cos\alpha_w = 2M_1/d_1; \quad F_r = F_t \operatorname{tg}\alpha_w. \qquad (3.110)$$

На зубья шестерни и колеса действуют одинаковые, но противоположно направленные силы. На ведомом колесе направление силы F_t совпадает с направлением вращения, а на ведущем — противоположно ему, т. е. силы F_t на ведущем и ведомом колесах всегда на-

правлены против действия соответствующих моментов (см. рис. 3.56, *в*). Радиальные силы F_r направлены к осям вращения колес и создают «распор» в передаче.

Косозубая передача (см. рис. 3.76, *б*). Рассечем мысленно прямозубое колесо на две части средней плоскостью *nn*, перпендикулярной оси колеса, и сдвинем каждую половину относительно другой на один и тот же угол (рис. 3.96, *а*); получим двухступенчатое колесо. Работа передачи с такими колесами будет более плавной. Если увеличить число ступеней до бесконечности, то получим колесо с винтовыми или косыми зубьями с некоторым углом наклона линии зуба β (рис. 3.96, *б*). Два сопряженных колеса должны иметь равные углы β, при этом на одном колесе линия зуба должна быть правой, а на другом — левой (рис. 3.97). При работе такой передачи зубья входят в зацепление не сразу по всей длине, как в прямозубой, а постепенно; передаваемая нагрузка распределяется на несколько зубьев. В результате по сравнению с прямозубой повышается нагрузочная способность, увеличивается плавность работы передачи и уменьшается шум. Поэтому косозубые передачи имеют преимущественное распространение.

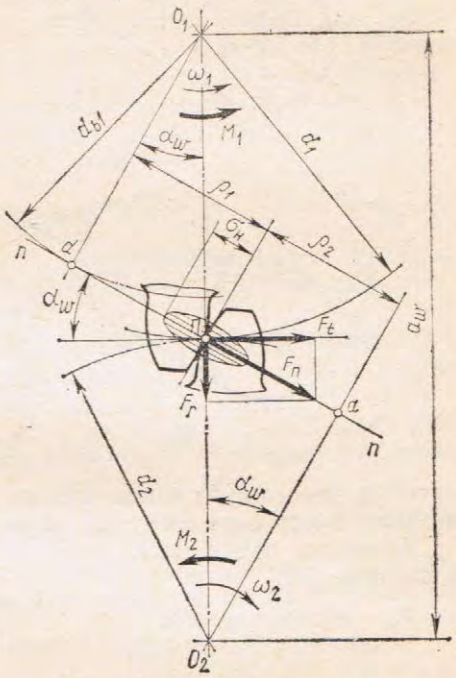


Рис. 3.95

С увеличением угла наклона β линии зуба плавность зацепления и нагрузочная способность передачи увеличиваются, но при этом увеличивается и осевая сила F_a, что нежелательно (см. ниже). Поэтому в косозубых передачах принимают угол $\beta = 7...20°$.

Основные геометрические размеры зависят от модуля и числа зубьев. При расчете косозубых колес учитывают два шага (рис. 3.98): нормальный шаг зубьев p_n — в нормальном сечении *nn* и окружной шаг p_t — в торцовом сечении *tt*; при этом $p_t = p_n/\cos\beta$. Соответственно шагам имеем два модуля зубьев: $m_t = p_t/\pi$ и $m_n = p_n/\pi$, при этом

$$m_t = m_n/\cos\beta, \qquad (3.111)$$

где m_t и m_n — окружной и нормальный модули зубьев. За расчетный принимают модуль m_n, значение которого должно соответствовать стандартному. Это объясняется следующим. Для нарезания

косых зубьев используют инструмент того же профиля, что и для нарезания прямых. Наклон зуба образуют соответствующим поворотом инструмента относительно заготовки на угол β. Поэтому

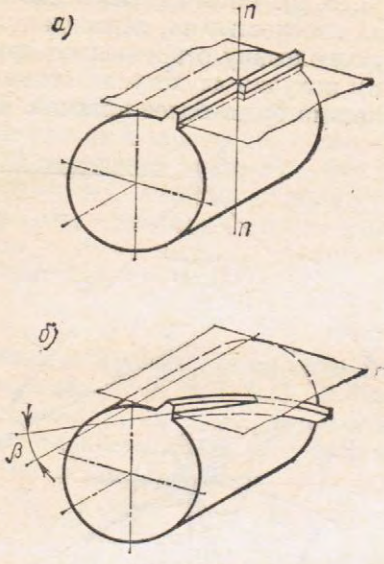


Рис. 3.96

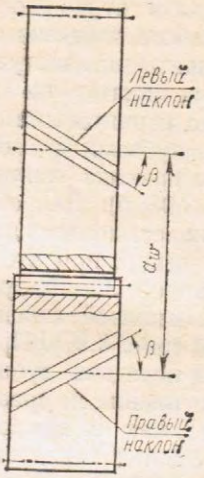


Рис. 3.97

профиль косого зуба в нормальном сечении совпадает с профилем прямого зуба; следовательно, $m_n = m$.

Диаметры делительный и начальный

$$d = d_w = m_t z = m_n z / \cos\beta. \qquad (3.112)$$

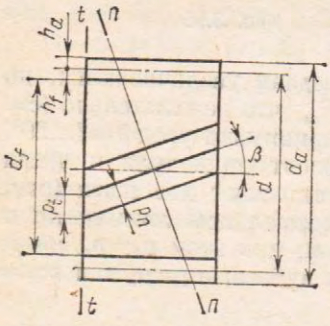


Рис. 3.98

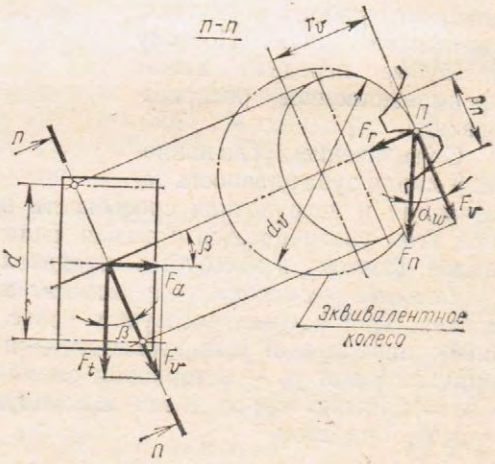


Рис. 3.99

Диаметры вершин и впадин зубьев:

$$d_a = d + 2m_n; \quad d_f = d - 2{,}5m_n. \qquad (3.113)$$

Межосевое расстояние

$$a_w = (d_1 + d_2)/2 = d_1(u+1)/2 = m_t(z_1 + z_2)/2 = \\ = m_n z_1 (u+1)/(2\cos\beta). \qquad (3.114)$$

Эквивалентное колесо. Профиль зуба определяют его размеры и форма в нормальном сечении. Форму зуба в нормальном сечении принято определять через параметры *эквивалентного* прямозубого колеса (рис. 3.99). Нормальное к линии зуба сечение *nn* делительного цилиндра * имеет форму эллипса. Радиус кривизны эллипса при зацеплении зубьев в полюсе $r_v = d/(2\cos^2\beta)$. Профиль зуба в этом сечении достаточно близко совпадает с профилем приведенного прямозубого колеса, называемого эквивалентным, делительный диаметр которого $d_v = 2r_v = d/\cos^2\beta$, а эквивалентное число зубьев $r_v = d_v/m_n = d/(m_n\cos^2\beta) = m_t z/(m_t\cos^2\beta)$
или

$$z_v = z/\cos^3\beta, \qquad (3.115)$$

где z — действительное число зубьев косозубого колеса. Увеличение z_v с увеличением β — одна из причин повышения прочности косозубых передач.

Силы в зацеплении определяют в полюсе зацепления $П$ (рис. 3.99). Сила нормального давления F_n зуба шестерни на зуб колеса направлена по линии зацепления эквивалентного прямозубого колеса и составляет угол α_w с касательной к эллипсу. Ее раскладывают на три составляющие: окружную F_t, радиальную F_r и осевую F_a силы, при этом

$$F_t = 2M_1/d_1; \quad F_r = F_t/\mathrm{tg}\,\alpha_w/\cos\beta; \quad F_a = F_t\,\mathrm{tg}\,\beta. \qquad (3.116)$$

На зубья шестерни и колеса действуют одинаковые, но противоположно направленные силы. При определении их направления учитывают направление вращения колес и направление наклона зубьев. Наличие в зацеплении осевых сил, которые дополнительно нагружают валы и подшипники, являются недостатком косозубых передач.

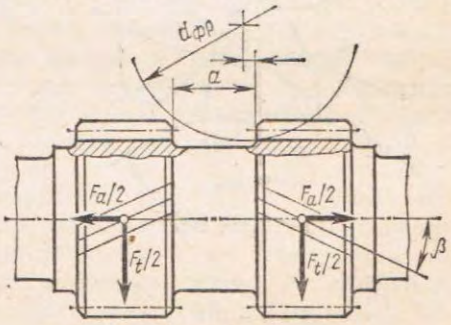


Рис. 3.100

Шевронная передача (см. рис. 3.76, *в*). Для того чтобы исключить недостаток косозубых передач (осевую силу F_a) и сохранить их преимущество, применяют шевронные передачи. В этих передачах каждая половина колеса нарезана со встречным углом наклона

* Делительный цилиндр — соосная цилиндрическая поверхность эвольвентного цилиндрического зубчатого колеса, торцовое сечение которой является делительной окружностью.

β линии зубьев (рис. 3.100). Поэтому осевые силы F_a взаимно уравновешиваются на колесе и на подшипники не передаются. Это позволяет применять у шевронных колес угол $\beta \approx 28...40°$, что повышает нагрузочную способность передачи и плавность зацепления.

Применяют в высоконагруженных быстроходных передачах. Шевронные колеса изготовляют с дорожкой в середине колеса для выхода режущего инструмента (червячной фрезы) (рис. 3.100) или без дорожки (см. рис. 3.76, *в*) (нарезаются долбяком или гребенкой со специальной заточкой). Колеса без дорожки нарезают на специальных малопроизводительных и дорогих станках, поэтому их применяют реже, чем колеса с дорожкой. Ширина *a* дорожки зависит от модуля зубьев (подробно см. [30]).

§ 3.37. ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ ЗУБЬЕВ И КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

При передаче вращающего момента в зацеплении действуют нормальная сила F_n и сила трения R_f, связанная со скольжением (рис. 3.101). Под действием этих сил зуб находится в сложном напряженном состоянии. Решающее влияние на его работоспособность оказывают контактные напряжения σ_H и напряжения изгиба σ_F^*, изменяющиеся по некоторому прерывистому циклу. Переменные напряжения являются причиной усталостного разрушения зубьев: излома и выкрашивания рабочих поверхностей. Сила трения вызывает износ и заедание зубьев.

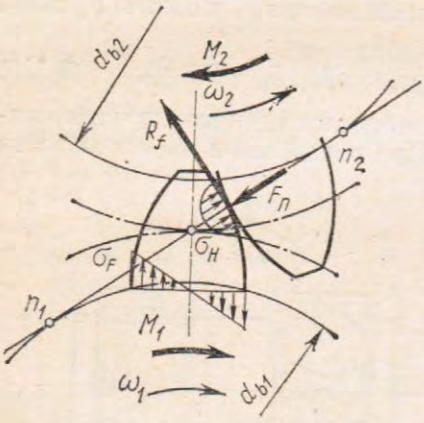


Рис. 3.101

Излом зубьев происходит при перегрузках, а также под действием переменных напряжений изгиба σ_F, вызывающих усталость материала зубьев. Усталостные трещины *2* (рис. 3.102) образуются чаще всего у основания зуба (иногда трещина распространяется к вершине зуба) на той стороне, где от изгиба возникают наибольшие



Рис. 3.102

* Индекс *F* приписывается параметрам, связанным с расчетом по напряжениям изгиба, который выполняют по ножке (от англ. «Foot») зуба.

напряжения растяжения. Для предупреждения усталостного излома *1* ограничивают напряжения изгиба σ_F, принимают колеса со смещением, увеличивают точность изготовления и монтажа передачи. Излом зубьев — основная причина выхода из строя зубьев открытых передач. Поэтому *основными критериями работоспособности и расчета открытых передач является прочность зубьев на изгиб* (усталость зубьев при изгибе).

Усталостное разрушение (выкрашивание) рабочих поверхностей зубьев — основной вид разрушения зубьев закрытых передач. Возникает под действием переменных контактных напряжений σ_H, вызывающих усталость материала зубьев. Обычно разрушение начинается вблизи полюсной линии на ножках зубьев, где возникает наибольшая сила трения, способствующая образованию микротрещин. При перекатывании зубьев масло запрессовывается в трещины и, находясь под большим внешним давлением, вызывает выкрашивание частиц металла (см. рис. 3.3). На поверхности зубьев образуются раковины (рис. 3.103, *а*), нарушающие условия возникновения сплошной масляной пленки, появляется металлический контакт, что приводит к быстрому износу и задиру зубьев.



Рис. 3.103

Для предупреждения усталостного разрушения поверхностей зубьев ограничивают контактные напряжения σ_H, повышают твердость, степень точности и др.

Так как контактные напряжения являются причиной усталостного разрушения, то *основным критерием работоспособности и расчета закрытых передач является контактная усталость рабочих поверхностей зубьев.* При этом расчет зубьев на изгиб производят как проверочный. Однако при твердости поверхностей зубьев $H > HRC50...60$ решающее значение может иметь не контактная прочность, а прочность на изгиб, которую и принимают за основной критерий работоспособности и расчета как открытых, так и закрытых передач.

В открытых передачах усталостного разрушения рабочих поверхностей зубьев не происходит, так как поверхностные слои истираются раньше, чем появляются усталостные трещины.

Износ зубьев характерен для открытых передач и закрытых, работающих в загрязненной среде. Происходит в результате попадания на зубья абразивных частиц (пыли, грязи, песчинок и др.). По мере износа первоначальный эвольвентный профиль зубьев искажается (рис. 3.103, *б*), увеличиваются зазоры в зацеплении, возникают динамические нагрузки и повышенный шум. Прочность изношенного зуба понижается вследствие уменьшения его поперечного сечения, что может привести к излому. Для предупреждения износа создают оптимальную шероховатость рабочих поверхностей

зубьев, применяют надежную защиту от загрязнения и специальные смазки (см. § 3.3).

Заедание зубьев происходит преимущественно в высоконагруженных быстроходных передачах. В месте контакта зубьев развиваются высокие давления и температура, масляная пленка разрывается и появляется металлический контакт. Здесь происходит как бы сваривание частиц металла с последующим отрывом их от менее прочной поверхности. Образовавшиеся наросты на зубьях задирают поверхности других зубьев, оставляя на них широкие и глубокие борозды в направлении скольжения (рис. 3.103, *в*). Заедание может завершиться прекращением относительного движения. Для предупреждения заедания понижают шероховатость поверхностей зубьев, повышают их твердость и применяют противозадирные масла.

§ 3.38. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ *

Расчет на контактную усталость рабочих поверхностей зубьев. Расчет производят при контакте зубьев в полюсе зацепления $П$ (см. рис. 3.95). Контакт зубьев рассматривают как контакт двух цилиндров с радиусами ρ_1 и ρ_2. При этом наибольшие контактные напряжения определяют по формуле (3.2).

Прямозубые передачи. Расчетная нагрузка на единицу длины контактной линии

$$q = F_n K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} / l_\Sigma = F_t K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} Z_\varepsilon^2 / (b_2 \cos \alpha_w),$$

где $K_{H\alpha}$ — коэффициент распределения нагрузки между зубьями (см. § 3.39), для прямозубых передач $K_{H\alpha} = 1$; $K_{H\beta}$ — коэффициент неравномерности нагрузки по ширине венца (см. табл. 3.10); K_{Hv} — коэффициент динамической нагрузки (см. § 3.39); l_Σ — суммарная длина контактных линий, которая зависит от величины ε_α и изменяется от ширины венца b_2 (при однопарном зацеплении) до $2b_2$ (при двухпарном зацеплении). При расчетах l_Σ определяют по эмпирической формуле

$$l_\Sigma = b_2 / Z_\varepsilon^2, \text{ где } Z_\varepsilon = \sqrt{(4 - \varepsilon_\alpha)/3}.$$

Приведенный радиус кривизны:

$$\rho_{пр} = \rho_1 \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2) = d_1 \sin \alpha_w u / [2 (u + 1)],$$

где ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны эвольвентных профилей зубьев в полюсе зацепления: $\rho_1 = (d_1/2) \sin \alpha_w$; $\rho_2 = (d_2/2) \sin \alpha_w = (d_1 u/2) \sin \alpha_w$.

Подставив значения q и $\rho_{пр}$ в формулу (3.2) и заменив $\sin \alpha_w \cos \alpha_w = (\sin 2\alpha_w)/2$, получим

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{E_{пр}}{\pi (1 - \nu^2)} \frac{2 Z_\varepsilon^2}{\sin 2\alpha_w} \frac{E_t K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} (u + 1)}{b_2 d_1 u}}$$

* Этот расчет регламентирован ГОСТ 21354—75. Здесь введены некоторые упрощения, мало влияющие на результаты расчетов. Кроме того, для сохранения преемственности с другими разделами учебника приняты обозначения, частично отличающиеся от стандартных.

или

$$\sigma_H = Z_м Z_H Z_\varepsilon \sqrt{F_t K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} (u+1)/(b_2 d_1 u)}, \quad (3.117)$$

где $Z_м = \sqrt{E_{пр}/[\pi(1-\nu^2)]}$ — коэффициент, учитывающий механические свойства материалов зубчатых колес, для стальных колес $Z_м = 275 \cdot 10^3$ Па$^{1/2}$; $Z_H = \sqrt{2/\sin 2\alpha_w}$ — коэффициент, учитывающий форму сопряженных поверхностей зубьев, при $\alpha_w = 20°$ $Z_H = 1{,}76$; Z_ε — коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий, для прямозубых передач среднее значение $Z_\varepsilon \approx 0{,}9$.

Выразив в формуле (3.117) F_t через главные параметры цилиндрических передач — вращающий момент на ведомом валу M_2 и межосевое расстояние a_w, т. е. $F_t = 2M_2/d_2$, где $d_2 = 2a_w u/(u+1)$ [см. формулу (3.109)] и заменив $d_1 = d_2/u$, после подстановки значений коэффициентов $Z_м$, Z_H, Z_ε и $K_{H\alpha}$ получим *формулу проверочного расчета* прямозубых передач:

$$\sigma_H = [310 \cdot 10^3/(a_w u)] \sqrt{M_2 K_{H\beta} K_{Hv} (u+1)^3/b_2} \leqslant [\sigma_H], \quad (3.118)$$

где σ_H и $[\sigma_H]$ — расчетное и допускаемое контактные напряжения, Па; M_2 — Н·м; a_w и b — м.

При проектировочном расчете определяют межосевое расстояние. a_w. Заменив в формуле (3.118) значение $b_2 = \psi_{ba} a_w$, где ψ_{ba} — коэффициент ширины (см. § 3.39), и решив ее относительно a_w, предварительно приняв $K_{Hv} = 1{,}25$, получим *формулу проектировочного расчета* прямозубых передач:

$$a_w = 4950 (u+1) \sqrt[3]{M_2 K_{H\beta}/\{([\sigma_H] u)^2 \psi_{ba}\}}. \quad (3.119)$$

Косозубые передачи. Вследствие наклона зубьев в зацеплении одновременно находится несколько пар зубьев, что уменьшает нагрузку на один зуб, повышая его прочность (снижая расчетные напряжения). Это учитывается уменьшением коэффициентов Z_H и Z_ε, среднее значение которых принимают: $Z_H = 1{,}76\cos\beta \approx \approx 1{,}71$; $Z_\varepsilon = \sqrt{1/\varepsilon_\alpha} \approx 0{,}8$. Тогда с учетом коэффициента $K_{H\alpha}$ из выражения (3.118) получим *формулу проверочного расчета* косозубых передач:

$$\sigma_H = [266 \cdot 10^3/(a_w u)] \sqrt{M_2 K_{H\alpha} K_{H\beta} K_{Hv} (u+1)^3/b_2} \leqslant [\sigma_H]. \quad (3.120)$$

Косозубые передачи работают более плавно, чем прямозубые, поэтому коэффициент K_{Hv} меньше. Предварительно приняв произведение $K_{H\alpha} K_{Hv} = 1{,}1$, по аналогии с прямозубыми передачами из выражения (3.120) получим формулу *проектировочного расчета* косозубых передач:

$$a_w = 4300 (u+1) \sqrt[3]{M_2 K_{H\beta}/[([\sigma_H] u)^2 \psi_{ba}]}. \quad (3.121)$$

Таким образом, основные размеры и массу передачи определяют из расчета по контактным напряжениям.

Расчет зубьев на изгиб. Прямозубые передачи. При выводе расчетной формулы принимают следующие допущения: вся нагрузка F_n зацепления передается одной парой зубьев (рис. 3.104), которая приложена к вершине зуба и направлена по нормали к его профилю (сила трения не учитывается); зуб рассматривают как консольную балку прямоугольного сечения, что позволяет рассчитывать его методами сопротивления материалов. Фактически зуб представляет собой балку с изменяющейся формой. Это учитывается введением в расчетные формулы теоретического коэффициента концентрации напряжений $K_т$.

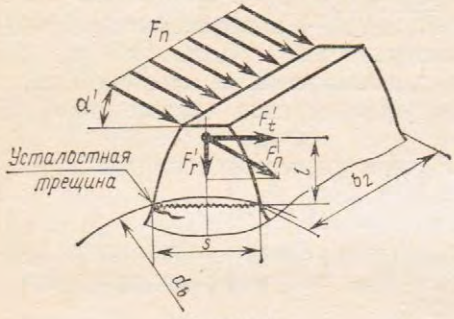


Рис. 3.104

Распределенную по ширине b_2 венца зуба нагрузку заменяют сосредоточенной силой F_n, которую переносят по линии действия на ось зуба и раскладывают на две составляющие: изгибающую зуб $F'_t = F_n \cos\alpha' = F_t \cos\alpha'/\cos\alpha_w$ и сжимающую $F'_r = F_n \sin\alpha' = F_t \sin\alpha'/\cos\alpha_w$, где α' — угол направления нормальной силы F_n. Он несколько больше угла зацепления α_w.

Напряжение изгиба в опасном сечении (вблизи хорды основной окружности), т. е. напряжение на растянутой стороне зуба, где возникают усталостные трещины,

$$\sigma_F = (F'_t l/W - F'_r/A)\, K_т,$$

где $W_{oc} = b_2 s^2/6$ — осевой момент сопротивления опасного сечения зуба; $A = b_2 s$ — площадь опасного сечения; b_2, l и s показаны на рис. 3.104. Выразим величины l и s через модуль: $l = \mu m$ и $s = \nu m$, где μ и ν — коэффициенты, учитывающие форму зуба. Тогда после подстановки в исходную формулу значений F'_t, F'_r, W и A получим

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b_2 m}\left(\frac{6\mu\cos\alpha'}{\nu^2\cos\alpha_w} - \frac{\sin\alpha'}{\nu\cos\alpha_w}\right) K_т = Y_F F_t/(b_2 m),$$

где $Y_F = [6\mu\cos\alpha'/(\nu^2\cos\alpha_w) - \sin\alpha'/(\nu\cos\alpha_w)]K_т$ — *коэффициент формы зуба.*

Далее в последнее выражение введем коэффициенты нагрузки $K_{F\beta}$ и K_{Fv}, при этом получим формулу *проверочного расчета прямозубых передач*:

$$\sigma_F = Y_F F_t K_{F\beta} K_{Fv}/(b_2 m) \leqslant [\sigma_F], \qquad (3.122)$$

где σ_F и $[\sigma_F]$ — расчетное и допускаемое напряжения изгиба, Па; F_t — Н; b_2 и m — м; $K_{F\beta}$ — коэффициент неравномерности распределения нагрузки по ширине венца (см. табл. 3.10); K_{Fv} — коэффициент динамической нагрузки (см. § 3.39).

Проверочный расчет прямозубых передач можно выполнять по известному межосевому расстоянию a_w. В этом случае для получения расчетной формулы надо в выражении (3.122) заменить F_t на $2M_2/d_2$. Тогда с учетом формулы (3.109) получим

$$\sigma_F = M_2 Y_F K_{F\beta} K_{Fv} (u+1)/(a_w b_2 m u) \leqslant [\sigma_F]. \qquad (3.123)$$

Решив выражение (3.123) относительно модуля m, при некоторых средних значениях коэффициентов Y_F, $K_{F\beta}$ и K_{Fv} получим формулу для приближенного определения модуля:

$$m \geqslant 6{,}8 M_2 (u+1)/(u a_w b_2 [\sigma_F]_2). \qquad (3.124)$$

Формула (3.124) является основной для определения m прямозубых передач, рассчитываемых на контактную усталость.

При *проектировочном расчете* открытых передач, а также закрытых с весьма ограниченным сроком службы или с высокотвердыми зубьями $H>$HRC50...60 определяют *модуль зубьев* m. Заменив в формуле (3.122) значения $F_t = 2M_2/d_2 = 2M_2/(umz_1)$ и $b_2 = \psi_{bd} d_1 = \psi_{bd} m z_1$ и решив ее относительно m, получим *формулу проектировочного расчета*:

$$m \geqslant 1{,}4 \sqrt[3]{Y_F M_2 K_{F\beta}/(u \psi_{bd} z_1^2 [\sigma_F])}, \qquad (3.125)$$

где коэффициент $1{,}4 = \sqrt[3]{2K_{Fv}}$; ψ_{ba} — коэффициент ширины колеса (см. § 3.39).

Расчет по формулам (3.122), (3.123) и (3.125) ведут по зубьям того колеса, для которого меньше отношение $[\sigma_F]/Y_F$ (зубья менее прочны). Целесообразно, чтобы $[\sigma_F]_1/Y_{F1} \approx [\sigma_F]_2/Y_{F2}$. В этом случае зубья шестерни и колеса имеют примерно равную прочность на изгиб.

К о с о з у б ы е п е р е д а ч и. Наклонное расположение зубьев увеличивает их прочность на изгиб и уменьшает динамические нагрузки. Это учитывается введением в расчетные формулы прямозубых передач поправочных коэффициентов Y_ε, Y_β и $K_{F\alpha}$.

Формула *проверочного расчета* косозубых передач

$$\sigma_F = M_2 Y_F Y_\varepsilon Y_\beta K_{F\alpha} K_{F\beta} K_{Fv} (u+1)/(a_w b_2 m_n u) \leqslant [\sigma_F], \quad (3.126)$$

где $Y_\varepsilon = 1$ — коэффициент, учитывающий перекрытие зубьев; $Y_\beta = 1 - \beta^\circ/140^\circ$ — коэффициент, учитывающий наклон зуба; $K_{F\alpha}$ — коэффициент распределения нагрузки между зубьями (см. § 3.39). Коэффициент формы зуба Y_F выбирают по эквивалентному числу зубьев z_v (см. § 3.39).

Нормальный модуль зубьев m_n определяют по аналогии с прямозубыми передачами. Приняв в качестве значений коэффициентов Y_F, Y_β, $K_{F\alpha}$, $K_{F\beta}$ и K_{Fv} некоторые средние значения, из формулы (3.126) получим

$$m_n \geqslant 5{,}8 M_2 (u+1)/(u a_w b_2 [\sigma_F]_2). \qquad (3.127)$$

При *проектировочном расчете* на изгиб косозубых передач, когда неизвестны a_w и b_2, по аналогии с прямозубыми передачами

[см. формулу (3.125)] нормальный модуль определяют по формуле

$$m_n \geqslant 1{,}12 \sqrt[3]{Y_F M_2 K_{F\beta}/(u\psi_{bd} z_1^2 [\sigma_F])}, \qquad (3.128)$$

где коэффициент

$$1{,}12 = \sqrt[3]{2K_{F\alpha} F_{F\upsilon} Y_\varepsilon}.$$

Шевронные передачи. Расчет шевронных передач на контактную усталость выполняют по формулам для расчета косозубых передач. Нормальный модуль определяют по формуле

$$m_n \geqslant 5{,}2M_2 (u+1)/(ua_w b_2 [\sigma_F]_2). \qquad (3.129)$$

§ 3.39. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ, РАСЧЕТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Основные параметры передачи. *Модуль зубьев* m нужно выбирать минимальным, так как с его увеличением растут диаметры и масса заготовок. По условиям контактной усталости при данном a_w модуль и число зубьев могут иметь различные значения, лишь бы соблюдалось равенство $m(z_1+z_2)=2a_w$. С уменьшением модуля улучшается плавность работы передачи (увеличивается коэффициент торцового перекрытия ε_α), уменьшаются шум, трудоемкость обработки колес и потери на трение (уменьшается скольжение), что увеличивает надежность против заедания, но при этом понижается прочность зубьев на изгиб. Поэтому в силовых передачах не рекомендуется брать модуль меньше 1,5 мм. В передачах редукторов общего назначения при твердости зубьев $H \leqslant$ HB350 модули нужно принимать в пределах $m=(0{,}01...0{,}02)a_w$, а при $H >$ HB350 — в пределах $m=(0{,}016...0{,}0315)a_w$ с последующей проверкой прочности зубьев по напряжениям изгиба по формуле (3.123) или (3.126). Кроме того, рекомендуется модули определять по приближенным формулам (3.124), (3.127) и (3.129). В этом случае проверка прочности зубьев по напряжениям изгиба не требуется.

Число зубьев z_1 влияет на ряд качественных показателей передачи. С увеличением z_1 повышается плавность работы передачи (возрастает коэффициент ε_α), но прочность зубьев уменьшается. С уменьшением z_1 увеличивается прочность зубьев и уменьшаются габариты передачи. Однако при $z_1<17$ появляется подрезание зубьев (см. рис. 3.89), для передач редукторов рекомендуется $z_1=20...25$.

Расчетные коэффициенты. *Коэффициенты ширины* колеса: $\psi_{bd}=b_2/d_1$ — относительно делительного диаметра шестерни и $\psi_{ba}=b_2/a_w$ — относительно межосевого расстояния — связаны зависимостью

$$\psi_{ba} = 2\psi_{bd}/(u+1). \qquad (3.130)$$

Значения ψ_{ba}: 0,1...0,25; 0,315; 0,4; 0,5; 0,63; 0,8; 1,0 (выборка из СТ СЭВ 229—75).

Рекомендуемые значения коэффициента ψ_{bd} в зависимости от расположения колеса относительно опор и твердости рабочих поверхностей зубьев H

	$H \leqslant$ НВ 350	$H >$ НВ 350
Симметричное	0,8...1,4	0,4...0,9
Несимметричное	0,6...1,2	0,3...0,6
Консольное	0,3...0,4	0,2...0,25

Примечания: 1. Большие значения при постоянных нагрузках. 2. Для шевронных передач ψ_{bd} можно увеличить в 1,3...1,4 раза.

Увеличение ψ_{bd} или ψ_{ba} позволяет уменьшить габариты и массу передачи, но требует повышенной жесткости и точности конструкции для обеспечения более равномерного распределения нагрузки по ширине венца колеса.

При твердости рабочих поверхностей зубьев менее НВ350 назначают ширину венца шестерни $b_1 = b_2 + 2...5$ мм, что важно при приработке зубьев, когда более твердая шестерня перекрывает по ширине более мягкое колесо. Кроме того, это условие учитывает возможное осевое смещение зубчатых колес из-за неточности сборки. При твердости рабочих поверхностей зубьев обоих колес более НВ350 принимают $b_1 = b_2$.

Коэффициенты $K_{H\alpha}$ и $K_{F\alpha}$ учитывают неравномерность распределения нагрузки между зубьями соответственно при расчете на контактную и изгибную усталость. Для прямозубой передачи $K_{H\alpha} = K_{F\alpha} = 1$. Для косозубой и шевронной K_α зависит от степени точности и окружной скорости передачи; при $v \leqslant 15$ м/с и 6...8-й степени точности $K_{H\alpha} = 1,02...1,12$; $K_{F\alpha} = 0,72...0,91$.

Коэффициенты $K_{H\beta}$ и $K_{F\beta}$ учитывают неравномерность распределения нагрузки по ширине зубчатого венца. Они зависят от деформации валов и самих зубьев колес. Различают начальное значение коэффициента K^0_β до приработки зубьев и значение $K_\beta < K^0_\beta$ после приработки. Зубчатые колеса считают прирабатывающимися, если твердость рабочих поверхностей зубьев хотя бы одного из зубчатых колес пары $H \leqslant$ НВ350 и окружная скорость колес $v < 15$ м/с. В этом случае неравномерность нагрузки постепенно уменьшается вследствие повышенного местного износа (приработки) и при постоянном режиме нагрузки может быть полностью устранена, т. е. происходит полная приработка зубьев. Поэтому для прирабатывающихся цилиндрических прямозубых и косозубых, а также для прямозубых конических колес при постоянном режиме нагрузки $K_{H\beta} = K_{F\beta} = 1$.

В остальных случаях, т. е. при переменном режиме нагрузки, при твердости рабочих поверхностей зубьев обоих колес более НВ350 или при любой твердости, но окружной скорости колес $v > 15$ м/с (при больших скоростях между зубьями образуется постоянный масляный слой, защищающий их от износа) зубчатые колеса считают неприрабатывающимися. Для таких колес $K_{H\beta} = K^0_{H\beta}$ и $K_{F\beta} = K^0_{F\beta}$. Значения коэффициентов $K^0_{H\beta}$ и $K^0_{F\beta}$ принимают в зависимости от твердости рабочих поверхностей зубьев расположения колес относительно опор и коэффициента ширины ψ_{bd} по

Таблица 3.10

Расположение колес относительно опор	Твердость поверхности зубьев НВ	$K^0_{H\beta}$ и $K^0_{F\beta}$ в зависимости от коэффициента ψ_{bd}						
		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Симметричное	⩽350	—	—	—	1,06 1,05	1,10 1,09	1,13 1,11	1,16 1,13
	>350	—	1,04 1,02	1,05 1,04	1,08 1,07	1,12 1,10	1,16 1,14	1,22 —
Несимметричное	⩽350	—	—	1,10 1,08	1,16 1,12	1,20 1,17	1,26 1,22	—
	>350	1,04 1,02	1,07 1,06	1,14 1,10	—	—	—	—
Консольное	⩽350	1,16 1,08	1,35 1,22	1,55 1,40	—	—	—	—
	>350	1,22 1,10	1,43 1,24	1,67 1,46	—	—	—	—

Примечание. В числителе даны значения $K^0_{H\beta}$, а в знаменателе — $K^0_{F\beta}$.

табл. 3.10. Для конических зубчатых колес с круговыми зубьями при любом режиме нагрузки

$$K_{H\beta}=\sqrt{K^0_{H\beta}} \quad \text{и} \quad K_{F\beta}=\sqrt{K^0_{F\beta}}.$$

Коэффициенты K_{Hv} и K_{Fv} учитывают динамическую нагрузку, возникающую в зацеплении вследствие кромочного удара зубьев при входе в зацепление. Основной причиной возникновения динамических нагрузок являются неточности сборки и изготовления (погрешности формы и значение ошибок шага). Динамические нагрузки растут с увеличением скорости и уменьшением степени точности, и уменьшаются с увеличением твердости рабочих поверхностей зубьев. При 7...9-й степенях точности ориентировочные значения коэффициентов: для прямозубых передач при $v\leqslant 5$ м/с и твердости зубьев $H\leqslant$НВ350 $K_{Hv}=1{,}04...1{,}30$ и $K_{Fv}=1{,}08...1{,}61$; при $H>$НВ350 $K_{Hv}=1{,}03...1{,}17$ и $K_{Fv}=1{,}03...1{,}05$; для косозубых передач при $v\leqslant 10$ м/с и $H\leqslant$НВ350 $K_{Hv}=1{,}02...1{,}12$ и $K_{Fv}=1{,}03...1{,}35$; при $H>$НВ350 $K_{Hv}=1{,}0...1{,}05$ и $K_{Fv}=1{,}03...1{,}09$ (подробно см. [28, 30]).

Коэффициент формы зуба Y_F зависит в основном от числа зубьев z или z_v и коэффициента смещения x. Значения коэффициента Y_F для зубчатых колес без смещения:

z или z_v .	17	20	22	24	30	35	40	50	60	80 ⩾ 100
Y_F	4,28	4,09	4,0	3,92	3,80	3,75	3,70	3,65	3,62	3,60	3,60

Допускаемые напряжения. При расчете на прочность различают допускаемые напряжения при длительной работе с постоянным и переменным режимами нагрузки. Рассмотрим выбор допускаемого

напряжения при длительной работе с постоянным режимом нагрузки.

Допускаемое контактное напряжение

$$[\sigma_H] = (\sigma_{H_0}/[s_H])\, K_{HL}, \qquad (3.131)$$

где σ_{H_0} — предел контактной выносливости поверхностей зубьев (рис. 3.105 и табл. 3.11), зависит от твердости рабочих поверхностей зубьев; $[s_H]$ — допускаемый коэффициент безопасности: $[s_H]=1{,}1$ при однородной структуре материала (нормализация, улучшение и объемная закалка); $[s_H]=1{,}2$ при неоднородной структуре материала (поверхностная закалка, цементация, азотирование и др.); K_{HL} — коэффициент долговечности, учитывающий влияние срока службы и режима нагрузки передачи. Расчет K_{HL} основывается на кривой усталости (рис. 3.105) *. На участке $N_\Sigma < N_{H_0}$ (наклонный участок)

$$K_{HL} = \sqrt[6]{N_{H_0}/N_\Sigma} \geqslant 1 \leqslant K_{HL\,max}, \qquad (3.132)$$

где $K_{HL\,max} \leqslant 2{,}6$ для нормализованных или улучшенных колес и $K_{HL\,max} \leqslant 1{,}8$ для колес с поверхностной закалкой, цементацией и др. При указанных значениях $K_{HL\,max}$ исключается появление пластических деформаций на поверхности зуба; N_{H_0} — число циклов напряжений, соответствующее пределу контактной выносливости:

$$N_{H_0} = 30\,\mathrm{HB}^{2,4};$$

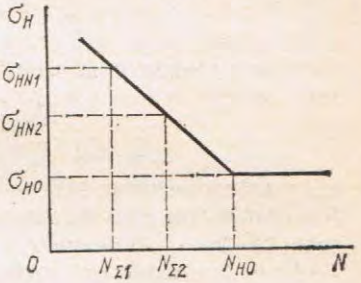


Рис. 3.105

если по расчету получилось $N_{H_0} > 12 \cdot 10^7$, то следует принимать $N_{H_0} = 12 \cdot 10^7$; N_Σ — расчетное число циклов нагружения зубьев за весь срок службы передачи. На участке $N_\Sigma > N_{H_0}$ (длительно работающие передачи) линия усталости параллельна оси абсцисс. Это значит, что на этом участке предел выносливости σ_{H_0} не изменяется, а $K_{HL}=1$.

Расчет N_Σ выполняют с учетом режима нагрузки. Как указывалось выше, различают режимы постоянной и переменной нагрузки. На практике режимы строго постоянной нагрузки встречаются редко **. При постоянном режиме нагрузки (с отклонением до 20%)

$$N_\Sigma = 60nt, \qquad (3.133)$$

где n — частота вращения колеса, об/мин; t — расчетный срок службы передачи, ч. Срок службы зубчатых редукторов общего

* На рис. 3.105 для большей наглядности кривая усталости показана по логарифмической шкале для обеих осей координат.

** Постоянный режим нагрузки является наиболее тяжелым для передач. Этот худший случай нагрузки применяют за расчетный для неопределенных режимов, например редукторы общего назначения используются для различных режимов.

назначения установлен 36 000 ч (ГОСТ 16162—78). Поэтому на практике в большинстве случаев $N_\Sigma > N_{H_0}$; следовательно, $K_{HL}=1$.

В качестве допускаемого контактного напряжения при расчете прямозубых передач принимают $[\sigma_H]$ того зубчатого колеса, для которого оно меньше; как правило, это $[\sigma_H]_2$, а при расчете косозубых и шевронных передач

$$[\sigma_H]=0{,}45\,([\sigma_H]_1+[\sigma_H]_2)\leqslant 1{,}23\,[\sigma_H]_2. \qquad (3.134)$$

Если это условие не выполняется, то принимают $[\sigma_H]=1{,}23\,[\sigma_H]_2$.

Допускаемое напряжение изгиба

$$[\sigma_F]=(\sigma_{F_0}/[s_F])\,K_{FC}K_{FL}, \qquad (3.135)$$

где σ_{F_0} — предел выносливости зубьев на изгиб (табл. 3.11); $[s_F]$ — допускаемый коэффициент безопасности: $[s_F]=1{,}75$ для зубчатых колес, изготовленных из поковок и штамповок; $[s_F]=2{,}3$ из литых заготовок; K_{FC} — коэффициент, учитывающий влияние двустороннего приложения нагрузки; $K_{FC}=1$ при одностороннем приложении нагрузки; $K_{FC}=0{,}7...0{,}8$ при двустороннем приложении нагрузки; K_{FL} — коэффициент долговечности: при твердости $H\leqslant$НВ350

$$K_{FL}=\sqrt[6]{N_{F_0}/N_\Sigma}\geqslant 1\leqslant 2. \qquad (3.136)$$

При твердости $H >$ НВ350

$$K_{FL}=\sqrt[9]{N_{F_0}/N_\Sigma}\geqslant 1\leqslant 1{,}6. \qquad (3.136а)$$

Здесь N_{F_0} — число циклов напряжений, соответствующее пределу выносливости зубьев на изгиб, $N_{F_0}=4\cdot 10^6$ для всех сталей; N_Σ определяют по формуле (3.133). При длительной работе передачи ($N_\Sigma > 4\cdot 10^6$) $K_{FL}=1$.

При приложении наибольшей кратковременно и редко действующей нагрузки (например, ударная нагрузка, перегрузка при пуске и торможении) может наступить пластическое деформирование рабочих поверхностей зубьев, если твердость их $H<$НВ350,

Таблица 3.11

Способ термической или химико-термической обработки зубьев	Твердость зубьев		Стали	σ_{H_0}, МПа	σ_{F_0}, МПа
	на поверхности	в сердцевине у основания			
Нормализация, улучшение	НВ180...350		45, 40Х, 50ХН, 35ХМ	2НВ+70	1,8 НВ
Объемная закалка	HRC40...50		40Х, 35ХМ, 35ХГСА	18HRC+150	550
Закалка при нагреве ТВЧ по всему контуру	HRC48...58	HRC25...35	40Х, 50ХН, 35ХМ	17HRC+200	650
Цементация	HRC56...63	HRC32...45	25ХГТ, 20ХН2М	23HRC	1000

или хрупкое разрушение при большей твердости. В этом случае необходимо проверить статическую прочность зубьев по предельным допускаемым напряжениям *.

Пример 3.3. Рассчитать косозубую передачу одноступенчатого цилиндрического редуктора. Мощность на валу шестерни $P_1=8{,}6$ кВт при $n_1=1440$ об/мин ($\omega_1=151$ рад/с), передаточное число $u=4$. Передача нереверсивная, нагрузка постоянная. Срок службы редуктора не ограничен.

Решение. 1. Вращающие моменты на валах: $M_1=P_1/\omega_1=8{,}6\cdot10^3/151$ Н·м$=57$ Н·м; $M_2=M_1u\eta=57\cdot4\cdot0{,}98$ Н·м$=223$ Н·м.

2. Материал шестерни и колеса (см. § 3.35 и табл. 3.9). Назначаем для шестерни улучшенную сталь 45 с твердостью НВ280, $\sigma_в=890$ МПа, для колеса — нормализованную сталь 45 с твердостью НВ200, $\sigma_в=600$ МПа.

3. Допускаемые контактные напряжения для материала шестерни и колеса [см. формулу (3.131)]: $[\sigma_H]=(\sigma_{H_0}/[s_H])\,K_{HL}$, где $\sigma_{H_0}=2\,\text{НВ}+70$ (табл. 3.11); $[s_H]=1{,}1$ и $K_{HL}=1$ (см. § 3.39);

$[\sigma_H]_1=[(2\cdot280+70)/1{,}1]\,1=573$ МПа, $[\sigma_H]_2=[(2\cdot200+70)/1{,}1]\,1=427$ МПа.

Расчетное допускаемое контактное напряжение [см. формулу (3.134)]

$$[\sigma_H]=0{,}45\,([\sigma_H]_1+[\sigma_H]_2)=0{,}45\,(573+427)=450\text{ МПа}.$$

Условие $[\sigma_H]\leqslant1{,}23\,[\sigma_H]_2=1{,}23\cdot427=525$ МПа соблюдается.

4. Допускаемые напряжения изгиба [см. формулу (3.135)]: $[\sigma_F]=(\sigma_{F_0}/[s_F])\,K_{FC}K_{FL}$, где $\sigma_{F_0}=1{,}8$ НВ (табл. 3.11); $[s_F]=1{,}75$; $K_{FC}=1$ и $K_{FL}=1$ (см. § 3.39).

Для материала шестерни $[\sigma_F]_1=(1{,}8\cdot280/1{,}75)1\cdot1=288$ МПа, для материала колеса $[\sigma_F]_2=(1{,}8\cdot200/1{,}75)1\cdot1=206$ МПа.

5. Принимаем коэффициент $\psi_{ba}=1{,}0$ (симметричное расположение колес, см. § 3.39). Коэффициент $K_{H\beta}=1$ (нагрузка постоянная). Коэффициент $\psi_{bd}=2\psi_{ba}/(u+1)=2\cdot1{,}0/(4+1)=0{,}4$, что соответствует стандартному значению (см. § 3.39).

6. Межосевое расстояние [см. формулу (3.121)]

$$a_w=4300\,(4+1)\sqrt[3]{223\cdot1{,}0/[(450\cdot10^6\cdot4)^2\cdot0{,}4]}=0{,}122\text{ м}=122\text{ мм}.$$

Принимаем стандартное значение $a_w=125$ мм (см. § 3.36).

7. Ширина венца: колеса $b_2=\psi_{ba}a_w=0{,}4\cdot125$ мм$=50$ мм; шестерни $b_1=b_2+5$ мм$=50+5$ мм$=55$ мм.

8. Нормальный модуль зубьев [см. формулу (3.127)]

$$m_n=5{,}8\cdot223\,(4+1)/(4\cdot125\cdot10^{-3}\cdot50\cdot10^{-3}\cdot206\cdot10^6)=0{,}00126\text{ м}=1{,}26\text{ мм},$$

принимаем $m_n=1{,}5$ мм (см. § 3.31 и 3.39).

9. Принимаем предварительно угол наклона зубьев $\beta=10°$ и определяем число зубьев шестерни [формула (3.144)] и колеса:

$$z_1=2a_w\cos\beta/[(u+1)\,m_n]=2\cdot125\cos10°/[(4+1)\,1{,}5]=32{,}83;$$

$z_2=z_1u=32{,}83\cdot4=131{,}3$. Принимаем $z_1=33$, $z_2=131$. Уточняем угол наклона зубьев [см. формулу (3.114)]:

$$\cos\beta=(z_1+z_2)\,m_n/(2a_w)=(33+131)\,1{,}5/(2\cdot125)=0{,}984;\quad\beta=10°17'.$$

10. Фактическое передаточное число $u'=z_2/z_1=131/33=3{,}97$. Отклонение от заданного (номинального) u составляет 0,8%. Допускается $\pm2{,}5\%$ при $u\leqslant4{,}5$ и $\pm4\%$ при $u>4{,}5$.

11. Основные размеры шестерни и колеса:

$$d_1=m_nz_1/\cos\beta=1{,}5\cdot33/\cos10°17'\text{ мм}=50{,}3\text{ мм};$$
$$d_2=m_nz_2/\cos\beta=1{,}5\cdot131/\cos10°17'\text{ мм}=199{,}7\text{ мм}.$$

Диаметры d_1 и d_2 надо вычислять с точностью до 0,01 мм.

---

* Подробно см. [12, 22] и ГОСТ 21354—75.

Проверка: $a_w=(d_1+d_2)/2=(50{,}3+199{,}7)/2$ мм$=125$ мм;

$$d_{a1}=d_1+2m_n=50{,}3+2\cdot1{,}5 \text{ мм}=53{,}3 \text{ мм};$$
$$d_{a2}=d_2+2m_n=199{,}7+2\cdot1{,}5 \text{ мм}=202{,}7.$$

12. Окружная скорость колес и степень точности передачи

$$v_1=\omega_1 d_1/2=151\cdot50{,}3\cdot10^{-3}/2 \text{ м/с}=3{,}8 \text{ м/с}.$$

По табл. 3.8 для уменьшения динамической нагрузки принимаем 8-ю степень точности.

13. Силы в зацеплении [см. формулу (3.116)]:

$$F_t=2M_1/d_1=2\cdot57/(50{,}3\cdot10^{-3}) \text{ Н}=2270 \text{ Н};$$
$$F_r=F_t \operatorname{tg}\alpha_w/\cos\beta=2270 \operatorname{tg} 20°/\cos 10°17' \text{ Н}=840 \text{ Н};$$
$$F_a=F_t \operatorname{tg}\beta=2270 \operatorname{tg} 10°17' \text{ Н}=410 \text{ Н}.$$

§ 3.40. КОНИЧЕСКИЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Конические зубчатые колеса применяют в передачах, оси валов которых пересекаются под некоторым межосевым углом Σ. Обычно $\Sigma=90°$. Конические колеса (см. рис. 3.76) бывают с прямыми *(д)* и круговыми *(е)* зубьями. В сравнении с цилиндрическими конические передачи имеют большую массу и габариты, сложнее в изготовлении и монтаже. Одно из конических колес, как правило шестерня, располагается консольно, при этом вследствие повышенной деформации консольного вала увеличиваются неравномерность распределения нагрузки по ширине зубчатого венца и шум. Применяют во всех отраслях машиностроения, где по условиям компоновки машины необходимо передать движение между пересекающимися осями валов.

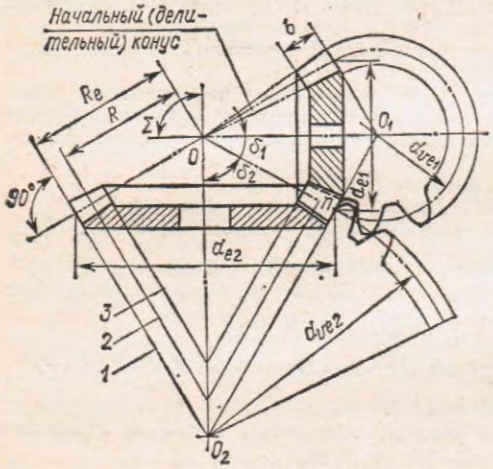


Рис. 3.106

В конических колесах вводят понятие «начальные конусы» — это две конические поверхности с общей вершиной и образующей, перекатывающиеся одна по другой без скольжения (рис. 3.106). При этом начальные и делительные конусы всегда совпадают. Углы делительных конусов обозначают δ_1 и δ_2. Межосевой угол $\Sigma=\delta_1+\delta_2=90°$.

Профилирование эвольвентных зубьев конических колес выполняют на поверхностях внешних дополнительных конусов с вершинами O_1 и O_2, образующие которых перпендикулярны образующим делительных конусов. Поверхности дополнительных конусов легко развертываются на плоскость. При этом наибольшие радиусы

разверток равны образующим дополнительных конусов $O_1П$ и $O_2П$ и являются радиусами делительных окружностей эквивалентных цилиндрических колес *, профили зубьев которых используются в качестве профилей зубьев конических колес. Диаметры эквивалентных колес: $d_{ve1}=d_{e1}/\cos\delta_1$; $d_{ve2}=d_{e2}/\cos\delta_2$. Эквивалентные числа зубьев цилиндрических колес:

$$z_{v1}=z_1/\cos\delta_1;\quad z_{v2}=z_2/\cos\delta_2, \tag{3.137}$$

где z_1 и z_2 — действительные числа зубьев конических колес.

В конической передаче различают внешний *1*, средний *2* и внутренний *3* дополнительные делительные конусы (рис. 3.106). Пересечение поверхностей внешних дополнительных и делительных конусов определяют внешние делительные диаметры шестерни d_{e1} и колеса d_{e2}. Внешние и внутренние дополнительные конусы определяют ширину зубчатого венца b. Контроль размеров колеса при его изготовлении ведется по сечению зубьев поверхностью внешнего дополнительного конуса. Прочность колес оценивается размерами по сечению зубьев поверхностью среднего дополнительного конуса.

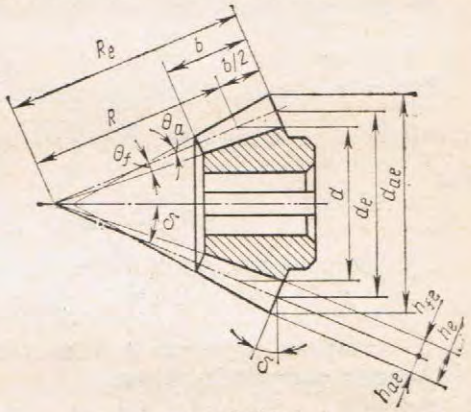


Рис. 3.107

Передаточное число

$$u=\omega_1/\omega_2=d_{e2}/d_{e1}=z_2/z_1=\operatorname{ctg}\delta_1=\operatorname{tg}\delta_2. \tag{3.138}$$

По ГОСТ 12289—76 (табл. 3.12) назначают $u=1{,}0\ldots6{,}3$.

Коническая прямозубая передача. *Основные геометрические размеры* (рис. 3.107) определяют в зависимости от модуля m_e и числа зубьев z. Высота и толщина зубьев конических колес постепенно уменьшаются по мере приближения к вершине конуса **. Соответственно изменяются шаг, модуль и делительные диаметры, которых может быть бесчисленное множество. Для расчета принимают только внешний d_e и средний d делительные диаметры

$$d_e=m_e z, \tag{3.139}$$

---

* Более точно развертка среднего дополнительного конуса действительного конического колеса представляет собой делительную окружность эквивалентного цилиндрического колеса.

** Зубья конических колес по признаку изменения размеров сечения по длине выполняют трех форм. Форма I — пропорционально-понижающиеся зубья, вершины делительного конуса и конуса впадин совпадают. Является основной для конических прямозубых передач и передач с круговыми зубьями при $m_n\geqslant2$ мм и $z_\Sigma=20\ldots100$. Подробно см. [17, 23] и ГОСТ 19326—73.

где m_e — внешний окружной модуль, который можно выбирать по стандарту (см. § 3.31), но это не обязательное требование, так как одним и тем же режущим инструментом можно нарезать конические колеса с различными модулями. В силовых конических передачах не рекомендуется принимать $m_e<2{,}5$ мм. По m_e определяют геометрические размеры конических передач с прямыми зубьями (ГОСТ 19624—74).

В соответствии с исходным контуром прямозубых конических колес (ГОСТ 13754—68) радиальный зазор $c=0{,}2m_e$, тогда внешняя высота головки зуба $h_{ae}=m_e$ и внешняя высота ножки зуба $h_{fe}=1{,}2m_e$.

Внешний диаметр вершин зубьев

$$d_{ae}=d_e+2m_e\cos\delta. \tag{3.140}$$

Внешнее конусное расстояние (см. рис. 3.106)

$$R_e=0{,}5\sqrt{d_{e1}^2+d_{e2}^2}=0{,}5d_{e1}\sqrt{(u^2+1)}=[0{,}5d_{e2}\sqrt{(u^2+1)}]/u \tag{3.141}$$

или

$$R_e=0{,}5m_e\sqrt{z_1^2+z_2^2}. \tag{3.142}$$

Среднее конусное расстояние

$$R=R_e-0{,}5b, \tag{3.143}$$

где b — ширина зубчатых венцов колес.

Средний окружной модуль

$$m=m_eR/R_e. \tag{3.144}$$

Средний делительный диаметр

$$d=mz. \tag{3.145}$$

Угол ножки зуба (рис. 3.107) $\Theta_f=\operatorname{arctg}(h_{fe}/R_e)$. Угол головки зуба $\Theta_a{:}\Theta_{a1}=\Theta_{f2}$; $\Theta_{a2}=\Theta_{f1}$. Угол конуса вершин $\delta_a=\delta+\Theta_a$. Угол конуса впадин $\delta_f=\delta-\Theta_f$.

Силы в зацеплении (рис. 3.108) определяют по размерам в среднем сечении зуба шестерни плоскостью nn, перпендикулярной образующей делительного конуса. Сила нормального давления F_n направлена по линии зацепления эквивалентных колес, т. е. под углом α_w к образующей делительного конуса. Эту силу раскладывают на три составляющие — *окружную* F_t, *радиальную* F_r и *осевую* F_a силы, которые на шестерне равны:

$$F_{t1}=2M_1/d_1;\quad F_{r1}=F_{t1}\operatorname{tg}\alpha_w\cos\delta_1;$$
$$F_{a1}=F_{t1}\operatorname{tg}\alpha_w\sin\delta_1. \tag{3.146}$$

Силы на колесе: $F_{t2}=F_{t1}$; $F_{r2}=F_{a1}$; $F_{a2}=F_{r1}$.

Направление окружных сил F_t, как и в цилиндрической передаче, зависит от направления вращения колес. Осевые силы F_a всегда направлены от вершин конусов, радиальные F_r — к осям вращения колес.

Расчет на контактную усталость рабочих поверхностей зубьев конической передачи выполняют по аналогии с прямозубой цилиндрической передачей [см. формулу (3.118)], но для расчетов конические колеса заменяют эквивалентными цилиндрическими

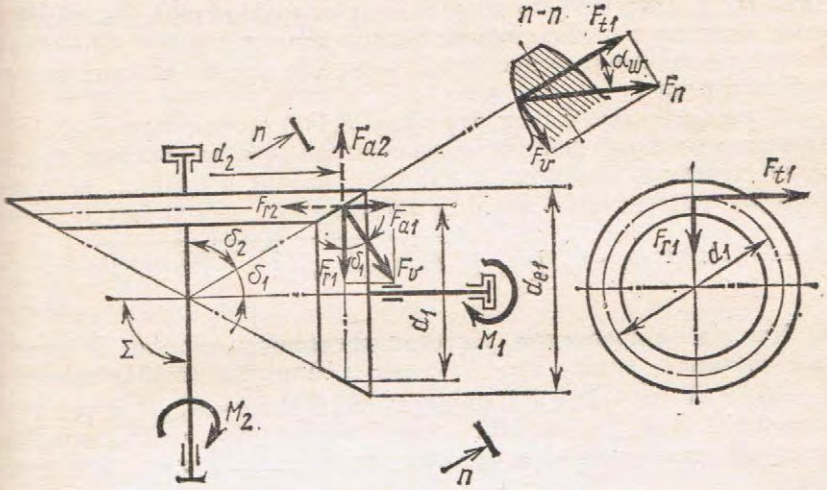


Рис. 3.108

прямозубыми колесами *1*, начальные окружности которых представляют собой развертки средних дополнительных конусов *2* (рис. 3.109). Диаметры делительных окружностей эквивалентных колес:

$$d_{v1} = d_1/\cos\delta_1,$$
$$d_{v2} = d_2/\cos\delta_2. \qquad (3.147)$$

Межосевое расстояние эквивалентной передачи

$$a_v = r_{v1} + r_{v2} =$$
$$= R(\operatorname{tg}\delta_1 + \operatorname{tg}\delta_2) =$$
$$= R(u^2+1)/u. \qquad (3.148)$$

Передаточное число эквивалентной передачи

$$u_v = d_{v2}/d_{v1} =$$
$$= d_2\cos\delta_1/(d_1\cos\delta_2) =$$
$$= u\sin\delta_2/\cos\delta_2 =$$
$$= u^2. \qquad (3.149)$$

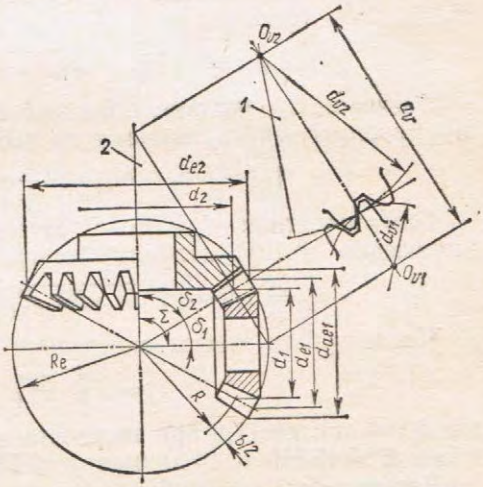


Рис. 3.109

Момент на эквивалентном колесе определяют из условия равенства окружных сил в эквивалентной и конической передачах

$F_{tv}=F_t=2M_{v2}/d_{v2}=2M_2/d_2$, откуда с учетом формулы (3.147)

$$M_{v2}=M_2 d_{v2}/d_2=M_2/\cos\delta_2=M_2\sqrt{u^2+1}. \quad (3.150)$$

По опытным данным, нагрузочная способность конической передачи составляет 0,85 по сравнению с эквивалентной цилиндрической. Поэтому в знаменатель расчетных формул вводят 0,85 — коэффициент понижения допускаемой нагрузки для конических прямозубых передач.

С учетом сказанного и формулы (3.143) из выражения (3.118), записанного в параметрах эквивалентной цилиндрической прямозубой передачи [см. формулы (3.148), (3.149) и (3.150)], получим формулу проверочного расчета конических прямозубых передач:

$$\sigma_H=310\cdot 10^3/[(R_e-0{,}5b)u]\cdot\sqrt{M_2K_{H\beta}K_{Hv}\sqrt{(u^2+1)^3}/(0{,}85b)}\leqslant[\sigma_H]. \quad (3.151)$$

При проектировочном расчете определяют *внешний делительный диаметр колеса* d_{e2}. Заменив в формуле (3.151) значения $R_e=0{,}5d_{e2}\sqrt{(u^2+1)}/u$ [см. формулу (3.141)] и $b=K_{be}R_e$ и решив ее относительно d_{e2}, предварительно приняв $K_{Hv}=1{,}25$, получим формулу *проектировочного расчета* конических прямозубых передач:

$$d_{e2}=9850\sqrt[3]{M_2K_{H\beta}u/[(1-0{,}5K_{be})^2K_{be}[\sigma_H]^2 0{,}85]}, \quad (3.152)$$

где $K_{be}=b/R_e=2/[(u/0{,}6)+0{,}6]\leqslant 0{,}3$ — коэффициент ширины зубчатого венца.

При проектировании передач с параметрами по ГОСТ 12289—76 $K_{be}=0{,}285$, тогда

$$d_{e2}=16\,500\sqrt[3]{M_2K_{H\beta}u/(0{,}85[\sigma_H]^2)}. \quad (3.153)$$

Значения d_{e2} регламентированы ГОСТ 12289—76 (табл. 3.12). Коэффициент $K_{H\beta}$ принимают по табл. 3.10 в зависимости от

$$\psi_{bd}=b/d_1=K_{be}u/(2-K_{be})=0{,}166u. \quad (3.154)$$

При известном d_{e2} после соответствующего преобразования выражения (3.151) получим формулу проверочного расчета:

$$\sigma_H=1{,}9\cdot 10^3\sqrt{M_2uK_{H\beta}K_{Hv}/(0{,}85d_{e2}^3)}\leqslant[\sigma_H]. \quad (3.155)$$

Число зубьев колеса определяют по эмпирической формуле

$$z_2=c\sqrt[5]{u^2}\sqrt[6]{d_{e2}}, \quad (3.156)$$

где d_{e2} — мм; $c=11{,}2$ при твердости поверхностей обоих зубчатых колес $H>$HB350 и $c=18$ при $H\leqslant$HB350.

Расчет зубьев на изгиб выполняют аналогично расчету прямозубой цилиндрической передачи [см. формулу (3.122)] по размерам в среднем сечении колеса, для которого средний окружной модуль $m=0{,}857m_e$. С учетом сказанного, выразив в формуле (3.122) силу F_t через главные параметры конических передач — момент на

Таблица 3.12

Номинальные значения внешнего делительного диаметра колеса d_{e2}, мм	Ширина зубчатых венцов b, мм, при номинальном передаточном числе u				Номинальные значения внешнего делительного диаметра колеса d_{e2}, мм	Ширина зубчатых венцов b, мм, при номинальном передаточном числе u			
	1,6	2	2,5	3,15		1,6	2	2,5	3,15
100	17	16	15	15	200	34	32	30	30
125	21	20	19	19	225	38	36	34	34
140	24	22	21	21	250	42	40	38	38
160	28	25	25	25	280	48	45	42	42
180	30	28	28	26	315	52	50	48	48

ведомом валу $M_{\bar{2}}$ и внешний делительный диаметр колеса $d_{e\bar{2}}$, т. е. $F_t = 2M_2/(0{,}857d_{e\bar{2}})$, получим формулу проверочного расчета конических прямозубых передач:

$$\sigma_F = 2{,}33M_2Y_FK_{F\beta}K_{Fv}/(0{,}85d_{e\bar{2}}bm_e) \leqslant [\sigma_F]. \qquad (3.157)$$

Значения коэффициента формы зуба Y_F выбирают по эквивалентному числу зубьев z_v [см. формулу (3.137) и § 3.39].

Конические передачи с круговыми зубьями (см. рис. 3.76, *е*). Ось кругового зуба — это дуга окружности соответствующего диаметра резцовой головки (рис. 3.110). Нарезание зубьев резцовой головкой обеспечивает высокую производительность и низкую стоимость колес. По сравнению с коническими прямозубыми эти передачи обладают большей долговечностью, работают более плавно и с меньшим шумом. Нагрузочная способность их значительно выше, чем конических прямозубых тех же размеров.

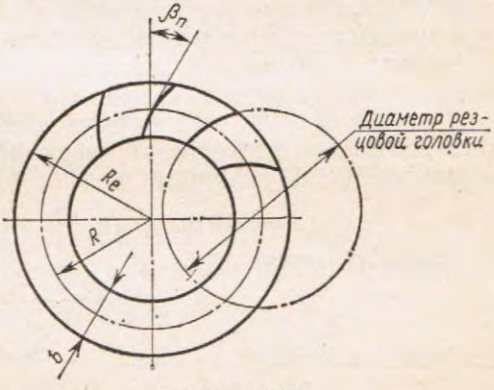


Рис. 3.110

Для расчета конических колес с круговыми зубьями их заменяют биэквивалентными цилиндрическими прямозубыми колесами. Термин «биэквивалентные» связан с двойным приведением конических колес с круговыми зубьями: во-первых, круговые зубья приводятся к прямым, во-вторых, конические колеса приводятся к цилиндрическим. Угол наклона кругового зуба переменный. За расчетный принимают угол на окружности среднего диаметра колеса, обычно $\beta_n = 35°$ (рис. 3.110).

Основные геометрические размеры по ГОСТ 19326—73 (выборка): внешний делительный диаметр колеса d_{e2} определяют по формуле (3.162);

внешний окружной модуль

$$m_{te} = d_{e2}/z_2; \tag{3.158}$$

внешнее R_e и среднее R конусные расстояния:

$$R_e = 0{,}5 m_{te} \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad R = R_e - 0{,}5b; \tag{3.159}$$

средний нормальный модуль

$$m_n = (m_{te} R/R_e)\cos\beta_n;$$

средние делительные диаметры:

$$d_1 = m_n z_1/\cos\beta_n; \quad d_2 = m_n z_2/\cos\beta_n.$$

Силы в зацеплении: окружная сила

$$F_t = 2M_1/d_1;$$

радиальная сила

$$F_{r1} = F_{a2} = F_t(\operatorname{tg}\alpha\cos\delta_1 - \sin\beta_n\sin\delta_1)/\cos\beta_n; \tag{3.160}$$

осевая сила

$$F_{a1} = F_{r2} = F_t(\operatorname{tg}\alpha\sin\delta_1 + \sin\beta_n\cos\delta_1)/\cos\beta_n. \tag{3.161}$$

Направление сил F_r и F_a зависит от направления вращения шестерни и направления линии наклона ее зуба. Формулы (3.160) и (3.161) приведены для шестерни с правой линией наклона зуба при вращении ее по ходу часовой стрелки.

Расчет на прочность конических передач с круговыми зубьями ведут по формулам для конических прямозубых передач с введением в знаменатель этих формул экспериментального коэффициента повышения допускаемой нагрузки 1,5 вместо 0,85. Тогда из выражения (3.153) получим

$$d_{e2} = 16\,500\sqrt[3]{M_2 K_{H\beta} u/(1{,}5[\sigma_H]^2 1)}. \tag{3.162}$$

Из формулы (3.155) находим

$$\sigma_H = 1{,}9\cdot 10^6\sqrt{M_2 u K_{H\beta} K_{Hv}/(1{,}5 d_{e2}^3)} \leqslant [\sigma_H]. \tag{3.163}$$

Из формулы (3.157) * получим

$$\sigma_F = 2{,}33 M_2 Y_F K_{F\beta} K_{Fv}/(d_{e2} b m_{te}) \leqslant [\sigma_F]. \tag{3.164}$$

Значения коэффициента формулы зуба Y_F выбирают по биэквивалентному числу зубьев $z_{vn} = z/(\cos\delta\cos\beta_n)$. K_{Fv} — коэффициент динамической нагрузки: для передач с прямыми зубьями при

* При расчете на изгиб колес с круговыми зубьями в формулу (3.157) вместо коэффициента 0,85 подставляют — 1,0. Конические передачи с круговыми зубьями имеют начальный точечный контакт в зацеплении, поэтому для них: коэффициент, учитывающий угол наклона зуба, $Y_\beta = 1$; коэффициенты, учитывающие распределение нагрузки между зубьями, $K_{F\alpha} = 1$, $K_{H\alpha} = 1$.

$v \leqslant 5$ м/с $K_{Fv}=1{,}4$ при твердости зубьев колеса $H \leqslant$ HB350 и $K_{Fv}=1{,}1$ при $H >$ HB350; для передач с круговыми зубьями при $v \leqslant 10$ м/с $K_{Fv}=1{,}1$ — при $H \leqslant$ HB350 и $K_{Fv}=1{,}05$ при $H >$ HB350.

Пример 3.4. По данным примера 3.3 рассчитать коническую прямозубую передачу редуктора, приняв передаточное число $u=2{,}5$.

Решение. 1. Вращающие моменты на валах: $M_1=P_1/\omega_1=8{,}6\cdot 10^3/151$ Н·м$=57$ Н·м; $M_2=M_1 u\eta=57\cdot 2{,}5\cdot 0{,}97$ Н·м$=138{,}2$ Н·м.

2. Материал шестерни и колеса (см. § 3.35 и табл. 3.9). Принимаем для шестерни улучшенную сталь 40Х с твердостью HB275, $\sigma_в=1000$ МПа; для колеса — улучшенную сталь 40Х с твердостью HB250, $\sigma_в=790$ МПа.

3. Допускаемое контактное напряжение [см. формулу (3.131)]

$$[\sigma_H]=(\sigma_{H_0}/[s_H])\,K_{HL},$$ где $\sigma_{H_0}=2\text{HB}+70$ (см. табл. 3.131);

$[s_H]=1{,}1$; $K_{HL}=1$. Для материала шестерни $[\sigma_H]_1=[(2\cdot 275+70)/1{,}1]1=563$ МПа, для материала колеса $[\sigma_H]_2=[(2\cdot 250+70)/1{,}1]1=518$ МПа.

За допускаемое напряжение принимают $[\sigma_H]=[\sigma_H]_2=518$ МПа.

4. Допускаемое напряжение изгиба [см. формулу (3.135)]:

$$[\sigma_F]=(\sigma_{F_0}/[s_F])\,K_{FC}K_{FL},$$ где $\sigma_{F_0}=1{,}8$ HB (см. табл. 3.131); $[s_F]=1{,}75$;

$$K_{FC}=1;\quad K_{FL}=1.$$

Для материала шестерни $[\sigma_F]_1=(1{,}8\cdot 275/1{,}75)1\cdot 1=283$ МПа, для материала колеса $[\sigma_F]_2=(1{,}8\cdot 250/1{,}75)1\cdot 1=257$ МПа.

5. Принимаем коэффициент $K_{H\beta}=1$ (нагрузка постоянная).

6. Внешний делительный диаметр колеса [см. формулу (3.153)]

$$d_{e2}=16\,500\sqrt[3]{138{,}2\cdot 1{,}0\cdot 2{,}5/[(518\cdot 10^6)^2\,0{,}85]}=0{,}190\text{ м}=190\text{ мм}.$$

Принимаем ближайшее стандартное значение $d_{e2}=200$ мм и ширину зубчатого венца $b=30$ мм (табл. 3.12).

7. Число зубьев колеса [см. формулу (3.156)]

$$z_2=c\sqrt[5]{u^2}\sqrt[6]{d_{e2}}=18\sqrt[5]{2{,}5^2}\sqrt[6]{200}=62{,}8.$$

Принимаем $z_2=63$, тогда $z_1=z_2/u=63/2{,}5=25{,}2$. Принимаем $z_1=25$.

8. Фактическое передаточное число $u'=z_2/z_1=63/25=2{,}52$. Отклонение от заданного u составляет 0,8%. Допускается $\pm 3\%$.

9. Внешний окружной модуль $m_e=d_{e2}/z_2=200/63$ мм$=3{,}17$ мм.

10. Углы делительных конусов: $\operatorname{ctg}\delta_1=u'=2{,}52$,

$$\delta_1=21°39';\quad \delta_2=90°-\delta_1=90°-21°39'=68°21'.$$

11. Основные геометрические размеры [см. рис. 3.107 и формулы (3.139)... (3.145)]: $d_{e1}=m_e z_1=3{,}17\cdot 25$ мм$=79{,}25$ мм; $d_{ae1}=d_{e1}+2m_e\cos\delta_1=79{,}25+2\times 3{,}17\cos 21°39'$ мм$=85{,}14$ мм;

$$d_{ae2}=d_{e2}+2m_e\cos\delta_2=200+2\cdot 3{,}17\cos 68°21'\text{ мм}=203{,}34\text{ мм};$$

$$R_e=0{,}5m_e\sqrt{z_1^2+z_2^2}=0{,}5\cdot 3{,}17\sqrt{25^2+63^2}\text{ мм}=107{,}4\text{ мм};$$

$$R=R_e-0{,}5b=107{,}4-0{,}5\cdot 30\text{ мм}=92{,}4;$$

$$m=m_e R/R_e=3{,}17\cdot 92{,}4/107{,}4\text{ мм}=2{,}73\text{ мм};$$

$$d_1=mz_1=2{,}73\cdot 25\text{ мм}=68{,}25\text{ мм}.$$

12. Средняя окружная скорость колес и степень точности $v=\omega_1 d_1/2=151\times 68{,}25\cdot 10^{-3}/2$ м/с$=5{,}05$ м/с.

По табл. 3.8 принимаем 7-ю степень точности передачи.

13. Эквивалентное число зубьев шестерни и колес [см. формулу (3.137)] $z_{v1}=z_1/\cos\delta_1=25/\cos 21°39'=26{,}9$; $z_2=z_2/\cos\delta_2=63/\cos 68°21'=170{,}8$. Коэффициент формы зуба (см. § 3.39): $Y_{F1}=3{,}86$; $Y_{F2}=3{,}6$. Находим отношение $[\sigma_F]/Y_F$: для шестерни $[\sigma_F]_1/Y_{F1}=283/3{,}86=73{,}3$ МПа; для колеса $[\sigma_{F_2}]/Y_{F_2}=257/3{,}6=71{,}4$ МПа. Расчет следует вести для зубьев колеса, для которого найденное отношение меньше.

14. Принимаем коэффициент $K_{Fv}=1{,}4$ (см. § 3.40).

15. Расчетное напряжение изгиба в зубьях колеса [см. формулу (3.157)]

$$\sigma_{F2}=2{,}33\cdot 138{,}2\cdot 3{,}6\cdot 1\cdot 1{,}4/(0{,}85\cdot 200\cdot 10^{-3}\cdot 30\cdot 10^{-3}\cdot 3{,}17\cdot 10^{-3})=$$
$$=100\cdot 10^{6}\ \text{Па}=100\ \text{МПа}<[\sigma_F]_2=257\ \text{МПа}.$$

16. Силы в зацеплении [см. формулу (3.146)]: $F_{t1}=F_{t2}=2M_1/d_1=2\cdot 57/(68{,}25\cdot 10^{-3})\text{Н}=1670$ Н; $F_{r1}=F_{a2}=F_{t1}\operatorname{tg}\alpha_w\cos\delta_1=1670\cdot\operatorname{tg}20^\circ\cos 21^\circ 39'$ Н$=$ $=565$ Н; $F_{a1}=F_{r2}=F_{t1}\operatorname{tg}\alpha_w\sin\delta_1=1670\ \operatorname{tg}20^\circ\cdot\sin 21^\circ 39'$ Н$=225$ Н.

§ 3.41. ПЛАНЕТАРНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ *

Из большого числа различных типов планетарных передач одноступенчатая планетарная передача (рис. 3.111) получила самое широкое распространение. Ее с успехом применяют как при больших, так и при малых мощностях в силовых и кинематических приводах. К. п. д. передачи $\eta=0{,}97\ldots0{,}99$. В передачах применяют не только цилиндрические, но и конические колеса. Зубья могут быть прямые и косые. Обычно число сателлитов $C=3\ldots6$, но встречаются передачи с $C>6$. Наибольшее распространение получили прямозубые передачи с $C=3$.

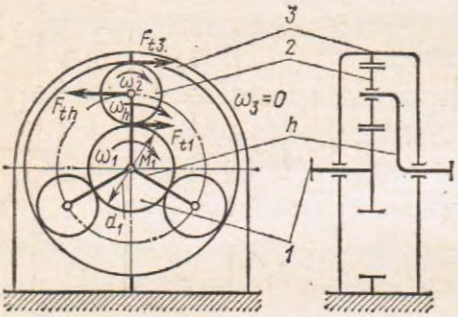


Рис. 3.111

Достоинства: большое передаточное число в одной ступени, а также малые габариты и масса. Снижение массы (обычно в 2...4 раза и более) объясняется следующими причинами: распределением нагрузки между сателлитами, благодаря чему нагрузка на зубья в каждом зацеплении уменьшается в несколько раз; широким применением зубчатых колес с внутренним зацеплением, обладающих повышенной нагрузочной способностью; малой нагрузкой на опоры. Планетарные передачи работают с меньшим шумом, что связано с повышенной плавностью внутреннего зацепления и меньшими размерами колес. *Недостатки*: повышенные требования к точности изготовления и монтажа; резкое снижение к. п. д. передачи с увеличением передаточного числа.

Планетарные передачи можно использовать как редуктор с постоянным передаточным числом; как коробку скоростей, передаточное число в которой изменяется путем поочередного торможения различных звеньев; как дифференциальный механизм. Их успешно применяют в транспортном машиностроении, станкостроении, приборостроении и т. д.

Основные параметры планетарных передач регламентированы ГОСТ 22919—78, который распространяется на одноступенчатые редукторы общего назначения с допускаемыми вращающими мо-

* Устройство и принцип работы планетарных передач см. § 1.42.

ментами на ведомом валу M_2=125...1000 Н·м и передаточными числами u: 6,3; 8; 10; 12,5. При больших передаточных числах в силовых передачах целесообразно применять двухступенчатые (ГОСТ 22916—78) или даже трехступенчатые планетарные передачи.

Передаточное число планетарных передач определяют методом остановки водила (метод Виллиса, см. § 1.42).

Для простой планетарной передачи, представленной на рис. 3.111, передаточное число согласно формуле [1.150]

$$u=\omega_1/\omega_h=1+(z_3/z_1). \qquad (3.165)$$

Наиболее рациональный интервал передаточных чисел 1,3...12,5.

Таким же методом определяют передаточное число планетарных передач, выполненных по другим схемам. Для двухступенчатой планетарной передачи (рис. 3.112), составленной из двух последовательно соединенных одноступенчатых передач, где центральное колесо *1* — ведущее, водило h_2 — ведомое, центральные колеса *3* и *4* закреплены в корпусе ($\omega_3=\omega_4=0$), передаточное число:

$$u=\omega_1/\omega_{h2}=[1+(z_3/z_1)][1+(z_4/z_6)]. \qquad (3.166)$$

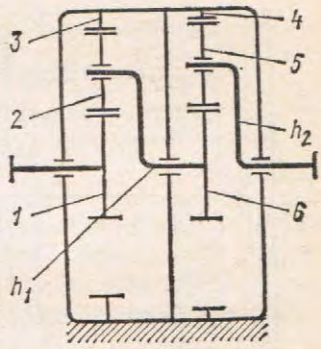


Рис. 3.112

Интервал передаточных чисел u= =16...63.

Выбор числа зубьев (см. рис. 3.111) связан с кинематическим расчетом. При заданном u предварительно принимают $z_1\geqslant 17$ и по формуле (3.165) определяют z_3. Полученные значения z_1 и z_3 уточняют по условиям соосности, сборки и соседства.

Условие соосности $z_1+z_2=z_3-z_2$ обеспечивает совпадение осей ведущего и ведомого валов. Здесь z_2 — число зубьев сателлита, $z_2=0{,}5\,(z_3-z_1)$.

Условие сборки $(z_1+z_3)/C=N$, где N — целое число, предусматривает определенное соотношение между числом зубьев центральных колес и числом сателлитов.

Условие соседства $(z_1+z_2)\sin(\pi/C)>(z_2+2)$ предусматривает наличие гарантированного зазора между сателлитами.

Силы в зацеплении (см. рис. 3.111): окружные силы

$$F_{t1}=F_{t3}=2M_1K_h/(d_1C), \qquad (3.167)$$

где $K_h\approx 1{,}2...2$ — коэффициент неравномерности распределения нагрузки между сателлитами. Сила, действующая на ось сателлита, $F_{th}=2F_{t1}$. Радиальные и осевые силы при известной F_t определяют так же, как и в простых зубчатых передачах.

Расчет на прочность зубьев планетарных передач ведут по формулам для расчета простых передач. Расчет выполняют для внешнего зацепления — колеса *1* и *2* (см. рис. 3.111) и внутрен-

него — колеса *2* и *3*. При одинаковых материалах колес достаточно рассчитать только внешнее зацепление, так как модули и силы в зацеплениях одинаковы, а внутреннее зацепление по своим свойствам прочней внешнего.

§ 3.42. ВОЛНОВЫЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

Волновыми называются передачи, у которых передача вращательного движения осуществляется посредством бегущей волновой деформации одного из зубчатых колес.

Волновая передача (рис. 3.113) состоит из жесткого неподвижного колеса *1* с внутренними зубьями; гибкого подвижного ко-

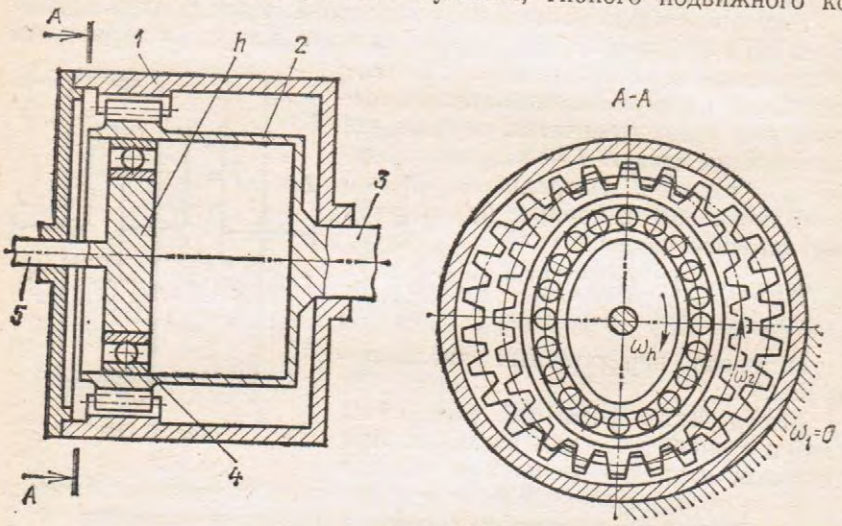


Рис. 3.113

леса *2* с наружными зубьями и водила h, которое выполнено за одно целое с ведущим валом *5*. Водило состоит из овального кулачка и гибкого радиального шарикового подшипника качения *4* (ГОСТ 23179—78). Гибкое колесо выполняют в виде стакана из тонкой цилиндрической оболочки. Зубчатый венец этого колеса нарезан на легкодеформируемом конце оболочки, другой конец которой через тонкое дно соединяется с ведомым валом *3*. Для волновых передач преимущественное распространение получили эвольвентные зубья. При большом числе зубьев ($z>100$) форма эвольвентного зуба близка к трапецеидальной.

Делительный диаметр d_2 зубчатого венца гибкого колеса меньше делительного диаметра d_1 жесткого колеса на размер необходимой деформации $\delta=d_1-d_2$ (обычно δ равна высоте зуба).

При сборке водило h вставляется внутрь гибкого колеса. Так как наружный диаметр водила (наружный диаметр подшипника) больше внутреннего диаметра обода гибкого колеса на δ, то зуб-

чатый венец его деформируется, принимая форму овала. При этом зубья гибкого колеса, перемещаясь в радиальном направлении, вступают в зацепление с внутренними зубьями неподвижного колеса в двух зонах, которые определяются большой осью овала. На концах большой оси зубья зацепляются по всей высоте. На малой оси овала зубья не зацепляются. Между зонами зацепления зубья гибкого колеса находятся в промежуточном положении частичного зацепления. В нагруженном состоянии передачи в зацеплении одновременно находится до 1/3 всех зубьев.

При вращении водила деформация венца гибкого колеса перемещается по его окружности в виде бегущей волны. Поэтому передачу называют волновой, а водило — генератором волн. Так как зацепление зубчатых колес происходит в двух зонах, то радиальные перемещения венца гибкого колеса по окружности образуют две волны. Поэтому такую передачу называют двухволновой. Возможны трехволновые передачи. Вращение генератора волн (ведущего звена) вызывает вращение гибкого колеса, которое, обкатываясь по неподвижному колесу, вращает ведомый вал. Ведущим звеном может быть также любое зубчатое колесо. Материал гибких колес: стали 40Х, 40ХНМА, 30ХГСА и др., а для передачи небольших мощностей — пластмассы.

Достоинства волновых передач определяются многопарностью зацепления зубьев. К ним относятся: большое передаточное число в одной ступени (u до 350, а в специальных передачах — до нескольких десятков и даже сотен тысяч); малая масса и высокая нагрузочная способность при малых габаритах; малые нагрузки на валы и опоры вследствие симметричной конструкции; высокий к. п. д. ($\eta \approx 0{,}9$); малый шум при работе и др. *Недостатки*: ограниченные частоты вращения генератора волн при больших диаметрах колес; сложность изготовления гибкого колеса и генератора волн в единичном производстве. При серийном изготовлении волновых передач не возникает особых технологических трудностей и они дешевле планетарных.

Волновые передачи, подобно планетарным, могут быть использованы не только как редукторы или мультипликаторы, но и как дифференциальные механизмы. Их целесообразно применять во всех механизмах, где требуются большие передаточные числа, и в устройствах, где требуется высокая кинематическая точность и герметичность (например, для передачи движения через герметическую стенку, в химической, космической, атомной и других отраслях техники).

Основные параметры волновых зубчатых передач для одноступенчатых редукторов регламентированы ГОСТ 23108—78, который распространяется на волновые редукторы общего назначения с вращающими моментами на ведомом валу M_2=22,4...6300 Н·м и передаточными числами u=80...315.

Передаточное число волновых передач определяют, так же как для планетарных, по уравнению Виллиса, так как они кинетически представляют собой планетарные передачи с одним гибким зубча-

тым колесом. Так, при неподвижном колесе *1*, ведущем водиле h и ведомом гибком колесе *2* получим передаточное число

$$u = \omega_h/\omega_2 = -z_2/(z_1 - z_2) = -d_2/(d_1 - d_2) = -d_2/\delta, \quad (3.168)$$

где ω_h и ω_2 — угловые скорости водила и гибкого колеса; z_1 и z_2 — соответственно числа зубьев жесткого и гибкого колес. Знак минус указывает на разные направления вращения ведущего и ведомого звеньев.

Разность чисел зубьев колес должна быть равна или кратна числу волн, т. е.

$$z_1 - z_2 = K_{кр}U, \quad (3.169)$$

где $K_{кр}=1, 2, \ldots$ — коэффициент кратности; U — число волн. Обычно $K_{кр}=1$, а $U=2$.

В волновой передаче числа зубьев не определяют значения передаточного числа u и могут быть любыми в пределах условия (3.169). Передаточное число зависит только от δ. Из формулы (3.168) следует, что *u равно отношению делительного диаметра ведомого (гибкого) колеса к разности делительных диаметров колес*. Эту разность диаметров можно выполнить малой и получить большое передаточное число, что невозможно достигнуть в обычных зубчатых передачах, в которых передаточное число равно отношению делительных диаметров колес.

Имеется большое количество различных типов волновых передач, но отличаются они в основном конструкцией генераторов волн и гибких зубчатых колес (см. [30]).

§ 3.43. ПОНЯТИЕ О ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ С ЗАЦЕПЛЕНИЕМ НОВИКОВА

Нагрузочная способность передач с эвольвентным зацеплением ограничена малыми радиусами кривизны профилей зубьев и, следовательно, значительными контактными напряжениями. Повышение контактной прочности достигается применением круговинтового зацепления М. Л. Новикова, в котором профили зубьев колес в торцовом сечении ограничены дугами окружностей близких радиусов (рис. 3.114). Зуб шестерни *2* делается выпуклым, а зуб колеса *1* — вогнутым. Линия зацепления расположена параллельно осям колес, и поэтому площадка контакта зубьев здесь перемещается не по профилю зубьев, как в эвольвентной передаче, а вдоль зубьев. Непрерывность передачи движения обеспечивается винтовой формой зубьев. Поэтому зацепление Новикова может быть только косозубым. Практически угол $\beta=10...30°$.

Вследствие малой разницы между радиусами профилей зубьев контакт их лишь первоначально является точечным, а в дальнейшем по мере приработки становится линейным по высоте зуба. Под нагрузкой линия контакта превращается в площадку контакта, что повышает нагрузочную способность передачи по контактным напряжениям. При работе передачи площадка контакта

перемещается вдоль зуба с большой скоростью, что обеспечивает образование устойчивой масляной пленки между зубьями. По этой причине уменьшается износ зубьев, повышаются к. п. д. и долговечность передачи.

Нагрузочная способность передач с зацеплением Новикова по условиям контактной прочности примерно в два раза больше, чем цилиндрических эвольвентных тех же размеров. Дальнейшее увеличение нагрузочной способности достигается применением шевронных передач. Круговинтовое зацепление применимо для всех видов зубчатых передач. К недостаткам передачи Новикова относятся повышенная чувствительность к изменению межосевого расстояния и сравнительно сложный исходный контур инструмента.

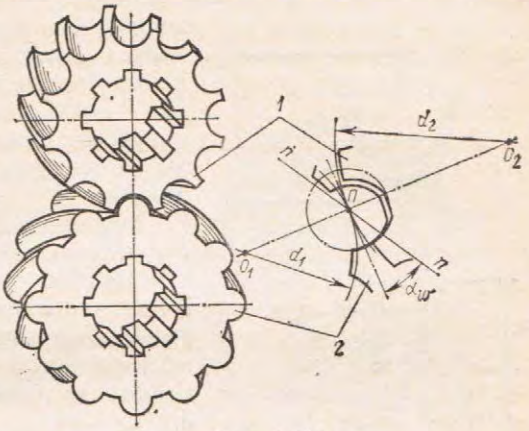


Рис. 3.114

Глава 9
ПЕРЕДАЧА ВИНТ — ГАЙКА

§ 3.44. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Передача винт—гайка (винтовой механизм) предназначена для преобразования вращательного движения в поступательное. При этом как винт, так и гайка могут иметь либо одно из названных движений, либо оба движения одновременно. Например, в винтовом домкрате (рис. 3.115) винт совершает оба движения одновременно. Так, при вращении винта *3* в неподвижной гайке *2* винт получает поступательное перемещение и поднимает груз, опирающийся на чашку *1* домкрата.

Достоинства: большой выигрыш в силе; возможность получения медленного движения с высокой точностью перемещения; компактность при высокой нагрузочной способности; простота конструкции и изготовления. *Недостатки*: большое трение в резьбе, вызывающее повышенный ее износ, низкий к. п. д.

Применяют для поднятия грузов (домкраты), создания больших усилий (прессы, нажимные устройства и т. п.) и получения точных перемещений (ходовые винты станков, измерительные приборы, делительные и регулировочные устройства).

Конструкция передач. Различают два типа передач винт—гайка: передачи с трением скольжения и передачи с трением качения.

Передачи с трением скольжения имеют наибольшее распространение ввиду простоты устройства. Винты передач делятся на грузовые и ходовые. Грузовые винты предназначены для создания больших усилий (домкраты, прессы и т. п.). При реверсивном движении под нагрузкой применяют трапецеидальную резьбу (см. рис. 3.19, *а*), а при больших односторонних нагрузках — упорную (см. рис. 3.19, *б*) *. Для получения самотормозящей винтовой пары (домкраты) применяют однозаходные резьбы.

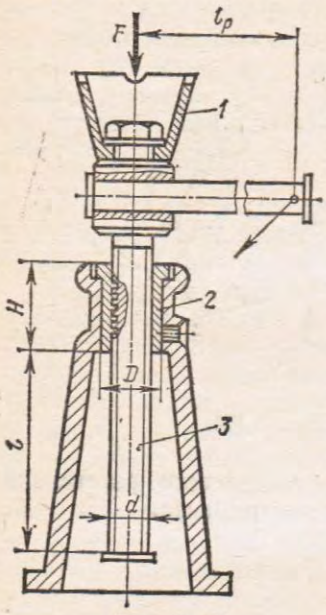


Рис. 3.115

Ходовые винты предназначены для получения точных перемещений. Для уменьшения трения они, как правило, имеют трапецеидальную многозаходную резьбу. Для точных винтов делительных и измерительных устройств иногда применяют метрическую резьбу (см. рис. 3.17).

Гайки грузовых винтов изготовляют цельными (рис. 3.115). Гайки ходовых винтов (например, гайка ходового винта токарного станка) делают составными (рис. 3.116), чтобы устранять зазоры, образовавшиеся при изготовлении и сборке или в результате износа резьбы. Составная гайка имеет неподвижную и подвижную части: последняя может смещаться в осевом направлении относительно первой, что обеспечивает устранение зазора. Смещения можно достигнуть с помощью клина, пружины или резьбы.

Передачи с трением качения или шариковые винтовые передачи (рис. 3.117) применяют для получения перемещений высокой точности, где важно малое трение и полное отсутствие зазора в резьбе (например, приводы подач станков с программным управлением и др.).

Материалы. Для уменьшения потерь на трение и износа резьбы, винты передач с трением скольжения делают стальными, а гайки — из бронзы, чугуна или латуни. *Винты* без термообработки изготовляют из сталей Ст5, 45, 50 и др., а с закалкой — из сталей 40Х, 40ХГ, 65Г и др. *Гайки* изготовляют из бронзы БрОФ6,5—0,15, БрОЦС6-6-3, БрАЖ9-4 и др., а при работе с большими перерывами и малых нагрузках — из антифрикционного чугуна АЧВ-2, АЧК-2 и серого чугуна СЧ18, СЧ20 и др.

---

* В передачах винт—гайка иногда применяют нестандартную прямоугольную резьбу. Она обеспечивает несколько больший выигрыш в силе и более высокий к. п. д., чем упомянутые стандартные резьбы, но прочность витков ее ниже. Кроме того, при износе резьбы возникает неустранимый «мертвый ход».

Силовые соотношения в винтовой паре такие же, как и в крепежной резьбе (см. § 3.10).

К. п. д. Для винтовых механизмов следует различать к. п. д. винтовой пары и к. п. д. винтового механизма (передачи). Первый из них отражает потери только в резьбе и при подъеме груза определяется по формуле (3.24). Для самотормозящей винтовой пары $\eta < 0{,}5$.

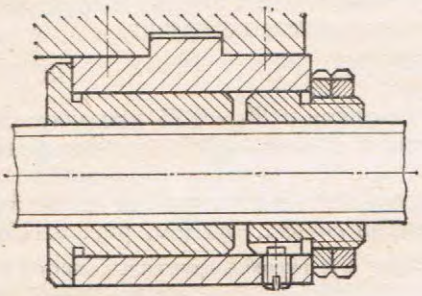


Рис. 3.116

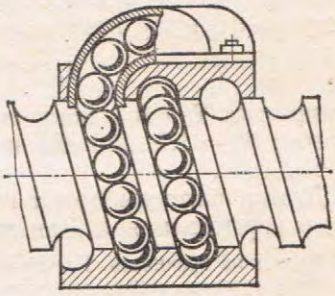


Рис. 3.117

Общий к. п. д. винтового механизма $\eta_{в.м}$ отражает потери не только в резьбе, но и в опорных частях механизма (например, трение в головке домкрата):

$$\eta_{в.м} = F p_z / [(M_1 + M_2)\, 2\pi], \qquad (3.170)$$

где F — осевая сила, действующая на винт; p_z — ход резьбы; M_1 — момент трения в резьбе [см. формулу (3.19)]; M_2 — момент торцового трения [см. формулу (3.20)].

Передаточное число u. Передаточное число условно можно выразить отношением перемещения маховика или рукоятки к перемещению винта (гайки):

$$u = 2\pi R / p_z, \qquad (3.171)$$

где R — радиус маховика или длина рукоятки $l_р$ (см. рис. 3.115). При малом p_z и сравнительно большом R можно получить очень большое u, а следовательно, и большой выигрыш в силе.

§ 3.45. РАСЧЕТ ПЕРЕДАЧИ ВИНТ — ГАЙКА

Наиболее частая причина выхода из строя винтов и гаек — это износ их резьбы. Поэтому *основным критерием работоспособности и расчета передачи является износостойкость*. Расчет на износостойкость выполняют как проектировочный. Другими критериями работоспособности являются *прочность и устойчивость* винта. Эти расчеты выполняют как проверочные.

Расчет на износостойкость. Расчет сводится к определению фактического среднего давления $p_{ср}$ между витками резьбы винта и гайки и сравнению его с допускаемым $[p]$. Условие износостой-

кости в предположении равномерного распределения нагрузки по виткам резьбы:

$$p_{ср} = F/(\pi d_2 hz) \leqslant [p],$$

где d_2 — средний диаметр резьбы; h — рабочая высота профиля резьбы; $z=H/p$ — число витков в гайке высотой H и с шагом p. Заменив в этой формуле z на H/p и обозначив $\Psi_H=H/d_2$ — коэффициент высоты гайки; $\Psi_h=h/p$ — коэффициент высоты резьбы, получим формулу *проектировочного расчета* передачи:

$$d_2 \geqslant \sqrt{F/(\pi \Psi_H \Psi_h [p])}. \qquad (3.172)$$

Принимают $\Psi_h=0{,}5$ для трапецеидальной и $\Psi_h=0{,}75$ для упорной резьбы; $\Psi_H=1{,}2...2{,}5$ для цельных гаек и $\Psi_H=2{,}5...3{,}5$ для разъемных гаек.

Длину винта выбирают конструктивно в зависимости от требуемого перемещения l. Для домкратов $l=(8...10)d$ (см. рис. 3.115).

Расчет на прочность. Расчет производят для высоконагруженных винтов по опасному сечению винта, для установления которого строят эпюры продольных сил и крутящих моментов. Для домкрата расчетная схема и эпюры показаны на рис. 3.118. От чашки домкрата до гайки нормальная сила N равна осевой силе F

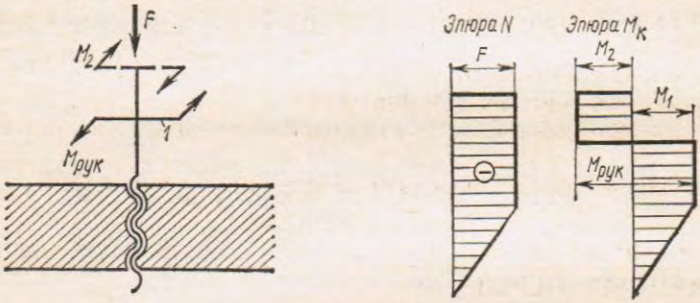


Рис. 3.118

(грузоподъемность домкрата). В пределах высоты гайки сила F уменьшается до 0, а крутящий момент $M_к$ изменяется от 0 до M_1. От верхней грани гайки до рукоятки *1* $M_к=M_1$, выше рукоятки $M_к=M_2$.

Условие прочности, по гипотезе энергии формоизменения,

$$\sigma_э = \sqrt{\sigma^2+3\tau_к^2} = \sqrt{[4N/(\pi d_1^2)]^2+3[M_к/(0{,}2d_1^3)]} \leqslant [\sigma], \qquad (3.172)$$

где $\sigma_э$ — эквивалентное напряжение для опасной точки винта; N и $M_к$ — нормальная сила и крутящий момент в опасном сечении винта (для домкрата — выше гайки).

Расчет винта на устойчивость. Расчет производят по формулам сопротивления материалов (см. § 2.44). При этом винт домкрата рассматривают как стойку с нижним защемленным и верхним свободным концами.

Допускаемое напряжение на растяжение (сжатие) винтов $[\sigma]$ определяют по формуле (3.40) при $[s]=3$. Допускаемое давление в резьбе для пар: закаленная сталь — бронза, $[p]=11...13$ МПа; незакаленная сталь — чугун, $[p]=4...6$ МПа. При редкой работе (например, домкраты) давление $[p]$ повышают на 20%.

Последовательность расчета винтового домкрата. *Исходные данные*: грузоподъемность F, высота подъема l. Резьба трапецеидальная, однозаходная.

1. В зависимости от условий работы и значения нагрузки F выбирают материал винта и гайки и принимают допускаемое напряжение $[\sigma]$ для материала винта и допускаемое давление в резьбе $[p]$.

2. Задаются конструкцией гайки (цельная или разъемная) и принимают коэффициент высоты гайки Ψ_H. Затем определяют средний диаметр резьбы d_2 [см. формулу (3.172)] и по ГОСТ 9484—73 принимают размеры резьбы: d, d_1, d_2 и p. При выборе шага p надо ориентироваться на средние его значения. Крупный шаг рекомендуется только для высоконагруженных передач, а мелкий — при необходимости перемещений повышенной точности.

3. Проверяют условие самоторможения винта по формуле $\gamma<\varphi'$. Угол подъема однозаходной резьбы γ определяют по формуле (3.15), принимая $p_z=p$, а приведенный угол трения — по формуле $\varphi'=\operatorname{arctg}[f/\cos(\alpha/2)]$, принимая коэффициент трения стали по бронзе $f=0{,}1$, а стали по чугуну $f=0{,}15...0{,}18$.

4. Определяют размеры гайки: высота гайки $H=\Psi_H d_2$; число витков в гайке $z=H/p$. Если по расчету получилось $z>10$ (см. § 3.12), то необходимо изменить размеры резьбы или выбрать другие материалы.

5. Проверяют винт на прочность.

6. Проверяют винт на устойчивость.

7. Определяют общий к. п. д. винтового домкрата [см. формулу (3.170)].

Более полный расчет передачи винт—гайка см. [18, 30].

Глава 10
ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 3.46. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Червячная передача (рис. 3.119) предназначена для сообщения вращательного движения валам, оси которых скрещиваются под углом 90°. Движение осуществляется по принципу винтовой пары: винтом является червяк, а червячное колесо представляет собой узкую часть длинной гайки, изогнутой по окружности резьбой наружу. Зубья колеса имеют вогнутую форму, что увеличивает длину контактных линий, а следовательно, улучшает качество работы передачи.

Достоинства: возможность получения больших передаточных чисел при малых габаритах; плавность зацепления и бесшумность работы; возможность получения самоторможения *. *Недостатки*: сравнительно низкий к. п. д.; повышенный износ и нагрев; склон-

* Самотормозящие передачи — это передачи, которые передают движение только в одном направлении, например от червяка к колесу. Зубчатые передачи не являются самотормозящими.

ность к заеданию; необходимость применения для колес дорогих антифрикционных материалов.

Применяют в машинах, где по условиям компоновки необходимо передать движение между скрещивающимися валами, а также в делительных механизмах для получения большого передаточного числа. Они имеют широкое распространение в грузоподъемных

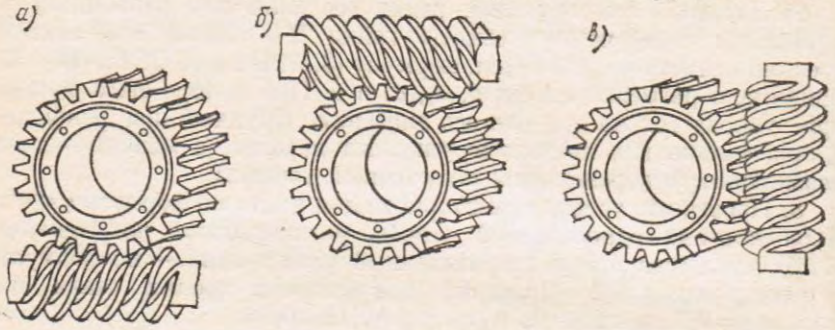


Рис. 3.119

машинах, станкостроении, автомобилестроении и т. п. Передаваемая мощность не превышает 50...60 кВт. Передача большой мощности невыгодна из-за больших потерь (низкий к. п. д.) и сильного нагрева. Червячные передачи во избежание их перегрева предпочтительно использовать в приводах периодического (а не непрерывного) действия.

Классификация. По расположению червяка относительно колеса (рис. 3.119) различают передачи с *нижним (а)*, *верхним (б)* и

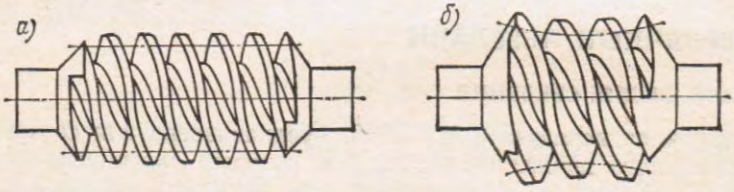


Рис. 3.120

боковым (в) червяком. При окружных скоростях червяка $v_1 \leqslant 5$ м/с применяют нижний червяк, при $v_1 > 5$ м/с — верхний червяк.

По форме поверхности, на которой нарезают витки (рис. 3.120), червяки делятся на *цилиндрические (а)* и *глобоидные (б)*. По этому признаку различают и червячные передачи. Глобоидные передачи более надежны и долговечны, имеют в 1,5...2 раза большую нагрузочную способность, но требуют повышенной точности изготовления и монтажа. Применяются реже цилиндрических.

По форме профиля витка цилиндрического червяка (рис. 3.121) передачи бывают с *архимедовыми ZA**, *эвольвентными ZJ* и кон-

* Обозначения червяков даны по ГОСТ 19650—74 и СТ СЭВ 266—76.

волютными ZN червяками, у которых торцовый профиль витка является соответственно: архимедовой спиралью (*а*), эвольвентой окружности (*б*) и удлиненной эвольвентой (*в*). Независимо от профиля витка червяка цилиндрические червячные передачи при равной твердости и одинаковом качестве изготовления практически обладают одинаковыми нагрузочной способностью и к. п. д. Выбор профиля нарезки червяка определяется способом его изготовления (в основном возможностью шлифования витков). Наи-

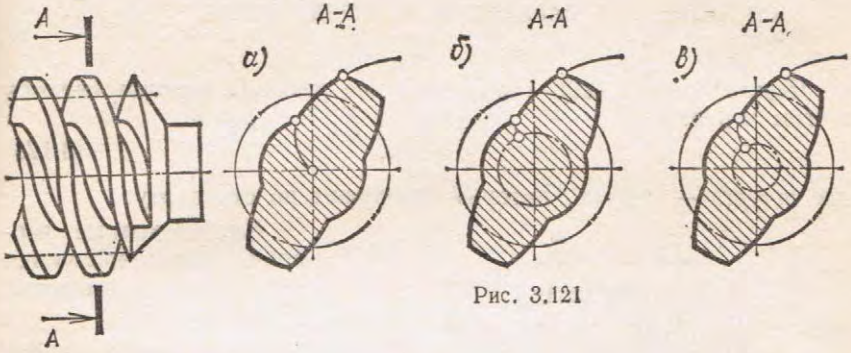


Рис. 3.121

большее распространение получили цилиндрические передачи без смещения с архимедовым червяком, которые и рассматриваются здесь.

Нарезание червяков и червячных колес. Архимедовы червяки подобны ходовым винтам с трапецеидальной резьбой. Их нарезают на токарно-винторезных или резьбофрезерных станках. Шероховатость поверхности витков червяка оказывает существенное влияние на работоспособность передачи. Поэтому червяки после нарезания и термообработки шлифуют, а иногда полируют. Однако для шлифования архимедовых червяков требуются специальные шлифовальные круги фасонного профиля, что затрудняет обработку и снижает точность изготовления, поэтому их применяют и без шлифовки витков. Эвольвентные червяки можно шлифовать на специальных червячно-шлифовальных станках, что повышает точность изготовления, обеспечивает более полный контакт витков червяка с зубьями колеса, более высокую нагрузочную способность передачи, поэтому эвольвентные червяки более перспективны.

Червяки выполняют с левым и правым направлением линии витка, последние имеют преимущественное распространение. Их изготовляют, как правило, за одно целое с валом, что увеличивает жесткость и снижает стоимость. Иногда червяки делают насадными.

Червячные колеса обычно нарезают червячными фрезами, которые отличаются от того червяка, с которым колесо будет работать, удвоенным радиальным зазором. При нарезании заготовка

колеса и фреза совершают такое относительное движение, какое имеют червячное колесо и червяк в передаче.

Точность изготовления червячных передач регламентирована СТ СЭВ 311—76, который устанавливает 12 степеней точности. Выбор степени точности производится в зависимости от скорости скольжения v_s (см. § 3.48). Для силовых передач наибольшее применение находят 7-я (при $v_s \leqslant 10$ м/с) и 8-я (при $v_s \leqslant 5$ м/с) степени точности.

§ 3.47. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ПЕРЕДАТОЧНОЕ ЧИСЛО

Червяк (рис. 3.122). Геометрические размеры характеризуются шагом червяка

$$p = \pi m, \tag{3.173}$$

где $m = p/\pi$ — модуль, который выбирают по стандарту.

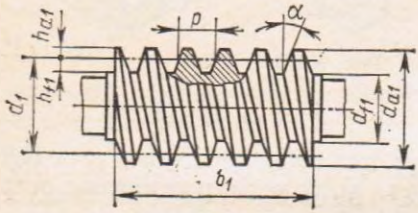


Рис. 3.122

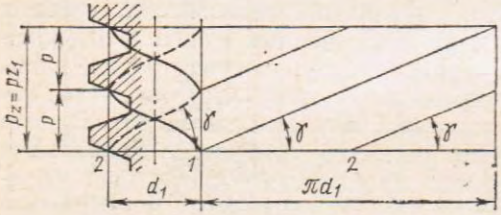


Рис. 3.123

Многозаходные червяки характеризуются еще и ходом линии витка p_z (рис. 3.123):

$$p_z = pz_1, \tag{3.174}$$

где z_1 — число витков червяка. Значения z_1: 1; 2; 4 (ГОСТ 2144—76). С увеличением z_1 повышается к. п. д. передачи, но усложняется технология ее изготовления и при данном передаточном числе увеличиваются габариты. Число витков z_1 выбирают так, чтобы получить число зубьев колеса $z_2 \geqslant z_{2\min}$ (см. ниже); $z_1 = 1$ принимают только для получения самотормозящей передачи или большом значении требуемого передаточного числа.

Делительный угол подъема γ линии витка на цилиндре d_1 (рис. 3.123)

$$\operatorname{tg}\gamma = p_z/(\pi d_1) = pz_1/(\pi d_1) = \pi m z_1/(\pi d_1) = mz_1/d_1 = \\ = mz_1/(qm) = z_1/q. \tag{3.175}$$

Делительный диаметр червяка [см. формулу (3.175) и рис. 3.122]

$$d_1 = mz_1/\operatorname{tg}\gamma = qm, \tag{3.176}$$

где $q = z_1/\operatorname{tg}\gamma$ — коэффициент диаметра червяка, равный числу модулей в делительном диаметре червяка $q = d_1/m$. Значения q

стандартизованы и связаны с модулем m. Сочетания m и q по ГОСТ 2144—76 должны быть следующими:

m, мм . . .	3,15	4	5	6,3	8	10	12,5
q	8; 10; 12,5; 16; 20		8; 10; 12,5; 14; 16; 20		8; 10; 12,5; 16; 20		

Чтобы исключить слишком тонкие червяки, стандарт предусматривает увеличение q с уменьшением m. Вообще бóльшие значения q рекомендуется принимать при бóльших передаточных числах (увеличенных расстояниях между опорами червяка), чтобы обеспечить достаточную изгибную жесткость червяка. Ориентировочно q принимают по рекомендации: $q \geqslant 0{,}25z_2$ с округлением до стандартного значения.

Высота головки и ножки витка червяка $h_{a1}=m$, $h_{f1}=1{,}2m$.

Диаметр вершин и впадин витков червяка

$$d_{a1}=d_1+2h_{a1}=d_1+2m;\ d_{f1}=d_1-2h_{f1}=d_1-2{,}4m. \quad (3.177)$$

Длина нарезанной части червяка

$$b_1=(C_1+C_2z_2)\,m, \quad (3.178)$$

где C_1 и C_2 — вспомогательные коэффициенты: $C_1=11$ и $C_2=0{,}06$ при $z_1=1$ и 2; $C_1=12{,}5$ и $C_2=0{,}09$ при $z_1=4$.

Для шлифуемых и фрезеруемых червяков во избежание искажения рабочей части боковых поверхностей витков при входе и выходе шлифовального круга (фрезы) b_1 увеличивают приблизительно на $3m$.

Червячное колесо (рис. 3.124). Основные геометрические размеры.

Делительный диаметр колеса

$$d_2=mz_2, \quad (3.179)$$

где z_2 — число зубьев червячного колеса. Минимальное число зубьев колеса $z_{2\min}$ определяют из условия отсутствия подрезания и обеспечения достаточной поверхности зацепления. Для силовых передач $z_{2\min}=28$. Максимальное число зубьев $z_2 \leqslant 80$. При увеличении z_2 возрастают диаметр колеса и расстояние между опорами червяка, что приводит к увеличению его деформирования. При $z_2 > 80$ возникает опасность излома зубьев ввиду уменьшения модуля.

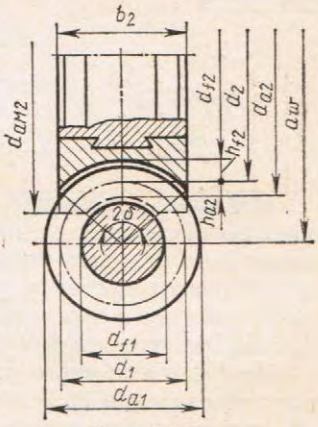


Рис. 3.124

Высота головки и ножки зуба колеса $h_{a2}=m$, $h_{f2}=1{,}2m$.

Диаметр вершин и впадин зубьев колеса

$$d_{a2}=d_2+2h_{a2}=d_2+2m;$$
$$d_{f2}=d_2-2h_{f2}=d_2-2{,}4m. \quad (3.180)$$

Наибольший диаметр колеса

$$d_{aм\,2} \leqslant d_{a2} + 6m/(z_1 + 2). \quad (3.181)$$

Ширина венца колеса

$$b_2 \leqslant 0{,}75 d_{a1} \text{ при } z_1 = 1 \text{ и } 2;\ b_2 \leqslant 0{,}67 d_{a1} \text{ при } z_1 = 4. \quad (3.182)$$

Угол обхвата 2δ червяка колесом

$$\sin\delta = b_2/(d_{a1} - 0{,}5m). \quad (3.183)$$

Межосевое расстояние

$$a_w = (d_1 + d_2)/2 = m(q + z_2)/2. \quad (3.184)$$

Значения a_w регламентированы ГОСТ 2144—76 (см. § 3.36). Для нестандартных передач не обязательно придерживаться указанных значений a_w. В этом случае желательно применять значения, оканчивающиеся на 0 или 5.

Для вписывания в стандартные или заданные межосевые расстояния a_w, а также в целях округления дробных значений a_w до чисел, оканчивающихся на 0 или 5, применяют *червячные передачи со смещением*. Червяк (копия инструмента) нарезают без смещения. Смещение осуществляют только за счет червячного колеса, которое нарезают на тех же станках и тем же инструментом, что и колесо без смещения. При заданном межосевом расстоянии a_w коэффициент смещения

$$x = a_w/m - 0{,}5(q + z_2); \quad (3.185)$$

$$a_w = 0{,}5m(q + z_2 + 2x); \quad (3.186)$$

$$z_2 = (2a_w/m) - q - 2x; \quad (3.187)$$

$$d_{a2} = m(z_2 + 2 + 2x);\ d_{f2} = m(z_2 - 2{,}4 + 2x). \quad (3.188)$$

Все другие размеры остаются неизменными. Смещение оказывает большое влияние на форму зубьев колеса и геометрию зацепления. По условию неподрезания и незаострения зубьев значение x выбирают в пределах ± 1. Из формулы (3.187) следует, что, варьируя значение x при заданных a_w, m и q, можно получить различные z_2 и u. Это позволяет осуществить ряд значений u в одном корпусе.

Передаточное число u. Передаточное число определяют из условия, что за один оборот червяка колесо повернется на число зубьев, равное числу витков червяка z_1. Для полного оборота колеса необходимо z_2/z_1 оборотов червяка, поэтому

$$u = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1. \quad (3.189)$$

Здесь z_1 выполняет роль числа зубьев шестерни зубчатой передачи. Так как $z_1 = 1; 2; 4$, что не может быть у шестерни, то в одной передаче можно получить большие u. В силовых передачах номинальные значения u: 8; 10; 12,5; 16; 18; 20; 25; 28; 31,5; 40...80 (выборка из ГОСТ 2144—76). В кинематических цепях $u \leqslant 1000$.

§ 3.48. ОСОБЕННОСТИ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА И К. П. Д. ЧЕРВЯЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Особенности рабочего процесса. Червячные передачи по сравнению с зубчатыми при работе имеют следующие особенности: повышенное скольжение в зацеплении и неблагоприятные условия смазки зацепления.

Повышенное скольжение в зацеплении возникает потому, что окружные скорости v_1 червяка и v_2 колеса направлены под углом скрещивания одна к другой (рис. 3.125). Поэтому витки червяка скользят по зубьям колеса. Скорость скольжения v_s является равнодействующей скоростей v_1 и v_2, направлена по касательной к линии витков червяка и определяется из параллелограмма скоростей:

$$v_s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = v_1/\cos\gamma = \omega_1 d_1/(2\cos\gamma). \quad (3.190)$$

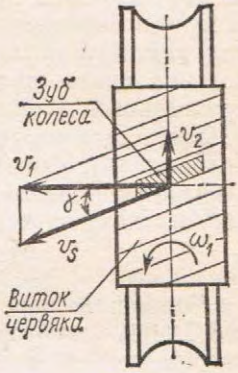


Рис. 3.125

Неблагоприятные условия смазки зацепления обусловлены направлением скорости v_s вдоль линии контакта (близко к направлению скорости v_1). Наиболее благоприятным условием смазки, т. е. условием образования жидкостной смазки (см. § 3.65), является перпендикулярное направление скорости v_s к линии контакта (рис.

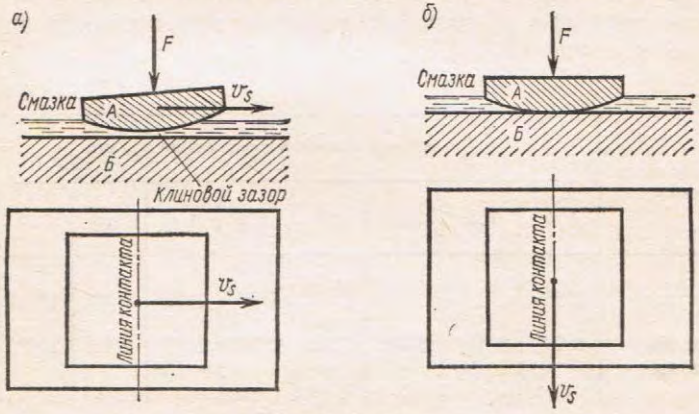


Рис. 3.126

3.126, *а*), что имеет место в прямозубой передаче. В этом случае смазка затягивается под тело *A*. Между трущимися телами (*A* и *B*) образуется непрерывный масляный слой (клиновой забор). При направлении скорости v_s вдоль линии контакта (рис. 3.126, *б*) масляный слой (жидкостная смазка) в контактной зоне не может образоваться; появляется полужидкостная или граничная смазка. Повышенное скольжение в зацеплении и неблагоприятные условия

смазки в червячных передачах являются причиной пониженного к. п. д., повышенного износа зубьев и склонности к заеданию.

К. п. д. Для червячных передач к. п. д. $\eta=\eta_п\eta_р\eta_з$, где $\eta_п$, $\eta_р$ и $\eta_з$ — коэффициенты, учитывающие соответственно потери в подшипниках, на разбрызгивание, размешивание масла и в зацеплении. Потери в зацеплении $\eta_з$ — составляют главную часть потерь в передаче. Значение $\eta_з$ определяют по формуле (3.24) для винтовой пары $\eta_з=\operatorname{tg}\gamma/\operatorname{tg}(\gamma+\varphi')$, где γ — делительный угол подъема линии витка — определяют по формуле (3.175); φ' — приведенный угол трения, зависящий от скорости скольжения v_s, материала червячной пары, качества смазки, твердости и шероховатости рабочих поверхностей червяка (табл. 3.13). Табличные значения φ' даны с учетом $\eta_п$ и $\eta_р$, поэтому общий к. п. д. червячной передачи определяют по формуле

$$\eta=\operatorname{tg}\gamma/\operatorname{tg}(\gamma+\varphi'). \qquad (3.191)$$

Червячные передачи имеют сравнительно низкий к. п. д. ($\eta\approx$ $\approx$0,7...0,9, самотормозящие $\eta\leqslant$0,5), что является их основным недостатком. К. п. д. увеличивается с возрастанием числа витков червяка (увеличивается γ) и с уменьшением коэффициента трения (уменьшается φ').

При проектировочном расчете, когда размеры передачи еще не известны, значение к. п. д. ориентировочно можно определить по формуле

$$\eta\approx 0{,}95\,(1-u/200). \qquad (3.192)$$

После определения размеров передачи величину к. п. д. уточняют по формуле (3.191).

Таблица 3.13

Материал венца колеса	φ' при скорости скольжения v_s, м/с								
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	8,0	10,0
Оловянные бронзы	2°35′	2°17′	2°00′	1°43′	1°36′	1°22′	1°16′	1°02′	0°55′
Безоловянные бронзы	4°00′	3°43′	3°09′	2°52′	2°35′	2°17′	2°00′	1°43′	—

Примечание. Значения φ' даны при работе бронзового колеса со стальным червяком с твердостью рабочих поверхностей $H\geqslant HRC45$.

§ 3.49. СИЛЫ В ЗАЦЕПЛЕНИИ

При передаче вращающего момента в полюсе $П$ зацепления (рис. 3.127, *а*) * возникает нормальная сила F_{n2}, направленная

* Здесь силы, распределенные по контактным линиям, условно сосредоточены в полюсе зацепления.

по линии зацепления, т. е. под углом α_w к общей касательной делительных окружностей. Силу F_{n2} раскладывают на две составляющие F'_{n2} и F_{r2}. В свою очередь, силу F'_{n2} раскладывают на окружную F_{t2} и осевую F_{a2} силы. Таким образом, в зацеплении червяка и червячного колеса (рис. 3.127, *б*; для ясности изображения

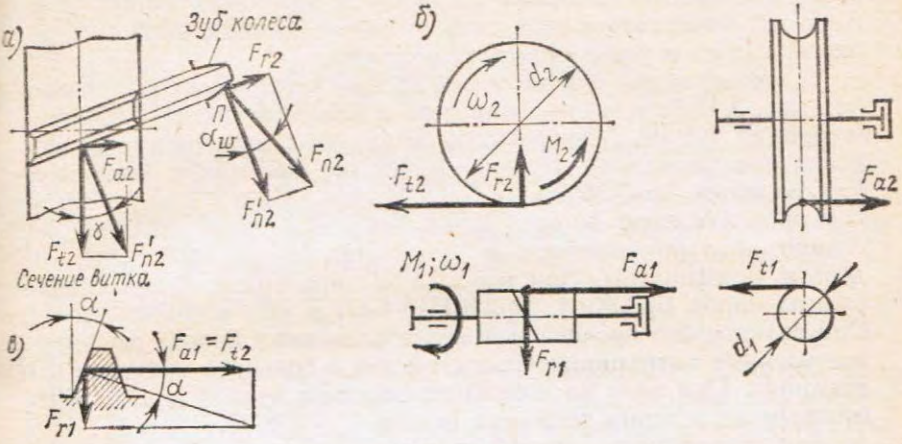


Рис. 3.127

зацепление раздвинуто) действуют: окружная сила F_{t1} на червяке, равная осевой силе F_{a2} на колесе:

$$F_{t1} = F_{a2} = 2M_1/d_1; \qquad (3.193)$$

осевая сила F_{a1} на червяке, равная окружной силе F_{t2} на колесе

$$F_{a1} = F_{t2} = 2M_2/d_2; \qquad (3.194)$$

радиальная сила на червяке F_{r1} (рис. 3.127, *в*), равная радиальной силе F_{r2} на колесе:

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{t2} \operatorname{tg} \alpha. \qquad (3.195)$$

Направление осевых сил F_{a1} и F_{a2} зависит от направления вращения червяка и направления его линии витка. Окружные силы F_{t1} и F_{t2} всегда направлены против действия соответствующих моментов. Из рис. 3.127, *а* и формулы (3.194) находим

$$F_{n2} = F_{t2}/(\cos \alpha_w \cos \gamma) = 2M_2/(d_2 \cos \alpha_w \cos \gamma). \qquad (3.196)$$

§ 3.50. МАТЕРИАЛЫ ЧЕРВЯЧНОЙ ПАРЫ

Высокие скорости скольжения и неблагоприятные условия смазки требуют, чтобы материалы червяка и колеса имели низкий коэффициент трения, повышенное сопротивление износу и пониженную склонность к заеданию. Выполнение червячной пары из однородных материалов не дает желаемых результатов, поэтому червяк и колесо изготовляют из различных материалов.

Червяки изготовляют из сталей (45, 40Х, 38ХГН и др.) с поверхностной или объемной закалкой до твердости HRC45...55 и последующим шлифованием и полированием витков. Наилучшее качество работы передачи обеспечивают червяки из цементированных сталей (18ХГТ, 20Х, 20ХФ и др.) с твердостью после термообработки HRC58...63. Высокая твердость и гладкость витков обеспечивают наибольшую стойкость зубьев червячных колес в отношении износа и усталостного разрушения.

Червячные колеса для экономии бронзы изготовляют составными (см. рис. 3.124): венец — из бронзы, а колесный центр — из стали и реже из чугуна. Марку бронзы выбирают в зависимости от скорости скольжения v_s. При v_s=5...25 м/с применяют оловянные бронзы марок БрОФ6,5-0,15, БрОНФ, БрОЦС6-6-3 и др., а также сурьмяноникелевую бронзу марки БрСуН7-2. Они обладают высокими антифрикционными и противозадирными свойствами, но дороги и дефицитны. При v_s=2...5 м/с применяют безоловянные бронзы марок БрАЖ9-4, БрАЖН10-4-4Л и др., а также латуни. Они значительно прочней и дешевле оловянных бронз, но имеют пониженные антифрикционные свойства и большую склонность к заеданию. При этом во избежание заедания червяк должен быть отшлифован и иметь твердость витков H>HRC45.

Для тихоходных низконагруженных передач при $v_s \leqslant 2$ м/с червячные колеса изготовляют цельными из серых чугунов марок СЧ10, СЧ15 и др.

§ 3.51. ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ ЗУБЬЕВ ЧЕРВЯЧНЫХ КОЛЕС

Наиболее характерные виды разрушения: заедание и износ зубьев червячного колеса, как менее прочного элемента передачи.

Заедание зубьев (см. § 3.37) более опасно, чем усталостное разрушение в передачах с колесами из твердых безоловянных бронз и чугунов. В этом случае заедание переходит в задир поверхности частицами бронзы, приварившимися к виткам червяка, с последующим быстрым износом и разрушением зубьев. В передачах с колесами из оловянных бронз (мягкие материалы) наиболее опасно усталостное выкрашивание рабочих поверхностей зубьев колес, но возможно и заедание, которое проявляется в постепенном намазывании бронзы на червяк, при этом передача еще может работать продолжительное время. Для предупреждения заедания ограничивают значение контактных напряжений σ_H, применяют актифрикционные материалы и др.

Износ зубьев зависит от шероховатости поверхности червяка, точности монтажа, степени загрязненности масла, частоты пусков и остановок передачи, а также от значения σ_H. После износа происходит излом зубьев.

Так как заедание и износ зубьев зависят от контактных напряжений, то *основным критерием работоспособности и расчета червячных передач является контактная прочность рабочих поверх-*

ностей зубьев колеса. При этом расчет зубьев на изгиб производится как проверочный.

При работе передачи из-за повышенного трения скольжения в зацеплении происходит выделение большого количества теплоты, что ухудшает условия смазки, при этом увеличиваются износ и опасность заедания, поэтому обязательно производят *тепловой расчет червячной передачи.*

§ 3.52. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ТЕПЛОВОЙ РАСЧЕТ ЧЕРВЯЧНЫХ ПЕРЕДАЧ

Расчет на контактную прочность зубьев червячного колеса. Этот расчет должен обеспечивать не только отсутствие усталостного разрушения поверхностей зубьев, но и отсутствие заедания. По аналогии с расчетом зубчатых передач наибольшее контактное напряжение определяют по формуле (3.2). Расчетная нагрузка на единицу длины контактной линии

$$q = F_{n2} K_H / l_\Sigma = 2M_2 K_H / (1{,}3 d_1 d_2 \cos\alpha_w),$$

где F_{n2} — по формуле (3.196); K_H — коэффициент нагрузки (см. ниже); $l_\Sigma = 1{,}3 d_1 / \cos\gamma$ * — суммарная длина контактных линий.

Приведенный радиус кривизны $\rho_{пр}$ червячной пары (см. § 3.38), ввиду того что в осевом сечении витки червяка имеют профиль прямообочной рейки (см. рис. 3.122) с $\rho_1 = \infty$, равен радиусу профиля зуба червячного колеса в полюсе зацепления:

$$\rho_{пр} = \rho_2 = d_2 \sin\alpha_w / 2.$$

Приведенный модуль упругости $E_{пр} = 2E_1E_2/(E_1+E_2)$, где E_1 — модуль упругости материала червяка, E_2 — то же, венца червячного колеса. Для стали $E_1 = 2{,}15 \cdot 10^{11}$ Па, для бронзы и чугуна среднее значение $E_2 \approx 0{,}98 \cdot 10^{11}$ Па.

Подставив значения q, $\rho_{пр}$ и $E_{пр}$ в формулу (3.2) и приняв $\nu = 0{,}3$, после преобразования с учетом равенств (3.176), (3.179) и (3.184) получим *формулу проверочного расчета*:

$$\sigma_{H2} = (170 \cdot 10^3 q / z_2) \sqrt{\left[\frac{(z_2/q)+1}{a_w}\right]^3 M_2 K_H} \leqslant [\sigma_H]_2, \quad (3.197)$$

где σ_{H2} и $[\sigma_H]_2$ — расчетное и допускаемое контактные напряжения в зубьях колеса, Па; a_w — межосевое расстояние, м; M_2 — вращающий момент на червячном колесе, Н·м. Решая уравнение (3.197) относительно a_w, получим *формулу проектировочного расчета*:

$$a_w \geqslant 3070 (z_2 + q) \sqrt[3]{M_2 K_H / [([\sigma_H]_2 z_2)^2 q]}. \quad (3.198)$$

При некотором среднем значении z_2, q и K_H получим приближенную формулу проектировочного расчета:

$$a_w \geqslant 6100 \sqrt[3]{M_2 / [\sigma_H]_2^2}. \quad (3.199)$$

* Вывод этой формулы см. в [18, 23].

Расчет зубьев червячного колеса на изгиб. Этот расчет аналогичен расчету зубьев цилиндрических косозубых колес. При этом в формулу (3.126) вводят следующие поправки и упрощения: зубья червячного колеса вследствие дуговой формы (см. рис. 3.124) примерно на 40% прочней зубьев цилиндрического косозубого колеса, что учитывается уменьшением коэффициента Y_{F2}; для червячного зацепления принимают коэффициент $Y_\varepsilon = 0{,}74$; при среднем значении $\gamma \approx 10°$ получим $Y_\beta = 1 - \gamma/140° = 1 - 10°/140° = 0{,}93$ и $m_n = m \cos\gamma \approx 0{,}98m$. С учетом этих поправок, приняв $K_{F\alpha} = 1$, а $K_F = K_{F\beta} K_{Fv}$, получим *формулу проверочного расчета* зубьев червячного колеса:

$$\sigma_{F2} = 0{,}7 M_2 Y_{F2} K_F (u+1)/(a_w b_2 m u) \leqslant [\sigma_F]_2. \qquad (3.200)$$

Коэффициент формы зуба Y_{F2} выбирают в зависимости от эквивалентного числа зубьев колеса z_{v2}.

Так как γ угол наклона зуба червячного колеса, то, по аналогии с косозубым колесом,

$$z_{v2} = z_2/\cos^3\gamma. \qquad (3.201)$$

z_{v2}	28	30	32	35	37	40	45	50	60	80	100
Y_{F2}	1,80	1,76	1,71	1,64	1,61	1,55	1,48	1,45	1,40	1,34	1,30

Коэффициенты нагрузки. Коэффициент нагрузки $K_H = K_{H\beta} K_{Hv}$, где $K_{H\beta}$ — коэффициент концентрации нагрузки; K_{Hv} — коэффициент динамической нагрузки. Концентрация нагрузки по ширине венца червячного колеса в основном вызывается деформациями червяка, который имеет значительные расстояния между опорами. Хорошая прирабатываемость зубьев колеса уменьшает значение $K_{H\beta}$, которое незначительно выше единицы. При постоянной нагрузке происходит полная приработка и $K_{H\beta} = 1$.

Погрешности изготовления и сборки передачи служат причиной пульсации окружной скорости червячного колеса при постоянной скорости червяка, что приводит к возникновению в зацеплении динамической нагрузки, которая при расчетах учитывается коэффициентом K_{Hv}. Значение K_{Hv} зависит от степени точности передачи и окружной скорости v_2 колеса. При $v_2 < 3$ м/с $K_{Hv} = 1$ независимо от степени точности. При $v_2 > 3$ м/с для 7-й и 8-й степеней точности $K_{Hv} = 1{,}03 \ldots 1{,}08$.

Коэффициент нагрузки $K_F = K_{F\beta} K_{Fv}$. При расчетах принимают $K_{F\beta} = K_{H\beta}$ и $K_{Fv} = K_{Hv}$ при $v_2 < 3$ м/с, а при $v_2 > 3$ м/с $K_{Fv} = 1{,}05 \ldots 1{,}20$.

Допускаемые напряжения *. *Допускаемые контактные напряжения для колес из оловянных бронз* определяют из условия сопротивления усталостному разрушению рабочих поверхностей зубьев по формуле

$$[\sigma_H]_2 = [\sigma_{H_0}] K_{HL}, \qquad (3.202)$$

* Определение допускаемых напряжений для червячных колес дано при шлифованных и полированных червяках с твердостью рабочих поверхностей витков $H \geqslant$ HRC 45.

где $[\sigma_{H0}]=0{,}9\sigma_в$ — допускаемое контактное напряжение при 10^7 циклах; $\sigma_в$ — предел прочности бронзы на растяжение (табл. 3.14) $K_{HL}=\sqrt[8]{10^7/N_{\Sigma_2}}$ — коэффициент долговечности при расчете на контактную прочность; N_{Σ_2} — расчетное число циклов нагружения зубьев колеса за весь срок службы передачи [см. формулу (3.133)]. Если $N_{\Sigma 2}>25\cdot10^7$, то следует принимать $25\cdot10^7$, тогда минимальное значение $K_{HL}=0{,}67$. Значения K_{HL} не должны превышать 1,15. Значения $[\sigma_H]_2$ при $N_{\Sigma 2}=25\cdot10^7$ даны в табл. 3.14.

Допускаемые контактные напряжения $[\sigma_H]_2$ *для колес из безоловянных бронз и чугунов* определяют из условия сопротивления заеданию в зависимости от скорости скольжения v_s по табл. 3.14 *.

Таблица 3.14

Марка бронзы	Способ отливки	Механические характеристики, МПа		Допускаемые напряжения, МПа						
				$[\sigma_H]_2$ при скорости скольжения v_s, м/с						$[\sigma_F]_2$
		$\sigma_в$	$\sigma_т$	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	
БрОФН	Центробежный	290	170	175						43/30
БрОЦС6-6-3	В кокиль	200	90	121						24/18
БрАЖ9-4	То же	500	200	182	179	173	167	161	150	59/52
БрАЖН10-4-4Л	»	600	200	196	192	187	181	175	164	64/62

Примечание. В числителе даны значения $[\sigma_F]_2$ для нереверсивных передач, в знаменателе — для реверсивных **.

Допускаемые напряжения изгиба для бронзовых червячных колес при нереверсивной передаче $[\sigma_F]_2=[\sigma_{F0}]K_{FL}$; при реверсивной передаче $[\sigma_F]_2=[\sigma_{-1F0}]K_{FL}$, где $[\sigma_{F0}]=0{,}25\sigma_в+0{,}08\sigma_т$ и $[\sigma_{-1F0}]=0{,}16\sigma_в$ — допускаемые напряжения изгиба зубьев при 10^6 циклах; $K_{FL}=\sqrt[9]{10^6/N_{\Sigma 2}}$ — коэффициент долговечности при работе на изгиб. Если $N_{\Sigma 2}<10^6$, то принимают $N_{\Sigma 2}=10^6$, тогда $K_{FL}=1$. Если $N_{\Sigma 2}>25\cdot10^7$, то принимают $N_{\Sigma 2}=25\cdot10^7$, тогда $K_{FL}=0{,}543$. Значения $[\sigma_F]_2$ при $N_{\Sigma 2}=25\cdot10^7$ даны в табл. 3.14.

Тепловой расчет. Расчет выполняют как проверочный на основе теплового баланса: $Q_в=Q_0$, где $Q_в=(1-\eta)P_1$ — количество теплоты, выделяемой работающей передачей в 1 с ***; $Q_0=K_т(t_м-t_в)A$ — количество теплоты, выделяемой наружной поверхностью корпуса в 1 с. Из условия теплового баланса находим $(1-\eta)P_1=$

---

* Допускаемые напряжения для чугунов см. в [18, 25].

** Неверсивная передача — это передача, в которой зубья работают одной стороной; реверсивная — зубья работают обеими сторонами.

*** Считают, что потерянная мощность в передаче полностью переходит в теплоту, которая нагревает масло.

$=K_т(t_м-t_в)A$, откуда

$$t_м=t_в+(1-\eta)P_1/(K_тA), \qquad (3.203)$$

где $t_м$ — температура масла в корпусе передачи, °С; $t_в\approx 20$°С — температура окружающего воздуха; η — к. п. д. передачи; P_1 — мощность на валу червяка, Вт; $K_т$ — коэффициент теплоотдачи *. Зависит от материала корпуса и скорости циркуляции воздуха. Для чугунных корпусов принимают $K_т=8...17$ Вт/(м²·°С). Бóльшие значения используют при хорошей циркуляции воздуха вокруг корпуса и интенсивном перемешивании масла (при нижнем или боковом расположении червяка); A — поверхность охлаждения корпуса (без учета поверхности днища), омываемая свободно циркулирующим воздухом. Поверхность A определяют по размерам корпуса. Ориентировочно можно принимать (м²) $A=20a_w^{1,7}...20a_w^2$. Условие работы передачи без перегрева

$$t_м\leqslant[t_м], \qquad (3.204)$$

где $[t_м]=85...95$°С — допускаемая температура масла. При $t>[t_м]$ необходимо увеличить поверхность охлаждения, применяя охлаждающие ребра или искусственное охлаждение (обдувание корпуса воздухом с помощью вентилятора, размещение в масляной ванне змеевика с циркулирующей водой и т. п.).

Пример 3.5. По данным примера 3.3 рассчитать червячную передачу редуктора, приняв передаточное число $u=20$.

Решение. 1. Ориентировочное значение к. п. д. редуктора [формула (3.192)]

$$\eta\approx 0{,}95\,(1-u/200)=0{,}95\,(1-20/200)=0{,}85.$$

2. Вращающие моменты на валах: $M_1=P_1/\omega_1=8{,}6\times10^3/151$ Н·м=57 Н·м;

$$M_2=M_1u\eta=(57\cdot20\cdot0{,}85)\text{ Н·м}=969\text{ Н·м}.$$

3. Принимаем $z_1=2$ (рекомендации по выбору z_1, см. § 3.47), тогда

$$z_2=uz_1=20\cdot2=40>z_{2\min}=28.$$

4. Ориентировочное значение скорости скольжения

$$v_s=4{,}3\cdot10^{-3}\omega_1\sqrt[3]{M_2}=4{,}3\cdot10^{-3}\cdot151\sqrt[3]{969}\text{ м/с}=6{,}43\text{ м/с}.$$

5. Материалы и допускаемые напряжения. При $v_s>5$ м/с для венца червячного колеса надо применять оловянные бронзы (см. § 3.50). Принимаем бронзу БрОНФ. Для червяка принимаем сталь 38ХГН с закалкой до твердости рабочих поверхностей $H>$HRC45. По табл. 3.14 принимаем $[\sigma_H]_2=175$ МПа и $[\sigma_F]_2=43$ МПа.

6. Межосевое расстояние [см. формулу (3.199)]

$$a_w\geqslant 6100\sqrt[3]{969/(175\cdot10^6)^2}=0{,}193\text{ м}=193\text{ мм}.$$

(При проектировании червячных редукторов с параметрами по ГОСТ 2144—76 полученное значение a_w округляют до стандартного и назначают соответствующие ему стандартные значения m, q, u, z_1 и z_2.)

7. Предварительно принимаем коэффициент диаметра червяка $q\geqslant0{,}25\,z_2=0{,}25\cdot40=10$ и определяем модуль [см. формулу (3.184)]:

$$m=2a_w/(q+z_2)=[2\cdot193/(10+40)]\text{ мм}=7{,}72\text{ мм}.$$

---

* Коэффициент теплоотдачи соответствует поверхностной плотности теплового потока 1 Вт/м² при разности температур в один градус.

Принимаем стандартные значения $m=8$ мм и $q=10$ (см. § 3.47), тогда $a_w=m(q+z_2)/2=[8(10+40)/2]$мм$=200$ мм.

8. Основные размеры червяка [см. рис. 3.122 и формулы (3.176)...(3.178)]:

$$d_1=qm=10\cdot 8 \text{ мм}=80 \text{ мм}; \quad d_{a2}=d_1+2_m=80+2\cdot 8 \text{ мм}=96 \text{ мм};$$
$$d_{f1}=d_1-2{,}4m=80-2{,}4\cdot 8 \text{ мм}=60{,}8 \text{ мм};$$

$b_1=(C_1+C_2z_2)m=(11+0{,}06\cdot 40)\cdot 8$ мм$=107{,}2$ мм, увеличиваем b_1 на $3m$: $3\cdot 8$ мм$=24$ мм (см. § 3.47) и принимаем $b_1=130$ мм; угол γ [см. формулу (3.175)] $\gamma=\operatorname{arctg}(z_1/q)=\operatorname{arctg}(2/10)=11°19'$.

9. Основные размеры червячного колеса [см. рис. 3.124 и формулы (3.179)... (3.182)]: $d_2=mz_2=8\cdot 40$ мм$=320$ мм;

$$d_{a2}=d_2+2m=320+2\cdot 8 \text{ мм}=336 \text{ мм};$$
$$d_{f2}=d_2-2{,}4m=320-2{,}4\cdot 80=302-2{,}4\cdot 8 \text{ мм}=302{,}8 \text{ мм};$$
$$d_{aM_2}\leqslant d_{a_2}+6m/(z_1+2)=336+6\cdot 8/(2+2) \text{ мм}=348 \text{ мм};$$

$b_2\leqslant 0{,}75d_{a1}=0{,}75\cdot 96$ мм$=72$ мм. Принимаем $b_2=71$ мм.

10. Уточняем: скорость скольжения v_s' [см. формулу (3.190)]; к. п. д. редуктора η' [см. формулу (3.191) и табл. 3.13]; вращающий момент на валу колеса M_2'

$$v_s'=\omega_1 d_1/(2\cos\gamma)=[151\cdot 80\cdot 10^{-3}/(2\cos 11°19')] \text{ м/с}=6{,}16 \text{ м/с},$$
$$\eta'=\operatorname{tg}\gamma/\operatorname{tg}(\gamma+\varphi')=\operatorname{tg}11°19'/\operatorname{tg}(11°19'+1°11')=0{,}9,$$
$$M_2'=M_1u\eta'=57\cdot 20\cdot 0{,}9 \text{ Н}\cdot\text{м}=1026 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

11. Коэффициент нагрузки $K_H=K_{H\beta}K_{Hv}$ (см. § 3.52); $K_{H\beta}=1{,}0$; для определения K_{Hv} находим окружную скорость червячного колеса:

$$v_2=\omega_2 d_2/2=(7{,}55\cdot 320\cdot 10^{-3})/2 \text{ м/с}=1{,}2 \text{ м/с}<3 \text{ м/с};$$

следовательно, $K_{Hv}=1{,}0$, а $K_H=1{,}0\cdot 1{,}0=1{,}0$.

12. Расчетное контактное напряжение в зубьях колеса [см. формулу (3.197)]

$$\sigma_{H2}=(170\cdot 10^3\cdot 10/40)\sqrt{\left[\frac{(40/10)+1}{200\cdot 10^{-3}}\right]^3\cdot 1026\cdot 1{,}0}=$$
$$=170\cdot 10^6 \text{ Па}=170 \text{ МПа}<[\sigma_H]_2=175 \text{ МПа}.$$

13. Силы, действующие в зацеплении [см. формулы (3.193)...(3.195)],

$$F_{t1}=F_{a2}=2M_1/d_1=2\cdot 57/80\cdot 10^{-3} \text{ Н}=1425 \text{ Н};$$
$$F_{a1}=F_{t2}=2M_2'/d_2=2\cdot 1026/320\cdot 10^{-3} \text{ Н}=6410 \text{ Н};$$
$$F_{r1}=F_{r2}=F_{t2}\operatorname{tg}\alpha=6410\cdot\operatorname{tg}20° \text{ Н}=2330 \text{ Н}.$$

14. Эквивалентное число зубьев червячного колеса [см. формулу (3.201)] $z_{v2}=z_2/\cos^3\gamma=40/\cos^3 11°19'=42{,}4$. Коэффициент формы зуба $Y_{F2}=1{,}52$ (см. § 3.52). Коэффициент нагрузки $K_F=1{,}0$.

15. Расчетное напряжение изгиба в зубьях колеса [см. формулу (3.200)]

$$\sigma_{F2}=0{,}7\cdot 1026\cdot 1{,}52\cdot 1{,}0\,(20+1)/(200\cdot 10^{-3}\cdot 71\cdot 10^{-3}\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot 20)=$$
$$=10\cdot 10^6 \text{ Па}=10 \text{ МПа}<[\sigma_F]_2=43 \text{ МПа}.$$

16. Ориентировочное значение поверхности охлаждения корпуса

$$A=20a_w^2=20\cdot 0{,}2^2=0{,}8 \text{ м}^2.$$

17. Температура масла в редукторе [см. формулу (3.203)]

$$t_м=t_в+(1-\eta')\,P_1/(K_T A)=20+(1-0{,}9)\cdot 8{,}6\cdot 10^3/(15\cdot 0{,}8)=$$
$$=91°C<[t_м]=95°C.$$

Глава 11
ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

§ 3.53. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Цепная передача относится к передачам зацеплением с гибкой связью (цепью). Передача состоит из ведущей *1* и ведомой *2* звездочек и охватывающей их цепи (рис. 3.128). Цепь в отличие от ремней изгибается только в одной плоскости, поэтому звездочки устанавливаются на строго параллельных валах. Принцип зацепления, а не трения, устраняет проскальзывание и буксование при работе передачи.

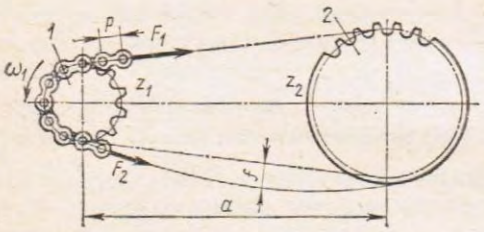


Рис. 3.128

Достоинства: возможность передачи мощности на большие расстояния (до 8 м); по сравнению с ременными передачами: могут передавать бóльшие мощности; меньшая нагрузка на валы, так как предварительное натяжение цепи невелико; более компактны, высокий к. п. д. (до 0,98); возможность передачи движения одной ведущей звездочки нескольким ведомым с разным направлением вращения. *Недостатки*: сравнительно быстрый износ шарниров и, как следствие, удлинение цепи, что требует натяжных устройств; необходимость тщательного монтажа и ухода; повышенный шум вследствие удара звена цепи при входе в зацепление, особенно при малых числах зубьев звездочек, большом шаге и высокой скорости цепи (см. § 3.55).

Применяют при значительных расстояниях между валами, когда ременные передачи ненадежны. Наибольшее распространение получили в сельскохозяйственном, транспортном и химическом машиностроении, а также в подъемно-транспортных устройствах. Передаваемая мощность обычно до 100 кВт при скорости цепи до 15 м/с. Иногда применяют цепные вариаторы, выполненные по схеме вариаторов с раздвижными коническими дисками (см. § 3.21).

§ 3.54. ДЕТАЛИ ЦЕПНЫХ ПЕРЕДАЧ И СМАЗКА ЦЕПИ

Приводные цепи. Основными типами приводных цепей являются роликовые и втулочные цепи (ГОСТ 13568—75) и зубчатые цепи (ГОСТ 13552—68).

Роликовые цепи (рис. 3.129 и табл. 3.15). Однорядная роликовая цепь состоит из чередующихся наружных *А* и внутренних *Б* звеньев. Каждое звено выполнено из двух пластин (*1* и *2* соответственно). Пластины, образующие наружное звено, напрессованы на валик *3*,

Таблица 3.15

Обозначение цепей	Шаг цепи p, мм	Проекция опорной поверхности шарнира однорядной цепи $A_{оп}$, мм	Разрушающая нагрузка $F_р$, кН
ПР-12,7-18,2	12,70	50	18,2
ПР-15,875-22,7	15,875	71	22,7
ПР-19,05-31,8	19,05	106	31,8
ПР-25,4-56,7	25,40	180	56,7
ПР-31,75-88,5	31,75	262	88,5

а образующие внутреннее звено — на втулку *4*, вращающуюся на валике. Втулка и валик образуют шарнир. На втулку свободно надет ролик *5*. Зацепление цепи со звездочкой происходит через ролик, который, перекатываясь по зубу звездочки без скольжения, уменьшает его износ. Кроме того, ролик выравнивает сосредоточенное давление зуба на втулку и тем самым уменьшает его износ. Предпочтительно применять цепи с четным числом звеньев, так как при нечетном их числе для соединения концов цепи надо применять специальное переходное звено. Роликовые цепи имеют широкое распространение. Рекомендуются при скорости цепи $v \leqslant 15$ м/с.

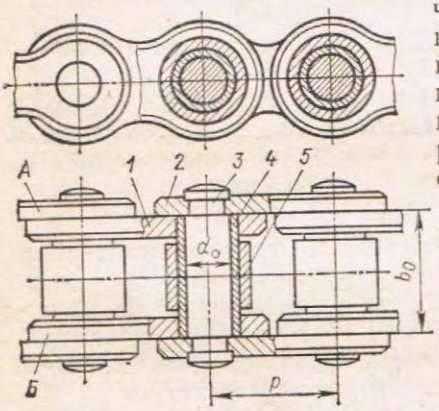


Рис. 3.129

При больших нагрузках и скоростях во избежание больших



Рис. 3.130

шагов применяют двух- и реже трех- и четырехрядные цепи; их собирают из деталей однорядных цепей, но с более длинными валиками. Передаваемые мощности и разрушающие нагрузки почти пропорциональны числу рядов. На рис. 3.130 показана приводная роликовая двухрядная цепь. По ГОСТ приводная роликовая однорядная цепь обозначается двумя буквами — ПР, двухрядная — 2ПР т. д. Стоящие после букв числа обозначают шаг p цепи (мм) и разрушающую нагрузку $F_р$ цепи * (кН).

Втулочные цепи отличаются от рассмотренных отсутствием роликов. Это увеличивает износ цепи и звездочек, но снижает ее

* По ГОСТ 13568—75 шаг цепи обозначается t, а разрушающая нагрузка Q_0.

массу и стоимость. Применяют в неответственных передачах при скорости $v \leqslant 1$ м/с.

Зубчатые цепи с шарнирами качения (рис. 3.131) состоят из набора пластин *1*, имеющих два зуба с впадиной между ними для зуба звездочки, соединенных шарниром *2*. Шарнир состоит из двух призм с цилиндрическими поверхностями. Одна из призм соединяется с пластинами одного звена, а другая — с пластинами соседнего звена, поэтому при движении цепи призмы перекатываются одна по другой, обеспечивая трение качения. Для устранения бокового сползания цепи со звездочки применяют направляющие пластины *3*. Зубчатые цепи по сравнению с другими позволяют передавать большие нагрузки, работают более плавно, с меньшим шумом, но они сложней в изготовлении, тяжелей и дороже. Рекомендуются при скоростях $v \leqslant 35$ м/с.

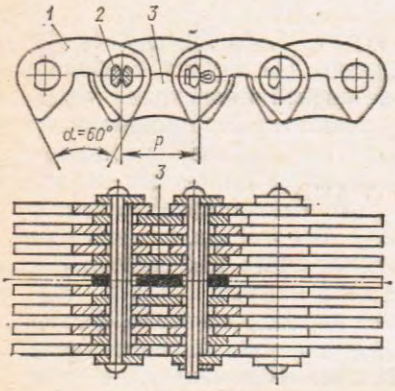


Рис. 3.131

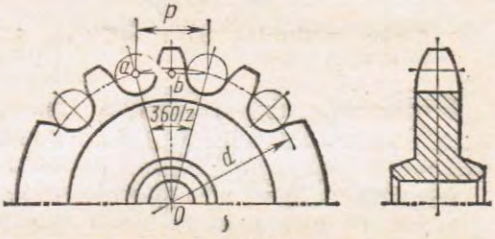


Рис. 3.132

Звездочки (рис. 3.132). По конструкции звездочки во многом подобны зубчатым колесам. Профиль и размеры зубьев звездочек зависят от конструкции и размеров цепи и выполняются для роликовых и втулочных цепей по ГОСТ 591—69. Делительная окружность звездочек проходит через центры шарниров цепи. Из треугольника *Oab* видно, что делительный диаметр звездочки

$$d = p/\sin(180°/z), \qquad (3.205)$$

где z — число зубьев звездочки; p — шаг зубьев, который измеряют по хорде делительной окружности.

Материал звездочек должен быть износостойким и хорошо сопротивляться ударным нагрузкам. Применяют закаленные (45, 45Г и др.) или цементированные (20, 20Х и др.) стали. При скорости цепи $v \leqslant 3$ м/с и большом числе зубьев ведомой звездочки применяют чугун СЧ25 и др. Для зубчатого венца звездочек применяют пластмассы, что понижает шум при работе передачи.

Натяжные устройства. В результате износа и приработки шарниров цепь вытягивается, стрела провисания f ведомой ветви увеличивается (см. рис. 3.128), что вызывает проскальзывание, захлестывание и соскакивание цепи со звездочек. Оптимальную стрелу провисания ($f \approx 0{,}02a$) получают регулированием натяжения цепи,

которое осуществляется перемещением оси одной из звездочек, оттяжными звездочками или натяжными роликами. Натяжные устройства должны компенсировать удлинение цепи в пределах двух звеньев, при большем удлинении два звена цепи удаляют.

Смазка цепи. Смазка оказывает существенное влияние на долговечность цепи. Выбор способа смазки зависит от скорости v цепи. При $v \leqslant 4$ м/с применяют периодическую смазку ручной масленкой, при $v \leqslant 6$ м/с — непрерывную капельную. При $v > 6$ м/с применяют непрерывную картерную смазку следующих видов: окунанием цепи в масляную ванну ($v \leqslant 10$ м/с); разбрызгиванием с помощью маслоподъемных щитков или колес ($v = 6...12$ м/с); циркуляционную под давлением ($v > 10$ м/с). Для цепных передач, не имеющих картера (как правило, транспортные машины), применяют внутришарнирную смазку ($v < 4$ м/с), которая осуществляется погружением снятой цепи в подогретую пластичную смазку через 120...180 ч работы.

§ 3.55. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ, КИНЕМАТИКА И ГЕОМЕТРИЯ

Шаг цепи (см. рис. 3.129). Шаг цепи p является исходной характеристикой, через которую выражают все геометрические параметры передачи. С увеличением шага повышается нагрузочная способность цепи, но при этом возрастают динамические нагрузки (удары звеньев цепи о зубья при набегании на звездочку) и шум при работе (см. ниже). При больших скоростях рекомендуются цепи с малым шагом.

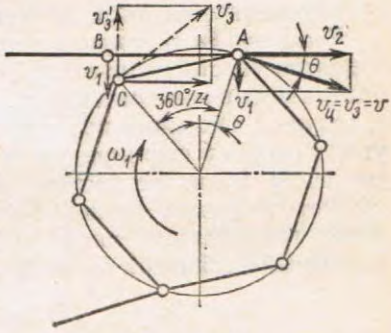


Рис. 3.133

Скорость цепи. Для цепных передач характерна не постоянная, а средняя скорость движения цепи. Это объясняется тем, что цепь состоит из отдельных звеньев и располагается на звездочке не по окружности, а по многоугольнику с числом вершин, равным числу зубьев звездочки. Поэтому скорость цепи переменна в пределах поворота звездочки на один зуб, но средняя скорость за один оборот цепи постоянна.

На рис. 3.133 показан момент, когда шарнир A находится в зацеплении с зубом звездочки. Его скорость $v_ц$ равна окружной скорости звездочки v_3. Разложим эту скорость на две составляющие: v_2, направленную вдоль ветви цепи, и v_1, перпендикулярную цепи. Движение звездочки определяется скоростью $v_2 = v \cos \theta$. Угол θ при повороте звездочки на один шаг изменяется в пределах от $-180°/z_1$ (момент входа в зацепление шарнира A) до $+180°/z_1$ (момент входа в зацепление шарнира B с зубом C), поэтому изме-

няется и скорость v_2. *Периодическое изменение v_2 является причиной непостоянства передаточного числа и дополнительных динамических нагрузок.*

Со скоростью $v_1 = v \sin\theta$ связаны поперечные колебания ветвей цепи. В момент входа в зацепление шарнира B с зубом C вертикальные составляющие их скоростей v_1 и v_3' направлены навстречу друг другу — соприкосновение шарнира с зубом сопровождается ударом. *Удары являются основной причиной разрушения шарниров цепи и зубьев звездочек, а также повышенного шума передачи.* Для ограничения вредного влияния ударов выработаны рекомендации по выбору максимального значения шага цепи p в зависимости от максимальной угловой скорости ведущей звездочки $\omega_{1\,max}$. Для роликовых цепей при $z_1 > 15$:

p, мм	12,7	15,875	19,05	25,4	31,75	38,1
ω_{1max}, рад/с	125	100	90	80	63	50

Средняя скорость цепи за один оборот (м/с)

$$v = \omega d/2 = z_1 p \omega_1/(2\pi) = z_2 p \omega_2/(2\pi), \qquad (3.206)$$

где d — делительный диаметр звездочки, м; p — шаг цепи, м; z_1 и z_2 — числа зубьев ведущей и ведомой звездочек; ω_1 и ω_2 — угловые скорости ведущей и ведомой звездочек, рад/с.

Передаточное число. Определяют из условия равенства скоростей цепи на звездочках

$$u = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1. \qquad (3.207)$$

Рекомендуется $u \leqslant 4$, допускается $u \leqslant 7$.

Число зубьев z_1 ведущей звездочки существенно влияет на работу и долговечность цепного привода. Размеры передачи минимальны при минимальном значении z_1. Однако с уменьшением числа зубьев z_1 ведущей звездочки при прочих равных условиях из-за большого угла поворота шарнира увеличивается неравномерность скорости движения цепи, возрастает износ шарниров цепи. Поэтому не следует назначать слишком малое число зубьев на ведущей звездочке. Минимальное число зубьев ведущей звездочки для роликовых цепей выбирают по эмпирической зависимости

$$z_{1\,min} = 29 - 2u^*. \qquad (3.208)$$

Число зубьев z_2 ведомой звездочки

$$z_2 = u z_1. \qquad (3.209)$$

Максимальное число зубьев $z_{2\,max}$ ограничивается увеличением шага вследствие износа шарниров, в результате чего звенья цепи перемещаются по рабочему профилю к вершине зуба. Во избежание нарушения зацепления цепи с зубьями звездочки допускаемое максимальное число зубьев большей звездочки рекомендуется принимать для роликовой цепи $z_2 \leqslant 120$, для втулочной — $z_2 \leqslant 90$, для

---

* В передачах с зубчатыми цепями $z_{1\,min}$ принимают на 20...30% выше по сравнению с роликовыми цепями.

зубчатой — $z_2 \leqslant 140$. Число зубьев звездочек целесообразно принимать нечетным, чтобы не было постоянного контактирования одного зуба с одним и тем же звеном. Это способствует равномерному износу зубьев звездочки и шарниров цепи.

Межосевое расстояние a и длина цепи L. Это важные взаимосвязанные параметры цепной передачи. При неправильном выборе межосевого расстояния нарушается нормальная работа цепной передачи: при очень малом значении a наступает быстрый износ цепи, при очень большом — ведомая ветвь имеет большое провисание, что приводит к ее колебаниям и увеличению габаритных размеров передачи. Оптимальное межосевое расстояние

$$a = (30 \ldots 50)\, p. \tag{3.210}$$

Числовой коэффициент принимают тем больше, чем выше передаточное число.

Число звеньев L_p цепи определяют по предварительно принятому межосевому расстоянию a, шагу p и числу зубьев z_1 ведущей и z_2 ведомой звездочек:

$$L_p = 2a/p + 0{,}5\,(z_1 + z_2) + p\,(z_2 - z_1)^2/(40a). \tag{3.211}$$

Полученное значение L_p округляют до целого четного числа звеньев, что в сочетании с нечетным числом зубьев звездочек способствует более равномерному износу цепи и исключает применение специального соединительного звена. Длина цепи

$$L = L_p p. \tag{3.212}$$

Межосевое расстояние передачи при окончательно выбранном числе звеньев

$$a' = 0{,}25p\,(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 8\Delta_2})^*, \tag{3.213}$$

где $\Delta_1 = L_p - 0{,}5\,(z_1 + z_2)$; $\Delta_2 = [\,(z_2 - z_1)/(2\pi)]^2$.

Для нормальной работы передачи ведомая ветвь должна иметь необходимую стрелу провисания, для чего расчетное межосевое расстояние нерегулируемых передач уменьшают на $(0{,}002 \ldots 0{,}004)a'$.

§ 3.56. СИЛЫ В ВЕТВЯХ ЦЕПИ. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ВАЛЫ

Силы в ветвях цепи. Силовая схема цепной передачи аналогична силовой схеме ременной передачи. Здесь также различают натяжение F_1 ведущей и F_2 ведомой ветвей цепи (см. рис. 3.128). Однако в цепной передаче в отличие от ременной предварительное натяжение цепи обычно не требуется. При этом условии силы, действующие на ведущую звездочку, $F_1 = F_t + F_2$; $F_2 = F_q + F_v$. Здесь F_t — окружная сила, передаваемая цепью:

$$F_t = P/v, \tag{3.214}$$

* Расчет по формуле (3.213) выполняют только при отсутствии натяжных устройств в передаче.

F_q — натяжение от силы тяжести холостой ветви, которое обычно составляет всего несколько процентов от окружной силы; F_v — натяжение от действия центробежных сил. Для большинства цепных передач ($v \leqslant 10$ м/с) F_v также невелико и им можно пренебречь. При этом для практических расчетов можно принимать

$$F_1 = F_t; \quad F_2 = 0. \tag{3.215}$$

Силы, действующие на валы передачи,

$$F_в = KF_t, \tag{3.216}$$

где K — коэффициент динамической нагрузки, зависящий от характера нагрузки, действующей на вал, и расположения передачи — угла наклона Θ линии центров звездочек к горизонту: при $\Theta = 0...40°$ $K = 1{,}15...1{,}30$; при $\Theta = 40...90°$, $K = 1{,}05...1{,}15$. Меньшие значения K соответствуют спокойной нагрузке, большие — ударной.

§ 3.57. РАСЧЕТ ЦЕПНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Основным критерием работоспособности и расчета цепных передач является долговечность работы цепи на износостойкость шарниров звеньев цепи.

Расчет на износостойкость шарниров звеньев цепи. Расчет выполняют как проверочный. Для получения необходимой долговечности цепной передачи из условия износостойкости шарниров среднее давление $p_ц$ в шарнирах не должно превышать допускаемого $[p_ц]$:

$$p_ц = F_t K_э / (A_{оп} K_m) \leqslant [p_ц], \tag{3.217}$$

где F_t — окружная сила, передаваемая цепью, Н; $A_{оп} = d_0 b_0$ — площадь проекции опорной поверхности шарнира (см. табл. 3.15 и рис. 3.129); d_0 — диаметр валика, b_0 — длина втулки; K_m — коэффициент, учитывающий число рядов цепи ($K_m = 1$ для однорядной цепи, $K_m = 1{,}7$ для двухрядной цепи); $K_э$ — коэффициент, учитывающий условия эксплуатации:

$$K_э = K_д K_н K_р K_с, \tag{3.218}$$

где $K_д$ — коэффициент динамической нагрузки, зависящий от типа привода (в приводах от электродвигателя $K_д = 1$ при спокойной нагрузке, $K_д = 1{,}5$ при нагрузке с толчками); $K_н$ — коэффициент наклона линии центров звездочек к горизонту ($K_н = 1$ при $\Theta \leqslant 60°$, $K_н = 1{,}25$ при $\Theta > 60°$); $K_р$ — коэффициент, учитывающий способ регулирования натяжения цепи ($K_р = 1{,}1$ для передач при регулировании оттяжными звездочками или нажимными роликами, $K_р = 1$ для передач с регулировкой положения одной из звездочек, $K_р = 1{,}25$ для передач с нерегулируемым межосевым расстоянием); $K_с$ — коэффициент, зависящий от способа смазки передачи ($K_с = 0{,}8$ при смазке в масляной ванне, $K_с = 1$ при непрерывной капельной или внутришарнирной смазке, $K_с = 1{,}5$ при периодической смазке); $[p_ц]$ — допускаемое среднее давление, га-

рантирующее в процессе работы передачи с принятым сроком службы равномерный износ шарниров звеньев цепи:

$$[p_ц] = C/(t_h K_v K_э) \leqslant 40 \text{ МПа}, \qquad (3.219)$$

где $C = 4 \cdot 10^6$ — коэффициент работоспособности; $t_h = 5 \cdot 10^3 ... 10^4$ ч — срок службы передачи; $K_v = \sqrt[3]{\omega_1^2}$ — коэффициент влияния угловой скорости ω_1 ведущей звездочки на износостойкость шарниров.

Проектировочный расчет. При расчете определяют шаг цепи p, исходя из допускаемого среднего давления в шарнире звена цепи. Выразив в формуле (3.217) $A_{оп}$ через шаг p ($A_{оп} \approx 0{,}28p^2$) и решив ее относительно p с учетом выражений (3.219), (3.214) и (3.206), получим формулу для проектировочного расчета при среднем значении межосевого расстояния $a \approx 40p$:

$$p \geqslant 0{,}0145 \sqrt[3]{P_1 K_v/(\omega_1 K_m)}^*, \qquad (3.220)$$

где P_1 — передаваемая мощность, кВт; p — м. Полученное значение p округляют для ближайшего стандартного по табл. 3.15. При принятом значении p заданная угловая скорость не должна превосходить наибольших рекомендуемых значений ω_{1max} (см. § 3.55).

Последовательность расчета роликовой однорядной цепной передачи. *Исходные данные*: передаваемая мощность P_1, кВт; угловая скорость ω_1 ведущей звездочки, рад/с; передаточное число u; условия работы.

1. По передаточному числу u определяют число зубьев z_1 ведущей звездочки [см. формулу (3.208)] и ведомой z_2 [см. формулу (3.209)]; при этом должно соблюдаться условие $z_2 \leqslant z_{2\,max} = 120$.

2. Определяют коэффициент влияния угловой скорости ω_1 на износостойкость шарниров $K_v = \sqrt[3]{\omega_1^2}$ и шаг цепи p по формуле (3.220), значение которого округляют до ближайшего стандартного по табл. 3.15.

3. Принятый шаг проверяют до допустимой угловой скорости ω_{1max} (см. § 3.55). Если условие $\omega_1 \leqslant \omega_{1max}$ не соблюдается, то увеличивают число рядов цепи и расчет повторяют.

4. Определяют среднюю скорость v цепи по формуле (3.206) и назначают способ смазки.

5. Задаются расчетными коэффициентами $K_д$, $K_н$, $K_р$, $K_с$ и определяют коэффициент эксплуатации $K_э$ по формуле (3.218).

6. Принимают срок службы передачи $t_h = 10^4$ ч и определяют допускаемое среднее давление $[p_ц]$ в шарнирах звеньев цепи по формуле (3.219).

7. Определяют окружную силу $F_t = P/v$, по табл. 3.15 принимают $A_{оп}$ и проверяют износостойкость цепи по формуле (3.217). Если условие $p_ц \leqslant [p_ц]$ не соблюдается, то увеличивают шаг цепи и расчет повторяют.

---

* При выводе формулы (3.220) для упрощения расчетов ряд значений коэффициентов и параметров, влияющих на работоспособность цепи, объединены постоянным числовым коэффициентом. Срок службы t_h принят 10^4 ч.

8. Определяют геометрические размеры передачи по формулам (3.210)...(3.212). При отсутствии натяжных устройств межосевое расстояние уточняют по формуле (3.213).

9. Определяют силу, действующую на вал, по формуле (3.216).

Глава 12
ВАЛЫ И ОСИ

§ 3.58. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Вал — вращающаяся деталь машины, предназначенная для поддержания установленных на нем зубчатых колес, звездочек, шкивов и т. п. и для передачи вращающего момента. При работе вал испытывает изгиб и кручение, а в отдельных случаях — дополнительно растяжение и сжатие. *Ось* — деталь машины, предназначенная только для поддержания установленных на ней деталей. В отличие от вала ось не передает вращающего момента и, следовательно, не испытывает кручения. В машинах оси могут быть *неподвижными*, несущими на себе свободно вращающиеся детали, например ось блока (рис. 3.134, *а*), и подвижными, вращающимися вместе с установленными на них деталями, например вагонная ось (рис. 3.135).

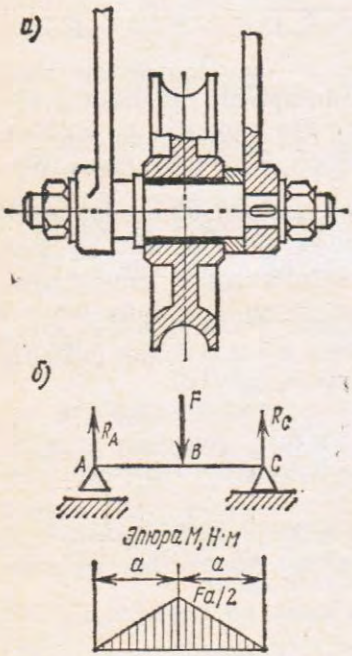


Рис. 3.134

Классификация. По геометрической форме валы делятся на *прямые*, *коленчатые и гибкие* *. По конструкции прямые валы и оси делятся на *гладкие* и *ступенчатые* (рис. 3.136). Гладкие, т. е. валы одного номинального диаметра, по всей длине обеспечивают хорошее центрование насаживаемых деталей и имеют повышенные прочность и жесткость из-за отсутствия проточек, являющихся концентраторами напряжений; для получения требуемых посадок участки вала отличаются допусками на диаметр и шероховатостью поверхности. Для сборки насаживаемых на валы деталей необходимы специальные приспособления. Ступенчатые валы и оси имеют более широкое распространение. Они обеспечивают удобную сборку (разборку) и фиксацию насаживаемых деталей от осевого смещения. Кроме того, уступы на валах воспринимают осевую нагрузку.

* Коленчатые и гибкие валы относятся к специальным деталям и здесь не рассматриваются.

По типу сечения валы и оси бывают *сплошные и полые*. Полые валы изготовляют в основном для уменьшения массы, но из-за сложности технологии изготовления (особенно при длинных валах) применяют редко.

Элементы конструкции. *Цапфы* — участки вала или оси, лежащие в опорах (подшипниках). Концевые цапфы называют *шипами* (*1*, рис. 3.136), а промежуточные (расположенные в средней части

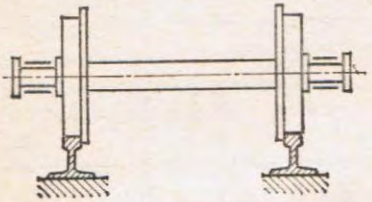


Рис. 3.135

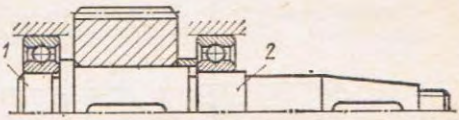


Рис. 3.136

вала) — *шейками* (*2*, рис. 3.136). Шипы и шейки в основном передают радиальную нагрузку. Цифру, передающую осевую нагрузку, называют *пятой*. Пяты (рис. 3.137) могут быть сплошными *(а)* и кольцевыми *(б)*.

Посадочные поверхности валов и осей под ступицы насаживаемых деталей и подшипники выполняют цилиндрическими, а концы валов — цилиндрическими или коническими. Последние облегчают установку и снятие деталей (муфт и др.) и повышают надежность соединения (можно создать любой натяг).

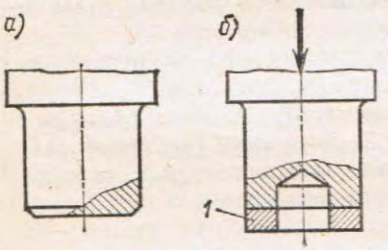


Рис. 3.137

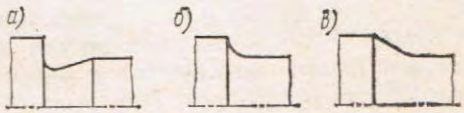


Рис. 3.138

Переходные участки (рис. 3.138) между двумя ступенями вала и оси делают для снижения концентрации напряжений, а следовательно, для повышения сопротивления усталости вала. Их выполняют: с канавкой со скруглением *(а)* для выхода шлифовального круга; с галтелью * постоянного радиуса *(б)*; с галтелью переменного радиуса *(в)* и т. п.

Торцы валов и осей для облегчения постановки на них деталей и в цепях безопасности делают с фасками.

Материалы. Материалы валов и осей должны быть прочными, хорошо обрабатываться и иметь высокий модуль упругости. Прямые валы и оси обычно изготовляют из углеродистых и легирован-

* Галтель — поверхность плавного перехода от одного диаметра вала к другому.

ных сталей, последние применяют для высоконагруженных валов. Валы из легированных сталей обычно подвергают термообработке. При изготовлении вала-шестерни (см. рис. 3.94) материал вала соответствует материалу шестерни. Заготовки валов и осей — это круглый прокат или специальные поковки. Механические характеристики некоторых марок сталей для изготовления валов и осей приведены в табл. 3.16.

Таблица 3.16

Марка стали	Твердость НВ, не менее	Механические характеристики, МПа				Коэффициенты	
		$\sigma_в$	$\sigma_т$	σ_{-1}	τ_{-1}	ψ_σ	ψ_τ
Ст5	190	520	280	220	130	0	0
Сталь 45	200	560	280	250	150	0	0
Сталь 40Х	200	730	500	320	200	0,1	0,05
Сталь 40ХН	240	820	650	360	210	0,1	0,05

Примечания: 1. Данные таблицы справедливы для любого диаметра заготовки. 2. Обозначения σ_{-1}, τ_{-1}, ψ_σ и ψ_τ — см. пояснение к формулам (2.116) и (2.117).

§ 3.59. РАСЧЕТ ВАЛОВ

Основными критериями работоспособности и расчета валов являются прочность, жесткость и виброустойчивость *.

Проектировочный расчет. Основной расчетной нагрузкой являются крутящий $M_к$ и изгибающий $M_и$ моменты **. Однако в начале расчета известен лишь момент $M_к$. Момент $M_и$ можно определить только после разработки конструкции (чертежа) вала. Поэтому *проектировочный расчет вала выполняют как условный расчет только на кручение в целях ориентировочного определения посадочных диаметров*. При этом обычно определяют диаметр выходного конца вала, который испытывает одно кручение. Исходя из условия прочности вала на кручение [см. формулу (2.45)], получим формулу *проектировочного расчета*:

$$d \geqslant \sqrt[3]{M_к/(0{,}2\,[\tau_к])}, \qquad (3.221)$$

где $M_к$ — крутящий момент в расчетном сечении вала, Н·м, равный вращающему моменту M, т. е. $M_к = M$; $[\tau_к] = 12...25$ МПа — условное допускаемое напряжение при кручении. Низкие значения $[\tau_к]$ компенсируют неучтенные напряжения изгиба, характер нагрузки и концентрацию напряжений.

Полученное значение d округляют до ближайшего большего стандартного размера из ряда (мм): 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 71; 80; 90; 100. По выбранному d с учетом удобства сборки

* Расчет на виброустойчивость здесь не рассматривается.

** Влияние сжимающих или растягивающих сил мало и, как правило, не учитывается.

и фиксации деталей на валу в осевом направлении назначают остальные посадочные диаметры вала. Диаметры вала под подшипники качения принимают с учетом размещения на них подшипников заданной долговечности и в соответствии со стандартными диаметрами их внутренних колец. Если выходной конец ведущего вала соединяется муфтой с валом электродвигателя диаметром $d_э$, то обычно принимают $d=(0{,}8...1{,}0)d_э$.

После определения посадочных диаметров вала, исходя из размеров насаживаемых на вал деталей и условий компоновки, устанавливают длину вала, места концентрации напряжений (шпоночные канавки, галтели и т. п.), назначают шероховатость поверхностей и выполняют проверочный расчет полученной конструкции вала.

Проверочный расчет. Валы при работе испытывают переменные напряжения, поэтому проверочный расчет их выполняют на усталость, а также на статическую прочность и жесткость.

Расчет на усталость сводится к проверке условия

$$s=s_\sigma s_\tau/\sqrt{s_\sigma^2+s_\tau^2}\geqslant[s], \qquad (3.222)$$

где s — расчетный (действительный) коэффициент запаса прочности в опасном сечении вала; $[s]\geqslant 1{,}5...2{,}5$ — допускаемый (требуемый) коэффициент запаса прочности для валов передач; s_σ и s_τ — коэффициенты запаса прочности соответственно по нормальным и касательным напряжениям. При расчете принимают, что нормальные напряжения изгиба изменяются по симметричному циклу, а касательные напряжения кручения — по отнулевому циклу. Коэффициенты s_σ и s_τ определяют по формулам (2.116) и (2.117). В этих формулах коэффициенты ψ_σ и ψ_τ чувствительности к асимметрии цикла напряжений очень малы или равны нулю (см. табл. 3.16), поэтому для практических расчетов можно применять формулы

$$s_\sigma=\sigma_{-1}/(K_{\sigma D}\sigma_a); \qquad (3.223)$$

$$s_\tau=\tau_{-1}/(K_{\tau D}\tau_a), \qquad (3.224)$$

где $K_{\sigma D}$ и $K_{\tau D}$ — коэффициенты снижения пределов выносливости, которые вычисляют по формуле (2.115). В зависимости от вида концентратора напряжений и шероховатости поверхности: $K_{\sigma D}=K_\sigma/K_d+K_F-1$; $K_{\tau D}=K_\tau/K_d+K_F-1$. Здесь K_σ и K_τ — эффективные коэффициенты концентрации напряжений. Значения K_σ и K_τ для валов со шпоночными пазами:

$\sigma_в$, МПа	600	700	800	900
K_σ	1,6	1,75	2,0	2,2
K_τ	1,4	1,5	1,7	2,1

K_d — коэффициент влияния абсолютных размеров поперечного сечения вала на предел выносливости:

Диаметр вала d, мм	20	30	40	50	70
Материал вала:					
углеродистая сталь	0,92	0,88	0,85	0,81	0,76
легированная сталь	0,83	0,77	0,73	0,70	0,65

K_F — коэффициент влияния шероховатости поверхности:

$\sigma_в$, МПа	500	700	900
12,5 / 6,3 / 3,2	1,2	1,25	1,35
1,6 / 0,8 / 0,4	1,05	1,1	1,15
0,2 / 0,1	1,0	1,0	1,0

Значения K_σ/K_d и K_τ/K_d для валов с напрессованными деталями даны в табл. 3.17.

Таблица 3.17

Номинальный диаметр вала d, мм	Условное обозначение поля допуска вала по СТ СЭВ 145—75	K_σ/K_d и K_τ/K_d при $\sigma_в$, МПа		
		600	800	1000
Свыше 30 до 50	$s6$	3,36/2,52	3,96/2,78	4,60/3,26
	$r6$	2,75/2,05	3,25/2,35	3,75/2,65
	$k6$	2,06/1,64	2,44/1,86	2,82/2,09
	$h6$	1,79/1,47	2,11/1,67	2,44/1,86
Свыше 50 до 100	$r6$	2,70/2,04	3,20/2,32	3,98/2,80
	$k6$	2,52/2,03	2,97/2,28	3,45/2,57
	$h6$	2,18/1,71	2,57/1,95	3,0/2,2

Примечания: 1. В числителе даны значения K_σ/K_d; в знаменателе — K_τ/K_d. 2. В местах посадки колец подшипников качения значения K_σ/K_d и K_τ/K_d выбирают по строке, соответствующей прессовой посадке (например, $H7/s6$).

Для повышения сопротивления усталости валов необходимо уменьшать концентрацию напряжений, создавать оптимальную шероховатость поверхности и применять поверхностное упрочнение: цементацию, азотирование, закалку ТВЧ, дробеструйный наклеп и т. п.

Расчет на статическую прочность ведется для предупреждения пластических деформаций при кратковременных перегрузках (например, в период пуска) по известной зависимости, вытекающей из третьей теории прочности:

$$\sigma_э = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_к^2} \leqslant [\sigma], \qquad (3.225)$$

где $\sigma = M_и/W_{ос\ нетто} + N/A$ и $\tau_к = M_к/W_{р\ нетто}$; $M_и$ и $M_к$ — изгибающий и крутящий моменты в опасном сечении при перегрузке; N — нормальная сила; $[\sigma] = 0{,}8\sigma_т$ — допускаемое напряжение.

Расчет на жесткость производят, если упругие перемещения вала влияют на работоспособность связанных с ним деталей (напри-

мер, длинные валы, ходовые винты и шпиндели станков, валы коробок передач и др.).

Для обеспечения требуемой жесткости вала выполняют его расчет на изгибную или крутильную жесткость. Требуемая изгибная жесткость валов определяется условиями правильной работы зубчатых передач и подшипников. Под действием нагрузок возникают прогибы валов и повороты их сечений под зубчатыми колесами и в подшипниках (рис. 3.139). Прогиб вала f_2 и его поворот θ_2 под зубчатым колесом приводит к увеличению межосевого расстояния передачи, вызывает перекос колеса, повышенную концентрацию нагрузки по ширине зубчатого венца и, как следствие, усиленный износ и даже излом зубьев. Поворот вала (угол наклона цапф θ) в подшипниках вызывает неравномерное распределение нагрузки по их ширине и особенно по длине роликов, что может вызвать защемление тел качения и кромочное разрушение роликов.

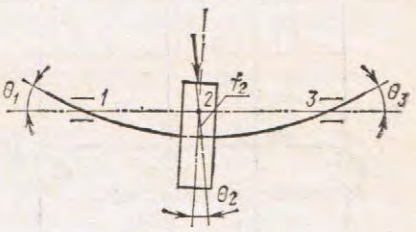


Рис. 3.139

Изгибная жесткость оценивается значениями f_2 и θ, которые определяют методами сопротивления материалов (см. § 2.27). Условия обеспечения требуемой изгибной жесткости вала: $f_2 \leqslant [f_2]$ и $\theta \leqslant [\theta]$. Значения допускаемых прогибов $[f_2]$ и углов наклона $[\theta]$ зависят от назначения вала. Для валов передач под зубчатым колесом принимают: $[f_2]=(0{,}01...0{,}03)\,m$, где m — модуль, мм; $[\theta]=0{,}001$ рад. Допускаемый угол наклона цапф $[\theta]=0{,}005$ рад в шарикоподшипниках; $[\theta]=0{,}0016$ рад в роликоподшипниках. Обычно валы редуктора на жесткость не проверяют, так как расстояние между опорами сравнительно невелико. Исключение представляет червячный вал, проверка которого на жесткость обязательна (см. [30]).

Расчет на крутильную жесткость валов выполняют по формулам сопротивления материалов.

Последовательность расчета вала на усталость. *Исходные данные*: конструкция (чертеж) вала (рис. 3.140, *а*), значение и направление нагрузок, материал вала.

1. Составляют расчетную схему вала (рис. 3.140, *б*). Подшипники вала, одновременно воспринимающие осевые и радиальные нагрузки, заменяют шарнирно-неподвижными опорами, а подшипники, воспринимающие только радиальные нагрузки,— шарнирно-подвижными.

2. Определяют реакции опор методом статики. Точки приложения реакций по длине вала выбирают в середине радиальных подшипников качения, а при применении радиально-упорных подшипников — см. § 3.70. Силы F_t, F_r, F_a и $F_в$ рассматривают как сосредоточенные и действующие в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Одну из них для удобства называют горизонтальной (плоскость xz), другую — вертикальной (плоскость xy). На рис. 3.140, *в* силы

F_t и $F_в$ приведены к оси вала и изображены в горизонтальной плоскости, а на рис. 3.140, *д* — силы F_r и F_a изображены в вертикальной плоскости.

Если направление силы от цепной (ременной) передачи $F_в$ не задано или задано углом $\Theta \leqslant 30°$ к горизонту, то ее следует направлять так, чтобы она увеличивала деформации и напряжения от окружной силы F_t, действующей в зубчатой передаче (рис. 3.140, *а*, *б*). При $\Theta > 30°$ силу $F_в$ раскладывают на составляющие в вертикальной и горизонтальной плоскостях: $F_{Dy} = F_в \times \sin\Theta$ и $F_{Dz} = F_в \cos\Theta$.

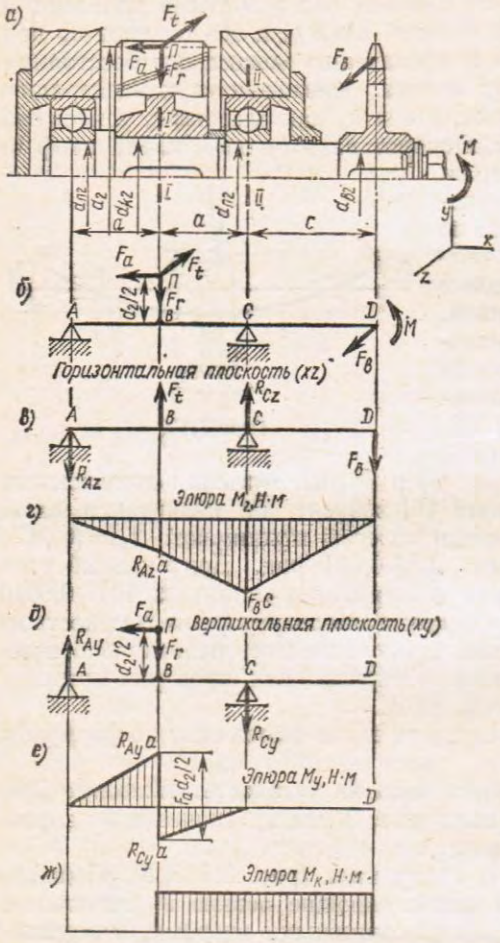


Рис. 3.140

3. Строят эпюры моментов. Изгибающие моменты $M_и$ вычисляют раздельно для каждой плоскости методами сопротивления материалов и эпюры их строят под соответствующими схемами нагрузки вала (рис. 3.140, *г*, *е*). Затем строят эпюру крутящих моментов $M_к$ (рис. 3.140, *ж*). Крутящий момент $M_к$ равен вращающему моменту M.

4. В соответствии с характером эпюр $M_и$ и $M_к$ и расположением мест концентрации напряжений устанавливают предположительно опасные сечения вала, которые и проверяют на усталость. В рассматриваемой конструкции вала опасные сечения *I—I* и *II—II*.

5. В сечении *I—I* суммарный изгибающий момент

$$M_{и\,I-I} = \sqrt{(R_{Az}a)^2 + (R_{Ay}a)^2}.$$

Осевой момент сопротивления изгибу сечения «нетто»

$$W_{oc} \approx 0{,}1d_{к2}^3 - bt_1(d_{к2} - t_1)^2/(2d_{к2}),$$

где b и t_1 — ширина и глубина шпоночного паза вала (см. рис. 3.44). Амплитуда нормальных напряжений цикла $\sigma_a = M_{и\,I-I}/W_{oc}$. Полярный момент сопротивления кручения сечения «нетто»

$$W_p \approx 0{,}2d_{к2}^3 - bt_1(d_{к2} - t_1)^2/(2d_{к2}).$$

Амплитуда касательных напряжений цикла $\tau_a = \tau_{max}/2 = M_к/(2W_p)$.

Концентрация напряжений обусловлена наличием шпоночного паза и прессовой посадкой зубчатого колеса. При двух (и более) концентраторах напряжений учитывают один из них — тот, для которого больше отношение K_σ/K_d и K_τ/K_d.

Коэффициенты запаса s_σ и s_τ прочности определяют по формулам (3.223) и (3.224). Расчетный коэффициент запаса прочности s в сечении $I—I$ определяют по формуле (3.222). Если по расчету получилось $s<[s]$, то следует изменить материал вала или произвести поверхностное упрочнение посадочных диаметров. Увеличение диаметра вала нежелательно, так как возрастает масса конструкции.

Методика определения коэффициента s в сечении $II—II$ аналогична вышеизложенной. Различие в следующем: $M_{и\,II-II}=F_в c$, $W_{ос}\approx 0{,}1 d_{п2}^3$; $W_р=2W_{ос}$; концентрация напряжений обусловлена только посадкой подшипника с натягом. Коэффициент концентрации принимают по табл. 3.17.

При неизвестном конкретном назначении редуктора, например, нет цепной передачи (см. рис. 3.140, *а*), к его ведомому валу прикладывают радиальную консольную нагрузку $F_к$, которую для одноступенчатых зубчатых редукторов согласно ГОСТ 16162—78 определяют по зависимости $F_к=125\sqrt{M_2}$, где $F_к$—Н; M_2—Н·м. Расстояние от точки приложения силы $F_к$ до ближайшей опоры $c\approx 0{,}7\ d_{в2}+50$ мм. Ведущий вал редуктора соединяется с валом электродвигателя муфтой. Вследствие неизбежной несоосности валов возникает радиальная сила $F_м$ от муфты, которая дополнительно нагружает вал. Силу $F_м$ от втулочно-пальцевой муфты определяют по зависимости $F_м\approx 23\sqrt[3]{M_1^2}$, где $F_м$—Н; M_1—Н·м. Другие муфты с неметаллическими упругими элементами (обычно используемые для ведущего вала редуктора) оказывают при несоосности валов меньшее силовое воздействие. Расстояние от точки приложения силы до ближайшей опоры определяют по размерам выбранной муфты.

Направление сил $F_к$ и $F_м$ может быть любым, поэтому реакции опор определяют отдельно от сил F_t, F_r и F_a в зацеплении для каждого вала и дополнительно от силы $F_к$ для ведомого вала и силы $F_м$ для ведущего вала. Затем строят эпюры изгибающих моментов от сил в зацеплении в двух плоскостях: вертикальной — M_y и горизонтальной — M_z, а также эпюру изгибающего момента $M_{Fк}$ от силы $F_к$, эпюру изгибающего момента $M_м$ от силы $F_м$ и эпюру крутящих моментов $M_к$.

Устанавливают опасные сечения, для каждого из которых определяют суммарный изгибающий момент: $M_и=\sqrt{M_z^2+M_y^2}+M_{Fк}$ для ведомого вала и $M_и=\sqrt{M_z^2+M_y^2}+M_м$ для ведущего вала.

Дальнейший порядок расчета валов на усталость аналогичен вышеизложенному.

§ 3.60. РАСЧЕТ ОСЕЙ

Ось рассматривают как двухопорную балку, свободно лежащую на двух опорах и нагруженную сосредоточенными силами, вызывающими изгиб. По конструкции оси (см. рис. 3.134) составляют расчетную схему (см. рис. 3.134, *б*). Определяют реакции опор и методом сечений строят эпюру изгибающего момента. Устанавливают опасное сечение, для которого определяют диаметр оси из условия ее прочности на изгиб $W_{ос} \approx 0{,}1d^3 \geqslant M_и/[\sigma_и]$, откуда

$$d \geqslant \sqrt[3]{M_и/(0{,}1\,[\sigma_и])}, \qquad (3.226)$$

где $M_и = F\,a/2$ — максимальный изгибающий момент; $[\sigma_и]$ — допускаемое напряжение изгиба. В неподвижных осях при действии постоянной нагрузки напряжения изгиба постоянны. В этом случае для осей, изготовленных из среднеуглеродистых сталей, принимают $[\sigma_и] \approx 140$ МПа. Во вращающихся осях напряжения изгиба изменяются по симметричному циклу, для них принимают $[\sigma_и] = \sigma_{-1}/[s]$, где σ_{-1} (см. табл. 3.16); $[s] \approx 1{,}7$.

Расчет осей на усталость и изгибную жесткость является частным случаем расчета валов при крутящем моменте $M_к = 0$.

Глава 13
ПОДШИПНИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ

§ 3.61. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Подшипники являются опорами валов и вращающихся осей. Они воспринимают нагрузки, приложенные к валу (оси), и передают их на корпус машины. От качества подшипников в значительной степени зависит надежность машин. По виду трения они делятся на *подшипники скольжения и подшипники качения*.

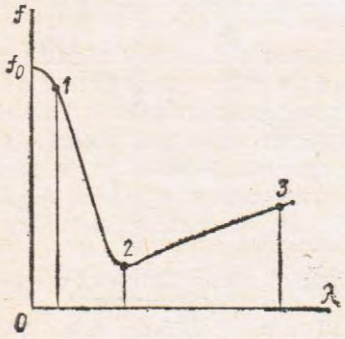


Рис. 3.141

В подшипниках скольжения поверхность цапфы вала (оси) скользит по поверхности подшипника. При этом возникает трение скольжения, которое приводит к повышенному износу и нагреву. Для уменьшения трения между поверхностями скольжения вводят смазку.

Трение в подшипниках скольжения. Потери на трение оцениваются коэффициентом трения f. На рис. 3.141 показана диаграмма изменения f в зависимости от характеристики режима работы подшипника $\lambda = \mu\omega/p$, где μ — динамическая вязкость смазки; ω — угловая скорость вала; p — среднее давление на опорную поверхность. Диаграмма имеет три характерных участка. Участок f_0 — *1* характеризуется примерно пос-

тоянным коэффициентом трения, при этом поверхности трения касаются одна другой. На этом участке угловая скорость ω очень мала и смазка отсутствует. При таких условиях работы подшипника трение называют *трением без смазки*; при очень тонком (до 0,1 мкм) масляном слое возникает *граничная смазка*.

Участок *1—2* характеризуется быстрым уменьшением коэффициента f вследствие увеличения скорости ω; граничная смазка переходит в полужидкостную, при которой выступы неровностей покрыты смазкой, но еще не перекрыты с избытком. Участок *2—3* — это участок *жидкостной смазки*, при которой поверхности цапфы вала и подшипника полностью отделены одна от другой устойчивым масляным слоем и сопротивление вращению определяется только внутренними силами вязкой жидкости (см. § 3.65). В точке *2* коэффициент f и тепловыделение наименьшие, но нет запаса толщины слоя, поэтому оптимальные условия работы подшипника будут в зоне справа от точки *2*.

Достоинства: сохраняют работоспособность при очень высоких угловых скоростях валов; смягчают толчки, удары и вибрации вследствие демпфирующего действия масляного слоя; обеспечивают установку валов с высокой точностью; дают возможность изготовлять разъемные конструкции; имеют минимальные радиальные размеры; допускают работу с загрязненной смазкой; обеспечивают бесшумность работы. *Недостатки*: сравнительно большие потери на трение и особенно при пуске; необходимость постоянного ухода вследствие высоких требований к смазке и опасности перегрева; большой расход смазки.

Применяют в высокоскоростных машинах (центрифуги, шлифовальные станки и др.), когда долговечность подшипников качения резко сокращается; для валов, например коленчатых, когда по условиям сборки требуются разъемные подшипники; при работе в химических агрессивных средах и воде, в которых подшипники качения неработоспособны; для валов, воспринимающих ударные и вибрационные нагрузки; при близко расположенных валах, когда требуются малые радиальные размеры подшипников; в тихоходных малоответственных механизмах и машинах.

§ 3.62. КОНСТРУКЦИИ, МАТЕРИАЛ И СМАЗКА

Конструкции подшипников. *Неразъемные подшипники* (ГОСТ 11521—65) наиболее просты по конструкции; их отливают из серого чугуна. Растачивают обычно для работы непосредственно с валом (без вкладыша), но могут быть расточены и на большой диаметр для установки вкладыша — втулки *1* (рис. 3.142). Применяют для опор тихоходных валов с небольшой нагрузкой (сельскохозяйственные машины, транспортеры и др.). *Разъемные подшипники* * (рис. 3.143) имеют вкладыш из двух частей *3* и *2* (втулка, разрезанная по обра-

* Подшипники разъемные общего назначения стандартизованы (ГОСТ 11607—65...11610—65).

зующим), которые устанавливают в корпус *1* и крышку *4*. Широко применяют для опор валов механических передач — ременных, цепных, фрикционных, открытых зубчатых, а также для лебедок, транспортеров и др. *Встроенные подшипники* (рис. 3.144) устанавливают непосредственно в корпусе машин. Такое устройство характерно для подшипников некоторых редукторов, металлорежущих

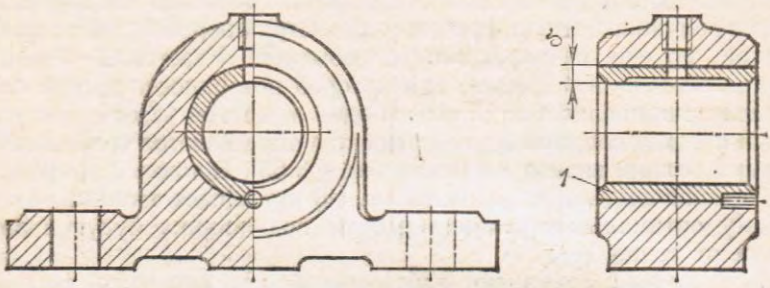


Рис. 3.142

станков, электрических машин и др. *Самоустанавливающиеся подшипники* (рис. 3.145) имеют вкладыш со сферической опорной поверхностью, что позволяет им поворачиваться (самоустанавливаться) для устранения влияния перекосов цапф вала. Применяют при невозможности точной установки валов, например при монтаже на разных основаниях и при больших упругих деформациях валов.

Рассмотренные конструкции относятся к *радиальным* подшип-

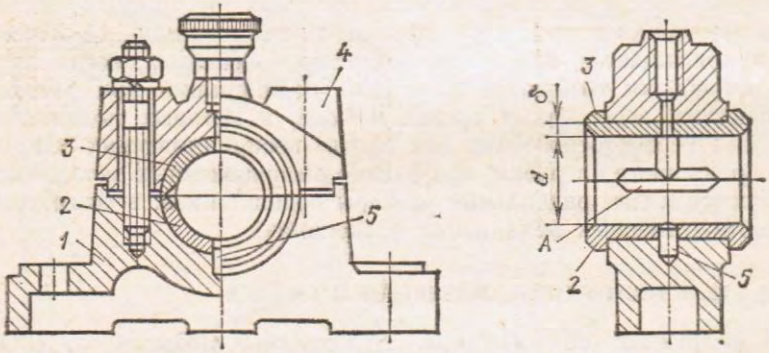


Рис. 3.143

никам, воспринимающим в основном радиальные нагрузки. Для восприятия осевой нагрузки применяют *упорный* подшипник — *подпятник 1* (см. рис. 3.137, *б*).

Вкладыши — основные детали подшипников. Наиболее просты по конструкции неразъемные вкладыши *1* (ГОСТ 1978—73) (см. рис. 3.142) — втулки, изготовленные из антифрикционного чугуна или бронзы. Толщина стенки вкладыша $\delta = 3. . .5$ мм. Разъемные вкладыши (см. рис. 3.143) изготовляют обычно из двух частей со

стыком в плоскости разъема подшипника. Толщина стенки вкладыша из бронзы или чугуна без заливки $\delta=0{,}03\,d+2\ldots5$ мм. Для повышения прочности подшипников, в особенности при переменных и ударных нагрузках, а также для уменьшения потерь на трение применяют *биметаллические* вкладыши (рис. 3.146), в которых на стальную или чугунную основу нанесен (залит) тонкий слой антифрик-

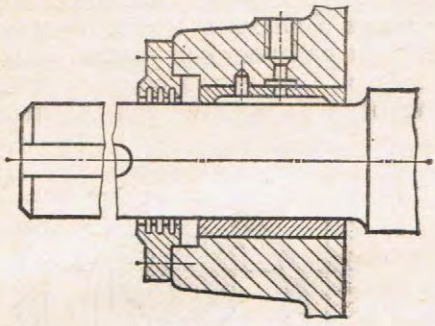


Рис. 3.144

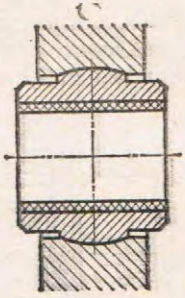


Рис. 3.145

ционного материала — баббита, бронзы и др. Толщина слоя баббита должна быть возможно меньшей — $\delta_c\approx0{,}1\ldots0{,}5$ мм, с увеличением δ_c сопротивление усталости слоя баббита уменьшается. Для распределения смазки по длине вкладыша на его внутренней поверхности делают канавки *А* (карманы, см. рис. 3.143). Их распо-

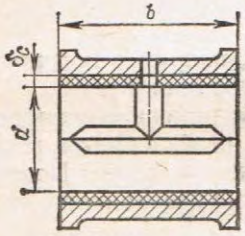


Рис. 3.146

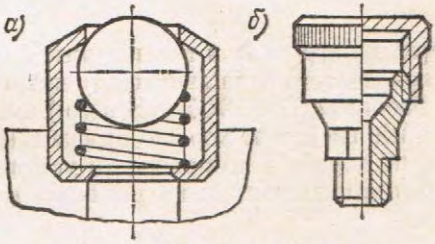


Рис. 3.147

лагают в месте подвода смазки (в зоне наименьшего давления). Чтобы ограничить поток масла в направлении к торцам вкладыша, канавки не доводят до торцов. В массовом производстве вкладыши штампуют из стальной ленты, на которую наносят антифрикционный слой. Их выполняют без буртиков, с одним и двумя буртиками. Буртики воспринимают осевую нагрузку. Вкладыши устанавливают в корпус с натягом и предохраняют от проворачивания штифтом *5* (см. рис. 3.143).

Материал вкладышей. Для изготовления вкладышей применяют следующие материалы, обладающие высокими антифрикционными свойствами, теплопроводностью, износостойкостью, достаточной

сопротивляемостью заеданию и хрупкому разрушению при действии ударных нагрузок.

Антифрикционные чугуны (АЧС-2, АЧВ-1 и др.) применяют для вкладышей подшипников тихоходных малонагруженных валов, работающих с перерывами.

Бронзы оловянные (БрОФ6, 5-0,15 и др.), алюминиево-железные (БрАЖ9-4 и др.), свинцовые (БрС30) и прочие, обладающие хорошими антифрикционными свойствами. Вкладыши из них имеют высокие прочность и жесткость, хорошо работают при ударах, но сравнительно медленно прирабатываются. Свинцовую бронзу применяют для покрытия рабочих поверхностей вкладышей при значительных

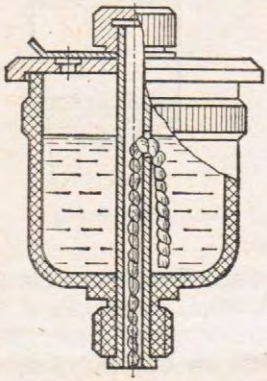


Рис. 3.148

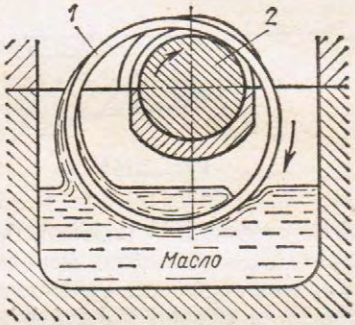


Рис. 3.149

ударных нагрузках и повышенных скоростях, например подшипники коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания и т. п.

Баббиты (Б16, БС6, БН и др.) имеют весьма высокие антифрикционные свойства, хорошо прирабатываются, стойки против заедания, но дороги и по прочности уступают чугуну и бронзе. Поэтому баббит применяют только для покрытия рабочих поверхностей вкладышей.

Металлокерамические материалы применяют для вкладышей тихоходных машин. Такие вкладыши обладают высокой пористостью и, пропитанные маслографитной эмульсией, могут работать длительное время без подвода к ним смазки.

Пластмассы антегмигт АТМ-2, фторопласт, текстолит, капрон, нейлон, ДСП и другие отличаются высокой износостойкостью, имеют очень низкий коэффициент трения в паре со стальной цапфой. Вкладыши из пластмасс хорошо прирабатываются, устойчивы против заедания, надежны при ударных нагрузках, могут работать при водяной смазке. Применяют в подшипниках прокатных станов и машин, работающих в пыльной среде, и т. п.

Смазочные материалы. Основными смазочными материалами подшипников являются жидкие масла. Преимущественное применение имеют *нефтяные масла*, а в особых условиях — *растительные* (льня-

ное, касторовое и др.), *животные* (костное и др.) и *синтетические масла*. Для смазки подшипников, требующих надежной герметизации (например, в ткацких станках и т. п.) или работающих в широком диапазоне температур и режимов эксплуатации, применяют пластичный смазочный материал — *конталин*, *солидол* и др.

Виды смазывания весьма разнообразны. *Периодическое смазывание*, при котором жидкая смазка подается к поверхностям трения через пресс-масленку (рис. 3.147, *а*) под давлением с помощью шприца, а пластичная смазка — колпачковой масленкой (рис. 3.147, *б*), заполненной смазкой, которая выдавливается подвертыванием колпачка. *Фитильное смазывание* (рис. 3.148), при котором жидкая смазка подается к поверхностям трения фитилем. *Смазывание кольцом* (рис. 3.149), при котором смазка подается к поверхностям трения кольцом *1*, увлекаемым во вращение цапфой *2*.

Кроме указанных имеется много других видов смазывания, в том числе *циркуляционное смазывание* под давлением от насосов, *смазывание погружением* поверхности трения в масляную ванную, *смазывание масляным туманом*, *разбрызгиванием* и др.

§ 3.63. ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ И КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

Износ вкладышей происходит вследствие попадания со смазкой на трущиеся поверхности абразивных частиц и неизбежного трения без смазки и граничной смазке при пуске и остановке. Если износ превышает норму, вкладыш заменяют.

Заедание происходит при перегреве подшипника. Вследствие трения нагреваются цапфа, вкладыш и масло. С повышением температуры понижается смазочная способность масла *, которая связана с прочностью тонкой масляной пленки на поверхностях трения. При повышении температуры в рабочей зоне подшипника до некоторого критического значения эта пленка разрушается. Возникает трение без смазки (металлический контакт), что влечет за собой дальнейшее повышение температуры и заедание (схватывание) поверхностей трения. Заедание приводит к выплавлению подшипника. Подшипник выходит из строя. Так как износ и заедание являются причинами выхода из строя подшипников, то *основными критериями работоспособности и расчета подшипников скольжения являются износостойкость и теплостойкость*.

§ 3.64. РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ

Расчет на износостойкость и теплостойкость выполняют как *проверочный*, когда известны диаметр d цапфы (рис. 3.150), который определяют при проектировочном расчете вала, и ширина вкладыша b, которую назначают по рекомендации: $b \approx (0{,}6 \ldots 1{,}2)\, d$. При не-

* Смазочная способность характеризует свойство масла уменьшать трение и износ при работе в условиях граничной и полужидкостной смазки.

достаточной смазке и малой угловой скорости вала подшипники скольжения работают при граничной смазке и без смазки (участок f_0 — *1*, см. рис. 3.141). В этих режимах расчет подшипников выполняют условно по двум показателям: средними давлению p между цапфой и вкладышем и произведению pv. Расчет по p гарантирует невыдавливание смазки и представляет собой расчет на износостойкость. Расчет по pv гарантирует нормальный тепловой режим, т. е. отсутствие заедания, и представляет собой расчет на теплостойкость. Для ограничения износа и нагрева необходимо выполнение условий

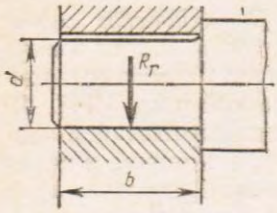


Рис. 3.150

$$p = R_r/(db) \leqslant [p]; \qquad (3.227)$$

$$pv \leqslant [pv], \qquad (3.228)$$

где R_r — радиальная нагрузка на подшипник, Н; v — окружная скорость цапфы, м/с. Опытным путем установлены следующие допускаемые значения $[p]$ и $[pv]$:

Материал вкладыша	$[p]$, МПа	$[pv]$, МПа·м/с
Чугун АЧС-2, АЧС-3	6	4,5
Чугун АЧВ-1, АЧВ-2	12	12
Бронза БрОФ6, 5-0,15	15	15
Бронза БрАЖ9-4	20	12

Если при расчете условия (3.227) и (3.228) не выполняются, то надо изменить материал или ширину вкладыша и повторить расчет.

§ 3.65. ПОНЯТИЕ О РАБОТЕ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЖИДКОСТНОЙ СМАЗКИ

Как указывалось выше, при жидкостной смазке поверхности цапфы и подшипника разделены устойчивым масляным слоем. Поэтому цапфа и вкладыш практически не изнашиваются. Это самый благоприятный режим работы подшипников скольжения. Для создания жидкостной смазки необходимо, чтобы в масляном слое возникало избыточное давление или от вращения вала (гидродинамическое), или от насоса (гидростатическое). Чаще применяют подшипники с гидродинамической смазкой (рис. 3.151), сущность которой в следующем. Вал при своем вращении увлекает масло в клиновый зазор *3* между цапфой *2* и вкладышем *1* и создает избыточное гидродинамическое давление (см. эпюру давлений в масляном слое), обеспечивающее всплытие цапфы.

Жидкостная смазка возникает лишь в определенных конструкциях подшипников скольжения при соблюдении следующих условий: зазор между поверхностями трения должен быть клиновой формы; масло соответствующей вязкости должно непрерывно заполнять зазор; скорость относительного движения поверхностей трения должна быть достаточной для создания давления, способного урав-

новесить внешнюю нагрузку; смазка должна полностью разделять поверхности трения.

Расчет подшипников при жидкостной смазке выполняют на основе гидродинамической теории смазки *. Эта теория показывает, что гидродинамическое давление может развиваться только в клиновом зазоре. Толщина h масляного слоя (рис. 3.152, разделяющий цапфу *2* и вкладыш *1* слой масла показан толстой черной линией) зависит от угловой скорости и вязкости масла. Чем больше значения этих величин, тем больше h. С увеличением радиальной нагрузки

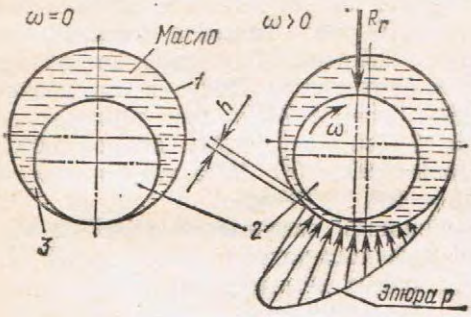


Рис. 3.151

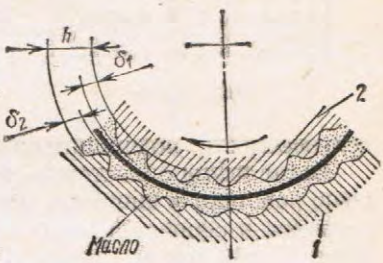


Рис. 3.152

на цапфу *2* значение h уменьшается. Минимальная толщина, необходимая для получения жидкостного трения,

$$h_{\min} = K_h (\delta_1 + \delta_2), \qquad (3.229)$$

где $K_h = 1{,}5 \ldots 6$ — коэффициент, учитывающий угловую скорость ω вала и характер нагрузки: меньшие значения при малых ω, большие — при динамических нагрузках; δ_1 и δ_2 — высоты неровностей профилей.

§ 3.66. ПОДШИПНИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ БЕЗ СМАЗКИ

Подшипники, смазка которых не может быть гарантирована или недопустима по техническим условиям (например, высокие и низкие температуры; некоторые агрессивные среды; машины, где смазка может вызвать порчу продукции, и т. п.), выполняют из материалов на основе фторопласта-4. Фторопласт-4, как материал для подшипников, обладает уникальным комплексом свойств: низкий коэффициент трения ($f \approx 0{,}5 \ldots 0{,}1$); широкий диапазон рабочих температур; малая набухаемость, высокая химическая стойкость и др. Однако широкому его применению для изготовления подшипников препятствовали низкие нагрузочная способность и теплопроводность. Для повышения нагрузочной способности и теплопроводности создан новый антифрикционный материал — *металлофторопласт* (рис. 3.153), состоящий из стальной основы *1* и тонкого слоя (0,3. . .0,4 мм) *2* сферических частиц бронзы, поры между которыми

* Основоположник этой теории проф. Н. П. Петров. Подробно см. [23].

заполняют фторопластом *3* с наполнителем (дисульфид молибдена и др.). Этот материал удачно сочетает в себе высокую прочность, теплопроводность стали и бронзы, стабильность размеров и антифрикционные свойства фторопласта-4.

Вкладыши — свертные втулки — штампуют из металлофторопластовой ленты, которую выпускают толщиной 1,1; 1,2; 2,3 мм и шириной 75. . .100 мм. Длина поставляемых полос 500. . .2000 мм. Размеры выпускаемых втулок: внутренний диаметр $d=10. . .55$ мм; ширина $b=10. . .70$ мм; толщина стенки $\delta=1{,}5. . .2{,}5$ мм. Втулки изготовляют без буртиков *. Допускаемые значения: $[p]=1{,}4$ МПа при температуре $t\leqslant 40°C$ и $[p]=0{,}14$ МПа при $t=200°C$; $[pv]=0{,}9. . .0{,}7$ МПа·м/с, при этом долговечность подшипников $L_h=10^3. . .10^4$ ч.

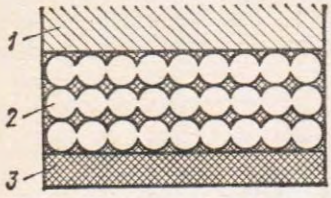


Рис. 3.153

Металлофторопластовые подшипники скольжения (МФПС) хорошо работают в широком диапазоне температур (—200. . .+300°С), нагрузок и скоростей, не боятся многих химически активных сред, имеют малые массу и объем. Основное их достоинство — *не нуждаются в смазке*. Указанные достоинства МФПС позволили в ряде отраслей промышленности заменить ими не только подшипники скольжения из традиционных материалов, но и подшипники качения.

МФПС применяют в ответственных узлах самолетов и вертолетов, что существенно повышает надежность и безопасность авиационной техники; в машинах для легкой и пищевой промышленности, что повышает качество выпускаемой продукции (устраняется опасность загрязнения тканей, пряжи и пищевых продуктов смазкой); станкостроении и др. Обширны возможности внедрения МФПС в автомобилестроении, тракторостроении, на железнодорожном транспорте и практически в любой отрасли машиностроения. В некоторых случаях применение МФПС оказалось единственно возможным техническим решением.

Глава 14
ПОДШИПНИКИ КАЧЕНИЯ

§ 3.67. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Подшипник качения (рис. 3.154) — это сборочная единица, которая состоит из наружного *1* и внутреннего *3* колец с дорожками качения *А*, тел качения *2* (шариков или роликов) и сепаратора *4*, разделяющего и направляющего тела качения. Внутреннее кольцо устанавливают на валу (оси), а наружное — в корпусе. Таким

* Металлофторопластовые подшипники скольжения не могут воспринимать осевые нагрузки.

образом, цапфа вала и корпус разобщены телами качения. Это позволило заменить трение скольжения трением качения и существенно снизить коэффициент трения. Основные стандартные размеры подшипника: d и D — внутренний и наружный диаметры; B — ширина колец.

Достоинства: малые потери на трение, высокий к. п. д. (до 0,995) и незначительный нагрев; высокие надежность и нагрузочная способность; малые габаритные размеры в осевом направлении; невысокая стоимость вследствие массового производства; высокая степень взаимозаменяемости, что облегчает монтаж и ремонт машин; простота в эксплуатации и малый расход смазки. *Недостатки*: пониженная долговечность при ударных нагрузках; большое рассеивание долговечности из-за неодинаковых зазоров в собранном подшипнике, неоднородности материала и термической обработки деталей; относительно большие радиальные размеры; шум при работе.

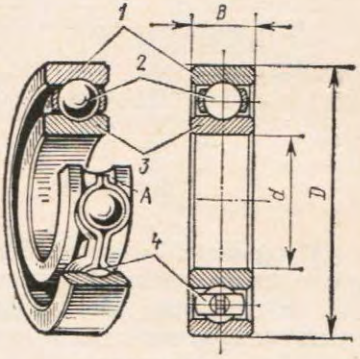


Рис. 3.154

Применяют во всех отраслях машиностроения и приборостроения. Это самые массовые стандартизованные изделия. Их изготовляют на специализированных подшипниковых заводах с наружным диаметром 1,0. . .2600 мм и массой 0,5 г. . .3500 кг.

Классификация. По направлению действия воспринимаемой нагрузки подшипники качения делятся на *радиальные*, *упорные*, *радиально-упорные и упорно-радиальные*.

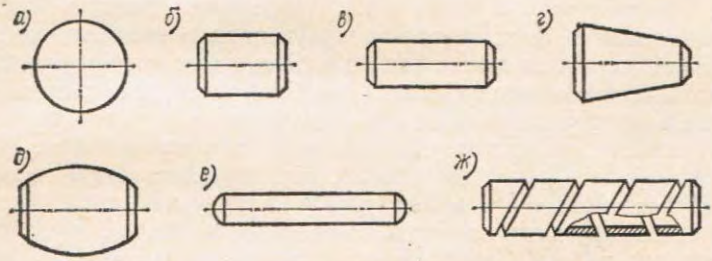


Рис. 3.155

По форме тел качения (рис. 3.155) — на *шариковые (а)* и *роликовые*, причем последние могут быть с роликами: цилиндрическими короткими *(б)* или длинными *(в)*, коническими *(г)*, бочкообразными *(д)*, игольчатыми *(е)* и витыми *(ж)*.

По числу рядов тел качения — на *одно-*, *двух-*, *четырех-* и *многорядные*.

По основным конструктивным признакам — на *самоустанавливающиеся* (сферические) и *несамоустанавливающиеся*.

В зависимости от нагрузочной способности и габаритных размеров при одном и том же внутреннем диаметре подшипники разделяют на серии: по радиальным размерам — *сверхлегкие*, *особо легкие*, *легкие*, *средние* и *тяжелые* серии; по ширине — *узкие*, *нормальные*, *широкие* и *особо широкие* серии. Примерное соотношение между габаритами различных серий показано на рис. 3.156. Преимущественное распространение имеют подшипники легкой и средней серии нормальной ширины, как наиболее дешевые.

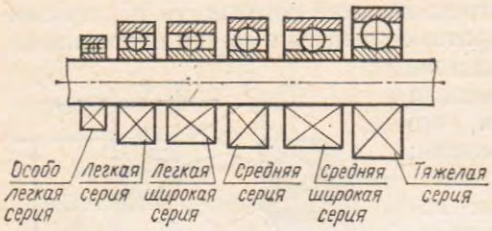


Рис. 3.156

Материалы. Тела качения и кольца изготовляют из высокоуглеродистых хромистых подшипниковых сталей ШХ15, ШХ15СГ и других с термообработкой до твердости HRC60. . .65 и последующими шлифованием и полированием. Сепараторы чаще всего штампуют из низкоуглеродистой листовой стали. Для быстроходных подшипников изготовляют массивные сепараторы из бронзы, латуни, текстолита, капрона и т. п.

§ 3.68. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Шариковые радиальные подшипники (см. рис. 3.154) — наиболее простые и дешевые подшипники, предназначенные для восприятия радиальной нагрузки, но, имея желобчатые дорожки качения, могут воспринимать и осевую нагрузку. Они обладают большой быстроходностью, фиксируют вал в двух направлениях и допускают небольшие перекосы колец (до 15′). Это самые распространенные подшипники в машиностроении. Их собирают путем эксцентричного смещения внутреннего кольца в наружном.

Шариковые радиальные сферические подшипники (рис. 3.157) предназначены в основном для восприятия радиальной нагрузки, но могут воспринимать и небольшую осевую нагрузку. Дорожка качения на наружном кольце выполнена по сфере, что обеспечивает нормальную работу (самоустановку) подшипника даже при значительном (до 2. . .3°) перекосе колец. Применяют для валов, подверженных значительным прогибам; при установке подшипников в разных корпусах и т. п.

Роликовые радиальные подшипники с короткими цилиндрическими роликами (рис. 3.158) способны воспринимать значительные радиальные нагрузки. Требуют точной соосности посадочных мест, в противном случае ролики работают кромками и подшипники быстро разрушаются. Применяют для коротких жестких валов, а также в качестве «плавающих» опор (см. § 3.74).

Роликовые радиальные подшипники с игольчатыми роликами (рис. 3.159) обладают высокой радиальной грузоподъемностью при небольших радиальных габаритах. Осевую нагрузку не воспринимают. Весьма чувствительны к прогибам и несоосности посадочных мест. Применяют в опорах, требующих компактности в радиальном направлении.

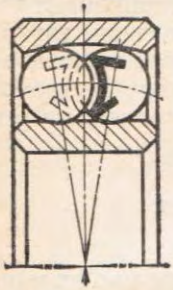


Рис. 3.157

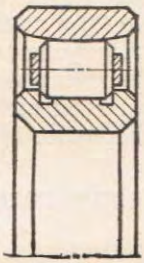


Рис. 3.158

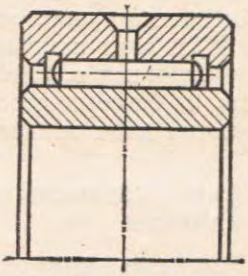


Рис. 3.159

Шариковые радиально-упорные подшипники (рис. 3.160) способны воспринимать комбинированные радиально-осевые нагрузки. Осевая грузоподъемность их зависит от угла контакта α. Стандартные подшипники имеют угол $\alpha=12$, 26 и 36°. С увеличением угла α осевая грузоподъемность возрастает за счет уменьшения радиальной. Подшипники воспринимают осевую нагрузку только в одном направлении. Для восприятия осевых нагрузок в обоих направлениях

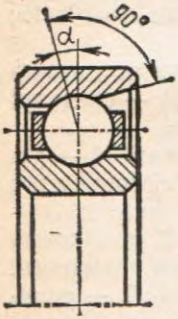


Рис. 3.160

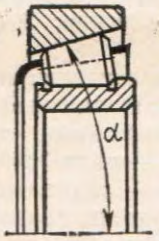


Рис. 3.161

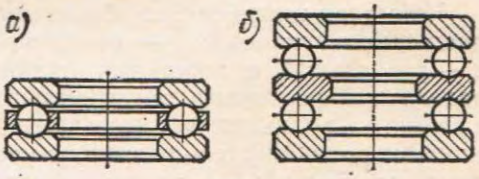


Рис. 3.162

их устанавливают парно. Применяют для жестких быстроходных валов.

Роликовые конические подшипники (рис. 3.161) предназначены для восприятия одновременно действующих радиальных и осевых нагрузок. Для восприятия двусторонних осевых нагрузок подшипники применяют в паре. Конструкция их разъемная. Чувствительны к перекосам колец, поэтому требуют точного монтажа и жестких валов. При монтаже и в процессе эксплуатации необходима тща-

тельная регулировка осевых зазоров. Если зазор больше допускаемого, то ролик перекашивается. При этом нарушается его линейный контакт с кольцами; возникает точечный контакт, что вызывает разрушение роликов. При малом зазоре подшипник перегревается, что приводит к защемлению тел качения и выходу его из строя. Применяют при средних и низких частотах вращения.

Шариковые упорные подшипники (рис. 3.162) воспринимают только осевые нагрузки; однорядные (*а*) в одном направлении, двухрядные (*б*) в двух направлениях. Допускают небольшие частоты вращения, так как под действием центробежных сил шарики стремятся выйти из беговых дорожек, при этом возрастают трение, нагрев и возможно даже закаливание шариков.

§ 3.69. УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Условные обозначения подшипников необходимы для их маркировки и соответствующих указаний в технической документации, чертежах, спецификациях, технической литературе. Условное обозначение состоит из ряда цифр, нанесенных на торце кольца. Последние две цифры (крайние справа) условно обозначают внутренний диаметр d подшипника. Для определения истинного значения d в миллиметрах необходимо эти цифры умножить на 5. Так, например, подшипник с условным обозначением 50211 имеет $d=11\times5=$ $=55$ мм. Это правило справедливо для обозначений с последними цифрами 04. . .99, т. е. для подшипников с $d=20. . .495$ мм. Исключение составляют подшипники с $d\leqslant17$ мм. Для них первая и вторая цифры справа 00; 01; 02; 03 соответствуют диаметрам $d=10$; 12; 15; 17 мм.

Третья цифра справа обозначает серию подшипника по диаметру: 1 (или 7) — особо легкая; 2 (5) — легкая; 3 (6) — средняя; 4 — тяжелая; 8 (9) — сверхлегкая.

Четвертая цифра справа обозначает тип подшипника: 0 * — радиальный шариковый; 1 — радиальный шариковый сферический; 2 — радиальный с короткими цилиндрическими роликами; 3 — радиальный роликовый сферический; 4 — радиальный роликовый с длинными роликами или игольчатый; 5 — радиальный роликовый с витыми роликами; 6 — радиально-упорный шариковый; 7 — роликовый конический; 8 — упорный шариковый; 9 — упорный роликовый.

Пятая или пятая и шестая цифры справа обозначают конструктивные отклонения подшипника (канавки на наружном кольце, защитные шайбы и т. п.) от основной конструкции. Например, 50211 — шарикоподшипник радиальный однорядный со стопорной канавкой на наружном кольце, условное обозначение того же подшипника основной конструкции — 211.

---

* Если после 0 слева нет цифр, то 0 в условном обозначении подшипника не проставляют. Например, правильное обозначение 312, а не 0312.

Седьмая цифра справа обозначает серию подшипника по ширине.

Дополнительные условные обозначения подшипника, проставляемые слева от основного обозначения, характеризуют класс точности. Например, 6-7308 — роликоподшипник конический средней серии с d=40 мм, 6-го класса точности. Классы точности подшипников обозначают цифрами 0; 6; 5; 4 и 2. Перечень дан в порядке повышения класса точности.

Дополнительные буквенные и цифровые обозначения справа от основного обозначения характеризуют изменение металла или конструкции деталей и специальные требования к подшипникам. Например 210Л — шарикоподшипник радиальный однорядный легкой серии, с d=50 мм, класса точности 0 с сепаратором из латуни (класс точности 0 в условном обозначении подшипника не проставляют).

3.70. ОСОБЕННОСТИ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Радиальная нагрузка R_r, действующая на подшипник, нагружает тела качения неравномерно (рис. 3.163). Одна половина подшипника вообще не нагружена, а в другой половине нагрузка R_r распределяется между телами качения в зависимости от угла γ, радиального зазора в подшипнике и точности геометрической формы его деталей.

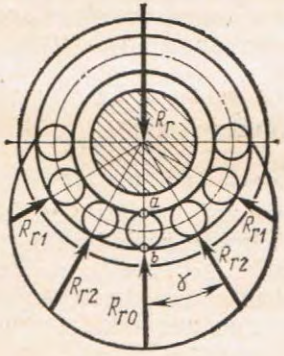


Рис. 3.163

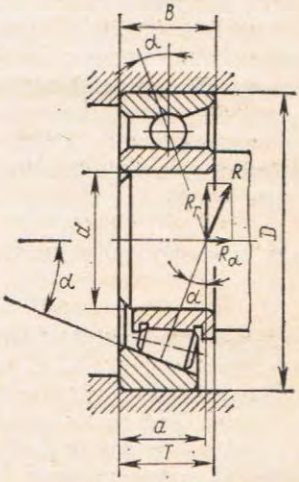


Рис. 3.164

При работе подшипника в каждой точке контакта тел качения с внутренним и наружным кольцами возникают контактные напряжения, которые изменяются по отнулевому циклу. Нетрудно заметить, что при равной нагрузке R_r напряжения в точке a внутреннего кольца больше, чем в точке b наружного кольца, так как в точке a шарик соприкасается с выпуклой поверхностью (меньше площадка контакта), а в точке b — с вогнутой (больше площадка контакта).

Для того чтобы уравнять напряжения колец, необходимо, чтобы опасная точка a вращалась вместе с кольцом. Тогда при движении по верхней половине траектории она разгружается совершенно, а при движении по другой половине на нее действуют напряжения с переменной амплитудой. Таким образом, для повышения долговечности подшипников целесообразно иметь вращающееся внутреннее кольцо * и неподвижное наружное кольцо. Чтобы улучшить условия работы точки b, рекомендуется обеспечить такую посадку наружного кольца, которая допускает небольшое проворачивание его в корпусе.

Радиальная нагрузка R_r, приложенная к радиально-упорным подшипникам, из-за наклона контактных линий вызывает появление осевых составляющих сил R_α, направленных от вершины конуса (рис. 3.164). Значение этих сил зависит от типа подшипника (шариковый, роликовый), углов наклона контактных линий, значений радиальных нагрузок, а также от того, как отрегулированы подшипники. Из рис. 3.164 видно, что значение R_α должно быть таким, чтобы равнодействующая R была направлена по нормали к линии контакта, т. е. $R_\alpha = R_r \operatorname{tg}\alpha$. Однако эта зависимость справедлива, если подшипники собраны с большим зазором. В этом случае всю нагрузку воспринимает только один шарик (или два) или ролик. Условия работы подшипников при больших зазорах крайне неблагоприятны (см. § 3.68). Обычно подшипники регулируют так, чтобы осевая игра при установившемся температурном режиме была близка к нулю. В этом случае при действии на подшипник радиальной силы под нагрузкой находится примерно половина тел качения и значение осевой составляющей силы R_α определяют по другим формулам: для конических роликоподшипников

$$R_\alpha = 0{,}83eR_r; \qquad (3.230)$$

для шарикоподшипников радиально-упорных

$$R_\alpha = eR_r, \qquad (3.231)$$

где e — коэффициент влияния осевого нагружения (см. § 3.73).

Нагрузки R_r и R_α приложены в точке пересечения оси вала с нормалью к середине линии контакта наружного кольца и тела качения. Эта точка может быть определена графически или по расстоянию a от торца наружного кольца подшипника: для роликоподшипников конических

$$a = 0{,}5T + (d + D)\, e/6, \qquad (3.232)$$

где T — монтажная высота роликоподшипников конических; для шарикоподшипников радиально-упорных

$$a = 0{,}5\,[B + 0{,}5\,(d + D)\,\operatorname{tg}\alpha]. \qquad (3.233)$$

Значения T, B, d, D, e и α приводятся в каталогах.

---

* Этот случай наиболее распространен на практике (вал вращается при неподвижном корпусе).

§ 3.71. ВИДЫ РАЗРУШЕНИЯ И КРИТЕРИИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Пластические (остаточные) деформации. Пластические деформации в виде вмятин (лунок) на дорожках качения колец, нарушающие работоспособность подшипника, наблюдаются в невращающихся и тихоходных подшипниках ($n \leqslant 1$ об/мин) при действии на них больших статических или ударных нагрузок. Поэтому *основным критерием работоспособности невращающихся и тихоходных подшипников является статическая грузоподъемность*, предупреждающая пластические деформации.

Усталостное разрушение. Усталостное разрушение рабочих поверхностей тел качения и дорожек качения колец подшипников в виде раковин или отслаивания происходит вследствие действия на них циклического контактного напряжения. Наблюдается у подшипников после длительной их работы в нормальных условиях при $n \geqslant 10$ об/мин и сопровождается повышенным стуком. Поэтому *основным критерием работоспособности подшипников, работающих в нормальных условиях при* $n \geqslant 10$ об/мин, *является динамическая грузоподъемность*, предупреждающая усталостное разрушение.

Износ. Наблюдается при недостаточной защите подшипника от абразивных частиц (пыли и грязи). Это основной вид разрушения подшипников автомобильных, тракторных, строительных и многих подобных машин.

Раскалывание колец и тел качения. Происходит при ударных нагрузках и неправильном монтаже, вызывающем перекосы колец и роликов.

Разрушение сепараторов. Характерно для быстроходных подшипников. Оно происходит от действия центробежных сил и воздействия на сепаратор тел качения.

§ 3.72. ОСНОВЫ РАСЧЕТА НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

На основании теоретических и экспериментальных исследований получена кривая усталости подшипников качения (рис. 3.165, кривая не имеет горизонтального участка). Исходным для расчета подшипников на долговечность является уравнение этой кривой

$$L = (C/R_э)^m, \qquad (3.234)$$

где L — *расчетная долговечность подшипников* в миллионах оборотов — расчетный срок службы, в течение которого не менее 90% из данной группы подшипников при одинаковых условиях должны отработать без появления признаков усталости металла; C — *динамическая грузоподъемность* радиальных и радиально-упорных подшипников — постоянная радиальная нагрузка (а для упорных и упорно-радиальных — центральная осевая нагрузка), которую группа идентичных подшипников с неподвижным наружным кольцом может выдержать (без появления усталостного разрушения поверхностей контактирующих тел) в течение расчетного срока службы,

исчисляемого в 1 млн. оборотов внутреннего кольца. Значение C устанавливают на основании теоретических и экспериментальных исследований для каждого данного подшипника при $L=1$ (рис. 3.165). Значения C в килоньютонах приводятся в каталогах; $R_э$— *эквивалентная динамическая нагрузка* радиальных и радиально-упорных подшипников — постоянная радиальная нагрузка (а для упорных и упорно-радиальных — центральная осевая нагрузка), которая при приложении ее к подшипнику с вращающимся внутренним и неподвижным наружным кольцом обеспечивает такой же расчетный срок службы, как и при действительных условиях нагружения и вращения; m— *показатель степени*, зависящий от формы контактирующихся тел; для шариковых подшипников $m=3$; для роликовых $m=10/3=3{,}33$.

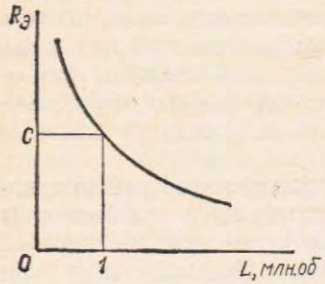


Рис. 3.165

Расчетная долговечность подшипников (ч)

$$L_h=[10^6/(60n)]\,(C/R_э)^m, \qquad (3.235)$$

где n — частота вращения подшипника, об/мин.

§ 3.73. ПОДБОР ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

При проектировании машин подшипники не конструируют и не рассчитывают, а подбирают из числа стандартных. В соответствии с критериями работоспособности подшипники подбирают по статической и динамической грузоподъемности (ГОСТ 18854—73 и 18855—73).

Подбор подшипников по статической грузоподъемности. Невращающиеся подшипники и вращающиеся с частотой $n\leqslant 1$ об/мин (например, домкраты, нажимные устройства и др.) подбирают по статической грузоподъемности.

Статическая грузоподъемность — это статическая нагрузка, которой соответствует общая остаточная деформация тел качения и колец в наиболее нагруженной точке контакта, равная 0,0001 диаметра тела качения. Такая остаточная деформация не оказывает заметного влияния на работу подшипника. Значения C_0 в килоньютонах приводятся в каталогах. Подробно см. [18, 22].

Подбор подшипников по динамической грузоподъемности. Выполняют при частоте вращения $n\geqslant 10$ об/мин (при $n=1\ldots 10$ об/мин принимают $n=10$ об/мин). В основу подбора положена формула (3.235).

Работоспособность подшипников зависит от многих факторов, в том числе от отношения осевой нагрузки к радиальной, характера и частоты вращения колец, характера приложения нагрузки и температуры. Влияние этих факторов на работоспособность учитывается тем, что подшипники подбирают не по действительным нагрузкам, а по эквивалентной нагрузке $R_э$.

Для радиальных шариковых и радиально-упорных шарико- и роликоподшипников

$$R_э = (XK_к R_r + YR_a) K_б K_т; \qquad (3.236)$$

для радиальных подшипников с короткими цилиндрическими роликами

$$R_э = K_к R_r K_б K_т^*; \qquad (3.237)$$

для упорных шариковых и роликовых подшипников

$$R_э = R_a K_б K_т, \qquad (3.238)$$

где R_r — радиальная нагрузка на подшипниках (суммарная радиальная опорная реакция), кН; R_a — осевая нагрузка подшипника, кН; $K_к^{**}$ — коэффициент, учитывающий вращение колец: при вращении внутреннего кольца $K_к=1{,}0$, наружного $K_к=1{,}2$; $K_б$ — коэффициент безопасности, учитывающий характер нагрузки: при спокойной нагрузке без толчков $K_б=1$, с умеренными толчками (редукторы всех конструкций) $K_б=1{,}3\ldots1{,}5$, при ударной нагрузке $K_б=2\ldots3$; $K_т$ — температурный коэффициент: при температуре подшипника $t\leqslant100$°С $K_т=1$, при $t=125\ldots200$°С $K_т=1{,}05\ldots1{,}25$; X и Y — коэффициенты радиальной и осевой нагрузок (табл. 3.18).

При действии на подшипник осевой нагрузки R_a кольца подшипника смещаются из своего среднего положения относительно друг друга в осевом направлении. Происходит выборка радиального зазора, что до некоторого значения $R_a/(K_h R_r)<e$ способствует более равномерному распределению нагрузки по телам качения. В этом случае осевая нагрузка не оказывает влияния на значение эквивалентной нагрузки, т. е. $X=1$ и $Y=0$. При увеличении R_a ($R_a/(K_к R_r)>e$) ухудшаются условия работы контактирующих тел, происходит увеличение суммарной реакции, что снижает работоспособность подшипников. Это учитывается при их выборе значениями коэффициентов X и Y, которые зависят от степени приспособленности конструкции подшипника к восприятию осевой нагрузки (от типа подшипника). Значения коэффициента e даны в табл. 3.18 *** и каталогах.

Для радиальных шарикоподшипников осевая нагрузка R_a равна внешней осевой нагрузке, т. е. $R_a=F_a$, где F_a — осевая сила в зацеплении зубчатой (червячной) передачи. Для радиально-упорных подшипников R_a — это результирующие осевые нагрузки на каждый подшипник, которые определяют в зависимости от расположения подшипников с учетом осевых составляющих R_α.

---

* Формулу (3.237) применяют также при определении $R_э$ для радиальных шариковых и радиально-упорных и шарико- и роликоподшипников при отсутствии действия на них осевой нагрузки или при малом ее значении.

** По ГОСТ 18855—73 нагрузки R_a, R_r, $R_э$ и коэффициент $K_к$ обозначают соответственно F_a, F_r, P и V.

*** Более подробный порядок определения коэффициента e для шариковых радиально-упорных подшипников с углом контакта $\alpha=12°$ см. [22, 30].

Шарикоподшипники радиальные однорядные				Шарикоподшипники радиально-упорные однорядные				
R_a/C_0	e	$R_a/(K_к R_r) > e$		$\alpha°$	R_a/C_0	e	$R_a/(K_к R_r) > e$	
		X	Y				X	Y
0,014	0,19		2,30		0,014	0,30		1,81
0,028	0,22		1,99		0,029	0,34		1,62
0,056	0,26		1,71		0,057	0,37		1,46
0,084	0,28		1,55		0,086	0,41		1,34
0,11	0,30	0,56	1,45	12	0,11	0,45	0,45	1,22
0,17	0,34		1,31		0,17	0,48		1,13
0,28	0,38		1,15		0,29	0,52		1,04
0,42	0,42		1,04		0,43	0,54		1,01
0,56	0,44		1,00		0,57	0,54		1,00
Роликоподшипники конические однорядные				26	—	0,68	0,41	0,87
				36	—	0,95	0,37	0,66
—	Каталог или $1{,}5 \operatorname{tg}\alpha$	0,4	Каталог или $0{,}4 \operatorname{ctg}\alpha$					

Примечание. При $R_a/(K_к R_r) \leqslant e$ принимают $X=1$ и $Y=0$.

Порядок определения R_a: 1. Определяют составляющие $R_{\alpha 1}$ и $R_{\alpha 2}$ радиальных нагрузок R_{r1} и R_{r2} по формуле (3.230) или (3.231) и рис. 3.166. 2. Определяют алгебраическую сумму всех осевых сил

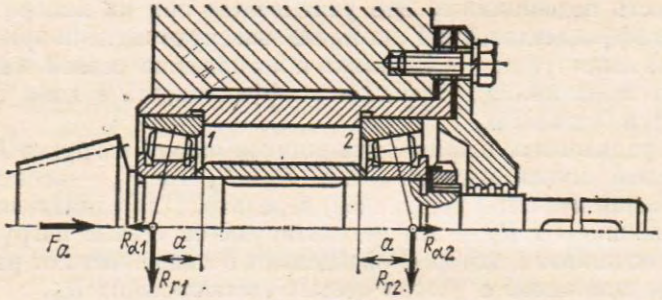


Рис. 3.166

ΣF, действующих на каждый подшипник. При этом осевые силы, нагружающие данный подшипник, считают положительными (>0), а разгружающие его — отрицательными (<0). 3. Определяют нагрузку R_a на подшипники. Если полученная сумма $\Sigma F>0$, то нагрузка R_a на этот подшипник равна сумме всех внешних осевых

сил F и силы R_α парного подшипника (без учета собственной осевой составляющей R_α). Если $\Sigma F<0$, то за нагрузку R_a этого подшипника принимают собственную осевую составляющую R_α. Например, сумма всех осевых сил, действующих на подшипник *1* (рис. 3.166), $\Sigma F_1=F_a-R_{\alpha 1}+R_{\alpha 2}>0$, поэтому $R_{a1}=F_a+R_{\alpha 2}$. Эквивалентную нагрузку этого подшипника $R_{э1}$ определяют по формуле (3.236). Для подшипника *2* сумма $\Sigma F_2=-F_\alpha+R_{\alpha 1}-R_{\alpha 2}<0$, поэтому $R_{a2}=R_{\alpha 2}$. Нагрузку $R_{э2}$ определяют по формуле (3.237),

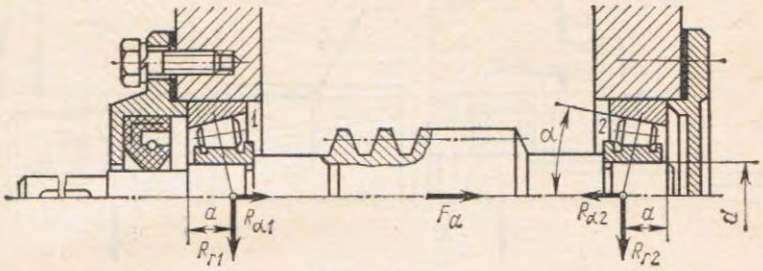


Рис. 3.167

т. е. в этом случае осевая нагрузка не оказывает влияния на $R_э$ и ее не учитывают.

Последовательность подбора подшипников по динамической грузоподъемности. *Определение реакций* производят в соответствии с расчетной схемой вала, значением и направлением внешних сил. Определяют радиальные опорные реакции в горизонтальной R_{Az} и вертикальной R_{Ay} плоскостях (см. рис. 3.140, опора A), а затем суммарную радиальную реакцию опоры A: $R_{rA}=\sqrt{R_{Az}^2+R_{Ay}^2}$.

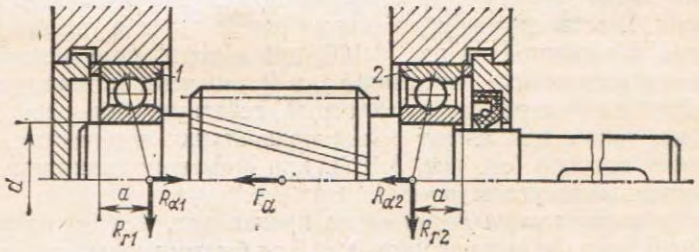


Рис. 3.168

Аналогично определяют суммарную радиальную реакцию опоры C—R_{zc}. При определении опорных реакций радиально-упорных подшипников точки их приложения находят с учетом формул (3.232) и (3.233), см. также рис. 3.166. . .3.168.

Рассмотрим порядок определения суммарных радиальных реакций при приложении к ведущему валу силы от муфты $F_м$ (рис. 3.169). Направление действия силы $F_м$ неизвестно, поэтому при определении реакций опор принимают, что реакции от ее действия на опорах совпадают (худший случай) по направлению с суммарными реак-

циями опор, найденными от действия сил в зацеплении F_t, F_r и F_a. Например, от сил в зацеплении получили радиальные опорные реакции в горизонтальной R_{3z} и R_{4z} в вертикальной R_{3y} и R_{4y} плоскостях, а от силы $F_м$ — реакции $R_{3м}$ и $R_{4м}$. Тогда суммарная радиальная реакция опоры 3 $R_{r3}=\sqrt{R_{3z}^2+R_{3y}^2}+R_{3м}$, а опоры 4 $R_{r4}=\sqrt{R_{4z}^2+R_{4y}^2}+R_{4м}$. Аналогично поступают и с реакциями от действия консольной силы на ведомом валу.

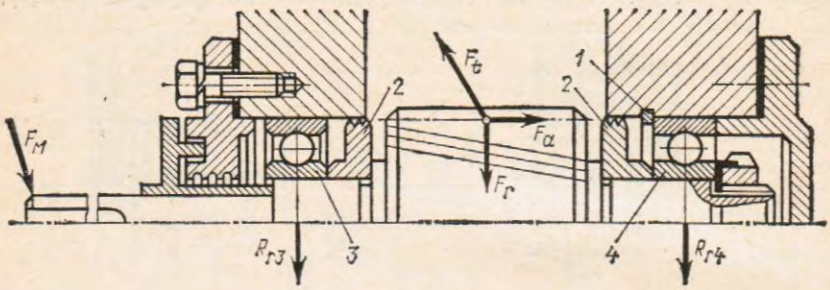


Рис. 3.169

При выборе типа подшипника предпочтение следует отдавать более дешевым шариковым радиальным подшипникам. Их применяют в механизмах и машинах, где осевая нагрузка составляет менее 35% от радиальной ($F_a/(K_к R_r)\leqslant 0{,}35$). Если отношение $F_a/(K_к R_r)>0{,}35$, то рекомендуется применять шарикоподшипники радиально-упорные или роликоподшипники конические *. Последние также широко применяют в случае раздельного монтажа колец, при больших динамических нагрузках или необходимости обеспечения высокой жесткости опор, например для вала конической шестерни. В этом случае подшипники рекомендуется устанавливать по схеме, показанной на рис. 3.166, при которой упругие деформации вала и радиальные нагрузки R_{r1} и R_{r2} на подшипники наименьшие. Для вала червяка, на который действует большая осевая нагрузка, также применяют роликоподшипники конические, установленные враспор (см. рис. 3.167), или шарикоподшипники радиально-упорные с углом $\alpha=36°$.

Выбор типоразмера подшипника производят, исходя из расчетного диаметра вала под подшипники. Для быстроходных и промежуточных валов редуктора рекомендуются подшипники средних серий, а для тихоходных — легких. Конкретный типоразмер подшипника устанавливают после определения расчетной долговечности L_h.

Требуемая долговечность подшипников L_h определяется сроком службы машины между капитальными ремонтами. В общем машиностроении принимают $L_h=2500...20\,000$ ч. Для редукторов же-

* Часто из-за больших радиальных размеров шарикоподшипников рекомендуется принимать роликоподшипники конические при действии на них чисто радиальных нагрузок.

лательно, чтобы L_h была равна долговечности редуктора, которая составляет для зубчатых редукторов 36 000 ч и для червячных — 20 000 ч; допускается минимальное значение L_h соответственно 10 000 и 5000 ч. Если расчетное значение L_h получилось меньше требуемого, то принимают другой типоразмер подшипника и повторяют расчет.

Пример 3.6. Подобрать шариковые радиальные подшипники для ведомого вала цилиндрического редуктора (см. рис. 3.140) по следующим данным: суммарные радиальные опорные реакции $R_{rA}=2{,}1$ кН и $R_{rC}=1{,}3$ кН; осевая сила $F_a=0{,}7$ кН; частота вращения вала $n_2=720$ об/мин; диаметр цапф $d_{n2}=40$ мм; температура подшипника $t<100°C$. Требуемая долговечность $L_h=15\,000$ ч.

Решение. 1. Проверим возможность установки подшипника легкой серии 208, для которого статическая грузоподъемность $C_0=17{,}8$ кН и динамическая грузоподъемность $C=25{,}1$ (см. табл. П8 [19]).

2. Принимаем расчетные коэффициенты $K_к=1$; $K_б=1{,}4$; $K_т=1$ (см. § 3.73). Для определения коэффициентов X и Y вычисляем отношение $R_a/C_0=F_a/C_0=0{,}7/17{,}8=0{,}039$ и по табл. 3.18 интерполяцией находим $e=0{,}24$. Осевая нагрузка действует на подшипник A, поэтому находим отношение $R_a/(K_к R_{rA})=0{,}7/(1\times 2{,}1)=0{,}33>e$. В этом случае $X=0{,}56$ и $Y=1{,}85$ (см. табл. 3.18).

Если по расчету получилось $R_a/(K_к R_{rA})<e$, то $X=1$ и $Y=0$.

3. Эквивалентная нагрузка подшипника A [см. формулу (3.236)] $R_{эA}=(XK_к R_{rA}+YR_a)K_б K_т=(0{,}56\cdot 1\cdot 2{,}1+1{,}85\cdot 0{,}7)\cdot 1{,}4\cdot 1$ кН$=3{,}46$ кН.

4. Эквивалентная нагрузка подшипника C [см. формулу (3.237)]

$$R_{эC}=K_к R_{rC} K_б K_т=1\cdot 1{,}3\cdot 1{,}4\cdot 1 \text{ кН}=1{,}82 \text{ кН}.$$

5. Расчетная долговечность более нагруженного подшипника A [см. формулу (3.235)]

$$L_h=[10^6/(60n_2)]\,(C/R_{эA})^m=[10^6/(60\cdot 720)]\,(25{,}1/3{,}46)^3 \text{ ч}=8840 \text{ ч}.$$

Так как долговечность оказалась меньше требуемой (15 000 ч), то перейдем к подшипнику средней серии 308, для которого $C_0=22{,}3$ кН, $C=31{,}3$ кН. Вычисляем отношение $R_a/C_0=0{,}7/22{,}3=0{,}031$, при этом $e=0{,}225$, $X=0{,}56$ и $Y=1{,}96$.

$$R_{эA}=(1\cdot 0{,}56\cdot 2{,}1+1{,}96\cdot 0{,}7)\cdot 1{,}4\cdot 1 \text{ кН}=3{,}57 \text{ кН};$$
$$L_h=[10^6/(60\cdot 720)]\,(31{,}3/3{,}57)^3 \text{ ч}=15\,600 \text{ ч},$$

что больше требуемой долговечности.

Пример 3.7. Подобрать роликовые конические подшипники для вала червяка червячного редуктора (см. рис. 3.167) по следующим данным: суммарные радиальные опорные реакции $R_{r1}=0{,}6$ кН и $R_{r2}=1{,}1$ кН; осевая сила $F_a=2{,}4$ кН; частота вращения вала $n_1=1440$ об/мин; диаметр цапф $d=45$ мм; температура подшипника $t<100°C$. Требуемая долговечность $L_h=20\,000$ ч.

Решение. 1. Проверим возможность установки подшипника средней серии 7309, для которого динамическая грузоподъемность $C=74{,}6$ кН, коэффициент влияния осевого нагружения $e=0{,}287$, коэффициент осевой нагрузки $Y=2{,}09$ (см. табл. П12 [19]).

2. Принимаем расчетные коэффициенты: $K_к=1$; $K_б=1{,}3$; $K_т=1$ (см. § 3.73).

3. Осевые составляющие от радиальной нагрузки [см. формулу (3.230)]:

$$R_{\alpha 1}=0{,}83eR_{r1}=0{,}83\cdot 0{,}287\cdot 0{,}6 \text{ кН}=0{,}14 \text{ кН},$$
$$R_{\alpha 2}=0{,}83eR_{r2}=0{,}83\cdot 0{,}287\cdot 1{,}1 \text{ кН}=0{,}26 \text{ кН}.$$

4. Алгебраическая сумма всех осевых сил, действующих на подшипник 2 (см. § 3.73), $\Sigma F_2=R_{\alpha 1}+F_a-R_{\alpha 2}=0{,}14+2{,}4-0{,}26>0$, результирующие осевые нагрузки: $R_{a2}=F_a+R_{\alpha 1}=2{,}4+0{,}14$ кН$=2{,}54$ кН; $R_{a1}=R_{\alpha 1}=0{,}14$ кН.

5. Находим отношение $R_{a2}/(K_к R_{r2})=2{,}54/(1\cdot 1{,}1)=2{,}3>e$. В этом случае $X=0{,}4$ (см. табл. 3.18).

6. Эквивалентная нагрузка подшипника 2 [см. формулу (3.236)]

$$R_{э2}=(XK_к+YR_{a2})\,K_б K_т=(0{,}4\cdot 1\cdot 1{,}1+2{,}09\cdot 2{,}54)\cdot 1{,}3\cdot 1 \text{ кН}=7{,}46 \text{ кН}.$$

7. Эквивалентная нагрузка подшипника *1* [см. формулу (3.237)]

$$R_{э1} = K_к R_{r1} K_б K_т = 1 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}3 \cdot 1 \text{ кН} = 0{,}78 \text{ кН}.$$

8. Расчетная долговечность более нагруженного подшипника *2* [см. формулу (3.235)]

$$L_h = [10^6/(60n_1)]\,(C/R_{э2})^m = [10^6/(60 \cdot 1440)]\,(74{,}6/7{,}46)^{3{,}33} \text{ ч} = 24\,700 \text{ ч},$$

что больше требуемой долговечности.

§ 3.74. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПОРАХ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ

Подшипниковые опоры кроме подшипников включают в себя корпус с крышками, устройства для крепления колец подшипников, защитные и смазочные устройства. Они фиксируют вал в осевом направлении, предохраняют тела качения от защемления, обеспечивают возможность регулировки зубчатых зацеплений и зазоров в самих подшипниках как при монтаже, так и в процессе эксплуатации, обеспечивают удержание смазки, предохраняют подшипник от пыли и влаги.

Осевая фиксация вала в корпусе выполняется одной или двумя опорами. При фиксации вала одной опорой (см. рис. 3.169) один из подшипников (на рисунке правый) крепят на валу и в корпусе (фиксирующая опора). Наружное кольцо другого подшипника в корпусе не закреплено и поэтому имеет свободное осевое перемещение («плавающая» опора). Благодаря этому происходит компенсация температурных удлинений вала и возможность ошибок монтажа, что устраняет опасность защемления тел качения. Фиксацию вала одной опорой широко применяют для валов цилиндрических зубчатых передач.

При фиксации вала двумя опорами подшипники устанавливают враспор (см. рис. 3.167 и 3.168) или врастяжку (см. рис. 3.166). Внутренние кольца подшипников упираются в буртики вала или в торцы других деталей, установленных на валу, а наружные — в торцы крышек или других деталей, закрепленных в корпусе. Один подшипник предотвращает осевое смещение вала в одном направлении, а другой — в противоположном. Фиксация вала двумя опорами предусматривает возможность осевой регулировки подшипников и исключает вероятность защемления вала в опорах при температурных деформациях подшипников и вала (подробно см. [10]). Для шариковых радиальных подшипников во избежание защемления тел качения предусматривают осевой зазор 0,2. . .0,3 мм между крышкой и наружным кольцом подшипника во избежание защемления тел качения, а для радиально-упорных шарико- и роликоподшипников предусматривают осевую регулировку.

Способ крепления колец подшипника на валу и в корпусе зависит от значения и направления осевой нагрузки, частоты вращения, типа подшипника, условий монтажа (демонтажа) и т. п. Внутренние кольца крепят буртиками на валу (см. рис. 3.167); деталями, установленными на валу (см. рис. 3.166 и 3.169); гайкой со стопорной

шайбой (см. рис. 3.166); концевыми шайбами и др. Наружные кольца крепят буртиками в корпусе или в стакане * (см. рис. 3.166); пружинным кольцом *1* и привертной крышкой (см. рис. 3.169); закладными крышками и кольцами при разъемных корпусах по осям валов (см. рис. 3.168). Более подробно см. [10, 19].

§ 3.75. СМАЗКА И УПЛОТНЕНИЯ

Смазка. Для смазки подшипников применяют жидкие или пластичные смазочные материалы. *Жидкие масла* (нефтяные и др.) обеспечивают наиболее благоприятные условия для работы подшипников (высокая стабильность, хорошо отводят теплоту и др.), однако применение их требует сложных уплотнений. На практике стремятся подшипники смазывать тем же маслом, которым смазывают зубчатые и червячные передачи. При картерной смазке колес подшипники смазываются брызгами масла, если выполняется условие $n^2 d_a \geqslant 100$, где n — частота вращения колеса, об/мин; d_a — диаметр вершин зубьев колеса, м.

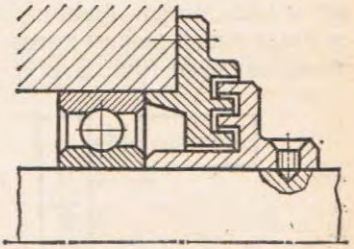


Рис. 3.170

Пластичные смазки (солидолы, смазка 1-13 и др.) применяют при $n^2 d_a < 100$ или при трудном доступе масляных брызг к подшипникам, например в подшипниках вала шестерни конического редуктора. Они лучше жидких масел защищают подшипники от коррозии, не требуют сложных уплотнений, проще в эксплуатации. Однако пластичные смазки чувствительны к изменению температуры и наличию влаги в окружающей среде. Смазкой заполняют свободное пространство корпуса подшипниковой опоры, а подшипники закрывают с внутренней стороны защитными или маслосбрасывающими кольцами *2* (см. рис. 3.169).

Уплотнения. Применяют для защиты подшипников от попадания извне пыли, грязи и влаги и предупреждения вытекания смазочного материала из подшипников опор. В машиностроении наибольшее распространение получили следующие уплотнения: *монтажные* (см. рис. 3.167 и 3.168), применяемые при окружных скоростях вала до 10 м/с. Они надежно работают при любом смазочном материале; *щелевые* уплотнения (см. рис. 3.166), применяемые при окружной скорости вала до 5 м/с и пластичной смазке. Зазоры щелевых уплотнений заполняют пластичной смазкой; *лабиринтовые* (рис. 3.170), применяемые при любых скоростях и смазочных материалах. Уплотняющий эффект создается чередованием весьма малых радиальных и осевых зазоров: *комбинированные* уплотнения, например ла-

---

* С помощью осевого перемещения стакана производят регулировку зубчатого зацепления конической передачи.

биринтно-щелевые уплотнения (см. рис. 3.169) и другие применяют в ответственных конструкциях для повышения уплотняющего эффекта.

Глава 15
МУФТЫ

§ 3.76. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Муфтой называется устройство, соединяющее концы двух валов и передающее вращающий момент с одного вала на другой без изменения его значения и направления. Потребность в соединении валов связана с тем, что большинство машин компонуют из отдельных агрегатов с входными и выходными валами, кинематическая и силовая связь между которыми выполняется с помощью муфт (рис. 3.171).

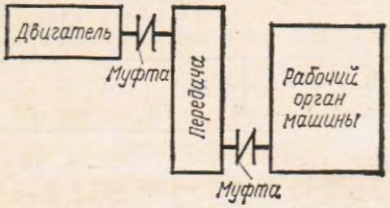


Рис. 3.171

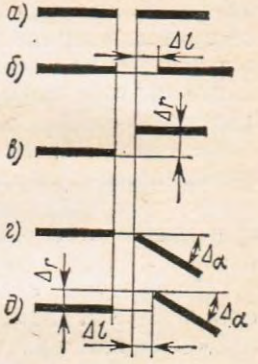


Рис. 3.172

Соединение валов — основное назначение муфты, но, кроме того, муфты обычно выполняют еще одну или несколько дополнительных функций: соединяют валы со свободно установленными на них деталями (зубчатые колеса, звездочки и т. д.); обеспечивают быстрое соединение и разъединение не только остановленных, но и вращающихся валов; смягчают динамические нагрузки и уменьшают колебания соединяемых валов и деталей передачи; предохраняют элементы машины от перегрузок; компенсируют смещение соединяемых валов. Различают три вида смещений (рис. 3.172): *осевые* Δ_l (*б*); *радиальные* Δ_r (*в*) и *угловые* $\Delta\alpha$ (*г*). На практике чаще всего встречается комбинация указанных смещений (*д*). Причины смещений: неточность монтажа и обработки валов; температурные удлинения валов и др.

Подбор муфт. Муфты подбирают по ГОСТу или ведомственным нормалям в соответствии с диаметром соединяемых валов * и значением передаваемого вращающего расчетного момента

$$M_p = KM \leqslant [M], \qquad (3.239)$$

* При разных диаметрах валов подбор муфты выполняют по большему диаметру.

где M и $[M]$ — номинальный и допускаемый вращающие моменты; K — коэффициент режима работы, учитывающий дополнительные динамические нагрузки на муфту: K=1,25. . .1,5 для ленточных транспортеров, токарных и фрезерных станков и др.; K=1,5. . .1,8 для цепных транспортеров, шнеков и др.; K=2. . .2,5 для скребковых транспортеров и др.

Муфты изготовляют двух типов: с цилиндрическими и коническими отверстиями под концы соединяемых валов. Допускается применять сочетание полумуфт разных типов с разными диаметрами отверстий в пределах одного передаваемого момента M_p.

Классификация. В машиностроении применяют большое количество муфт, различающихся по принципу действия и управления, назначению и конструкции, что весьма усложняет их классификацию. Механические муфты * делятся на четыре класса: *класс* 1 — нерасцепляемые муфты; *класс* 2 — управляемые муфты; *класс* 3 — самодействующие муфты; *класс* 4 — все муфты, не вошедшие в классы 1, 2 и 3, а также специальные, например комбинированные муфты, представляющие собой сочетание муфт различных классов.

§ 3.77. НЕРАСЦЕПЛЯЕМЫЕ МУФТЫ

Нерасцепляемые муфты имеют широкое распространение в общем машиностроении. Они подразделяются на жесткие, компенсирующие и упругие муфты.

Жесткие (глухие) муфты. Предназначены для жесткого соединения соосных валов (см. рис. 3.172, *а*). Из жестких муфт наиболь-

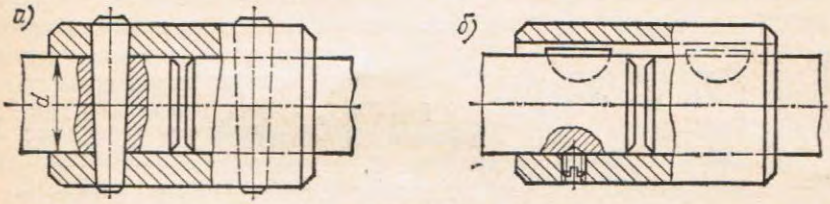


Рис. 3.173

шее применение получили втулочная и фланцевая. *Втулочная муфта* (рис. 3.173) — это цельная стальная втулка, закрепленная на концах валов штифтами (*а*), шпонками (*б*) или шлицами. Применяется для передачи небольших моментов и соединения валов диаметром d=4. . .100 мм. Однако применение их ограничено тем, что при сборке и разборке требуется осевое смещение хотя бы одного вала, очень точное совмещение осей валов и пригонки муфты.

Фланцевая муфта (рис. 3.174) состоит из двух полумуфт, соединенных болтами, которые ставят через один: половину болтов уста-

* Электрические и гидравлические муфты изучают в специальных курсах. Здесь рассматриваются наиболее распространенные и типичные конструкции механических муфт.

навливают без зазора, а вторую половину — с зазором. Центрование полумуфт осуществляется болтами, поставленными без зазора. Муфты изготовляют открытыми (рис. 3.174, *а*) и закрытыми защитным ободом (рис. 3.174, *б*), ограждающим болты и гайки. Они просты по конструкции, дешевы, могут передавать большие моменты и обеспечивают надежное соединение валов диаметром $d=12. . .130$ мм, но требуют точного совмещения осей валов и точного соблюдения перпендикулярности стыка полумуфт к осям валов. Муфты подбирают по ГОСТ 20761—75.

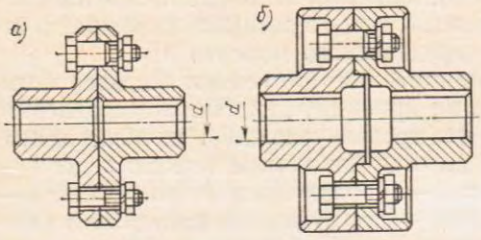


Рис. 3.174

Компенсирующие самоустанавливающие муфты. Предназначены для соединения валов с компенсацией осевых, радиальных и угловых смещений, которая достигается подвижностью жестких деталей муфты. Из компенсирующих муфт наибольшее применение получили зубчатая и кулачково-дисковая.

Зубчатая муфта (рис. 3.175) состоит из полумуфт *1* и *4* с наружными зубьями эвольвентного профиля и разъемной обоймы *3* с двумя рядами внутренних зубьев. Муфта компенсирует осевые, радиальные и угловые смещения валов путем увеличения боковых зазоров в зацеплении и обточки зубьев полумуфт по сфере. Компенсация смещений валов при работе муфты сопровождается скольжением зубьев и их износом. Для уменьшения износа в обойму через отверстие *2* заливают масло. Муфта применяется для соединения быстроходных и тихоходных высоконагруженных валов диаметром $d=40. . .560$ мм. Она надежно работает, проста в монтаже, имеет малые габариты и массу. Муфты подбирают по ГОСТ 5006—55.

Кулачково-дисковая муфта (рис. 3.176) состоит из полумуфт *1* и *3* с диаметральными пазами на торцах и промежуточного «плавающего» диска *2* с диаметральными взаимно перпендикулярными выступами на торцах. У собранной муфты выступы диска входят в пазы полумуфт. Таким образом диск соединяет полумуфты. При вращении несоосных валов выступы диска скользят в пазах полумуфт. Происходит повышенный износ муфты. Для уменьшения износа поверхности трения периодически смазывают. Муфта применяется для передачи значительных моментов и соединения тихоходных валов (до 250 об/мин) диаметром $d=16. . .150$ мм с радиальным смещением не более $0{,}04\ d$ и угловым до 30′. Муфты подбирают по ГОСТ 20720—75.

Упругие муфты. Уменьшают динамические нагрузки (смягчают толчки и удары), передаваемые через соединяемые ими валы, предохраняют валы от резонансных колебаний и компенсируют все виды их смещений. В качестве упругих элементов применяют резину или стальные пружины. Из большого числа упругих муфт наи-

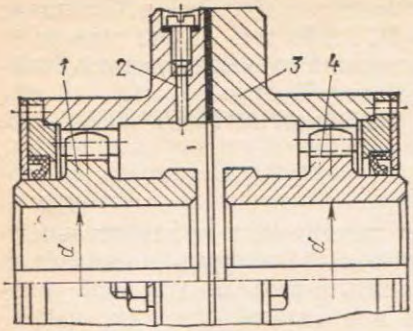


Рис. 3.175

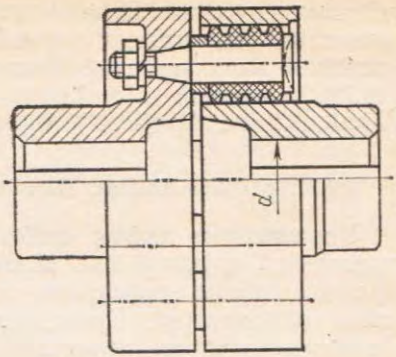


Рис. 3.177

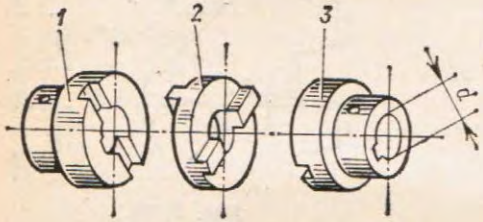


Рис. 3.176

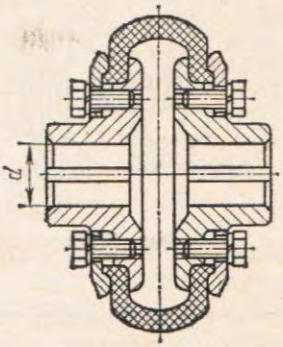


Рис. 3.178

большее распространение получили муфты с резиновыми упругими элементами: втулочно-пальцевая и с торообразной оболочкой.

Муфта упругая втулочно-пальцевая (МУВП) состоит из двух полумуфт, соединительных пальцев, закрепленных в конических отверстиях одной из полумуфт, и гофрированных резиновых втулок, надетых на пальцы (рис. 3.177). Муфта получила широкое распространение, особенно в приводах от электродвигателя для передачи вращающих моментов до 1600 Н·м и соединения валов диаметром d=16. . .150 мм. Вследствие деформации резиновых втулок при работе смягчаются толчки и удары, а также компенсируются небольшие смещения валов ($\Delta_l \approx 1. . .5$ мм, $\Delta_r \approx 0{,}3. . .0{,}6$ мм, $\Delta\alpha \leqslant 1°$). Муфта проста в изготовлении и надежна в работе, но нагрев резиновых втулок снижает их долговечность. Муфты подбирают по ГОСТ 21424—745.

Муфта упругая с торообразной оболочкой (рис. 3.178) состоит из двух полумуфт, упругой оболочки, по форме напоминающей автомобильную шину, и двух колец, которые с помощью винтов закрепляют оболочку на полумуфтах. Применяется при переменных и

ударных нагрузках. Передаваемый момент до 40 000 Н·м. Диапазон диаметров соединяемых валов $d=14...240$ мм. Муфта удобна и надежна в эксплуатации, обладает высокими демпфирующими свойствами и высокой компенсирующей способностью ($\Delta_t \approx 1...10$ мм, $\Delta_r \approx 1...5$ мм, $\Delta_\alpha \leqslant 1°30'$). Муфты подбирают по ГОСТ 20884—75.

§ 3.78. УПРАВЛЯЕМЫЕ МУФТЫ

Управляемые муфты снабжены механизмом принудительного управления (ручным или автоматическим), который позволяет в процессе работы многократно соединять и разъединять валы механизма или машины. Применяются при строгой соосности валов. По принципу работы делятся на две группы: муфты, основанные на

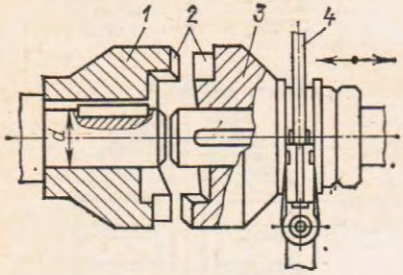


Рис. 3.179

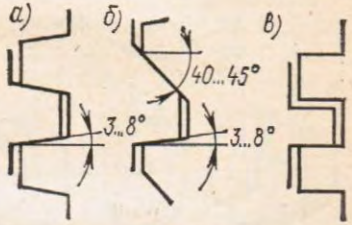


Рис. 3.180

зацеплении (кулачковые, зубчатые и др.), и муфты, основанные на трении (фрикционные).

Кулачковые муфты (рис. 3.179). Состоят из полумуфт *1* и *3* с кулачками *2* на торцовых поверхностях. Полумуфта *1* соединена с валом неподвижно, а полумуфта *3* может перемещаться вдоль вала на направляющих шпонках или шлицах с помощью отводки *4*.

Профиль кулачков (рис. 3.180) выбирают в зависимости от условий работы муфты. Наиболее распространены муфты с симметричным трапецеидальным профилем (рис. 3.180, *а*) и углом скоса боковой грани 3...8°, что обеспечивает самоторможение и снижает силу включения. При постоянном направлении вращения валов применяют неравнобочный трапецеидальный профиль кулачков (рис. 3.180, *б*), что облегчает включение муфты. При прямоугольном профиле (рис. 3.180, *в*) требуется точное взаимное расположение муфт в момент включения, включать такие муфты на ходу не допускается.

Включение кулачковых муфт при вращении валов всегда сопровождается ударами, которые могут вызвать разрушение кулачков. Поэтому их не рекомендуется включать под нагрузкой и при разности окружных скоростей валов $v > 0{,}8$ м/с. Выключение муфт возможно при любых скоростях. Они просты в изготовлении, малогабаритны и надежны в работе.

Фрикционные муфты. В отличие от кулачковых обеспечивают плавное соединение валов под нагрузкой на ходу при любой разности окружных скоростей. Из фрикционных муфт наибольшее распространение имеют дисковые муфты, у которых поверхностями трения являются плоские торцовые поверхности дисков. На рис. 3.181 показана *схема простейшей дисковой муфты* с одной парой поверхностей трения. Полумуфта *1* укреплена на валу неподвижно, а полумуфта *2* подвижна в осевом направлении. Для соединения валов к подвижной полумуфте прикладывают силу нажатия *F*. Передача вращающего момента обеспечивается силами трения на стыке

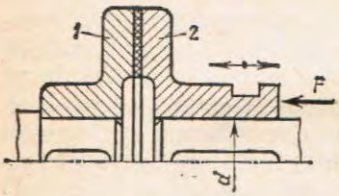


Рис. 3.181

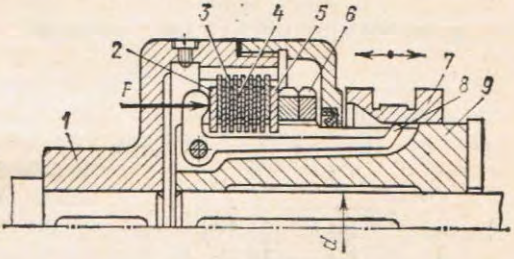


Рис. 3.182

торцовых поверхностей полумуфт. В процессе включения муфта пробуксовывает (диски проскальзывают) и разгон ведомого вала происходит плавно, без удара. При установившемся движении пробуксовка отсутствует и оба вала вращаются с одинаковой угловой скоростью. Муфта ограничивает передаваемый момент; при перегрузках она пробуксовывает, предохраняя машину от поломок.

Для уменьшения габаритов муфты, повышения плавности включения и уменьшения силы нажатия *F* применяют муфту не с одной, а с многими парами поверхностей трения — *многодисковую муфту* (рис. 3.182), которая получила преимущественное распространение в машиностроении. Она состоит из двух неподвижных полумуфт *1* и *9*, наружных *3* и внутренних *4* дисков, упорных колец *2* и *5*, регулировочных гаек *6*, рычажного привода управления *8* и отводки *7*. Наружные диски *3* соединяются с полумуфтой *1*, а внутренние *4* — с полумуфтой *9* с помощью подвижного шлицевого соединения. При включении муфты все диски зажимаются между упорными кольцами силой нажатия *F* от привода управления. Эта сила передается на все поверхности трения. Между дисками возникают силы трения. Происходит сцепление полумуфт и соединение муфтой валов. В выключенной (разомкнутой) муфте между дисками образуются зазоры 0,2. . .1 мм. В процессе включения и выключения муфты происходит проскальзывание дисков, а следовательно, износ их поверхностей трения. При этом увеличиваются зазоры между дисками, что приводит к резкому снижению силы нажатия *F* и сил трения. Поэтому муфту периодически регулируют гайками *6*, т. е. устанавливают требуемое расстояние между упорными кольцами. Управление муф-

тами может осуществляться механическим, гидропневматическим или электрическим приводом.

По условиям работы муфты бывают *масляные* (рис. 3.182) и *сухие*. Смазка служит для уменьшения износа и улучшения расцепляемости дисков. В масляных муфтах диски изготовляют из комбинации материалов: закаленная сталь по закаленной стали или по чугуну; в сухих — асбестовые накладки или металлокерамические покрытия по стали или чугуну. Толщину стальных дисков принимают 1,5. . .2,5 мм для масляных и 2,5. . .5 мм для сухих муфт. Муфты с механическим приводом подбирают по нормали МН 5664—65.

§ 3.79. САМОДЕЙСТВУЮЩИЕ МУФТЫ

Самодействующие муфты обеспечивают автоматическое соединение и разъединение валов при изменении заданного режима работы машины. Применяются при строгой соосности валов. Они делятся на предохранительные, обгонные и центробежные муфты. Наибольшее распространение получили предохранительные муфты.

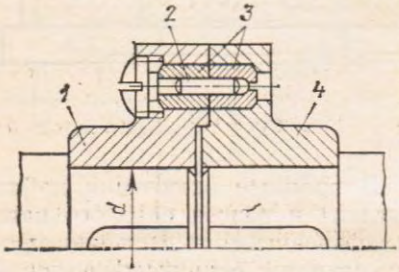


Рис. 3.183

Предохранительные муфты. Ограничивают значение передаваемого момента и этим предохраняют машины от поломок при перегрузках. Они бывают с разрушаемым элементом, чаще всего со срезным штифтом, и неразрушаемым — кулачковые, фрикционные и др.

Муфта со срезным штифтом (рис. 3.183) состоит из полумуфт *1* и *4*, соединенных стальным штифтом *2*, который вставлен в стальные закаленные втулки *3*, предохраняющие полумуфты от смятия. Момент передается от одной полумуфты к другой только штифтом (одним или двумя). При перегрузке штифт срезается и полумуфты расцепляются. Для дальнейшего применения муфты срезанный штифт заменяют новым. Применяются в приводах при резком возрастании перегрузок. Размеры муфт подбирают по нормалям станкостроения.

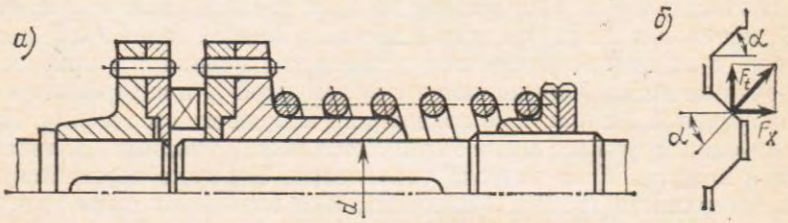


Рис. 3.184

Кулачковая предохранительная муфта (рис. 3.184, *а*) отличается от кулачковой управляемой муфты отсутствием привода управления. Сцепление полумуфт обеспечивает постоянно действующая пружина с регулируемой силой. Вращающий момент передается кулачками трапецеидального профиля (рис. 3.185, *б*) небольшой высоты с углом заострения $\alpha = 45. . .60°$. Пружину устанавливают с предварительным сжатием с таким расчетом, чтобы сила, развиваемая ею, была достаточна для передачи расчетного вращающего момента $M_р$. При перегрузке осевые составляющие силы F_x, действующие на кулачки, сжимают пружину и муфта срабатывает, предохраняя машину от поломок. Повторное мгновенное включение кулачков при перегрузке сопровождается ударами и большим шумом. Происходит повышенный износ кулачков. Поэтому кулачковые муфты применяют для передачи небольших моментов при малых угловых скоростях. Размеры муфт подбирают по ГОСТ 15620—77.

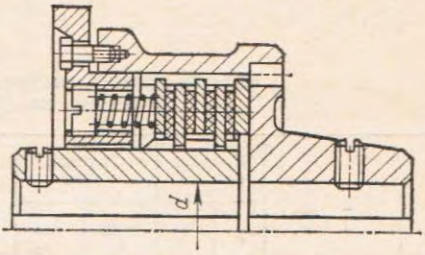


Рис. 3.185

Фрикционная предохранительная муфта (рис. 3.185) по конструкции аналогична управляемой многодисковой муфте. Отличие заключается в отсутствии привода управления и постоянном сжатии фрикционных дисков пружинами, отрегулированными на передачу расчетного момента $M_р$. При перегрузках муфта срабатывает, происходит проскальзывание дисков и износ их поверхностей трения. Диски сближаются, уменьшая силу сжатия пружин. Поэтому силу пружин периодически регулируют. Применяют при частых кратковременных перегрузках и в особенности при перегрузках ударного действия. Размеры муфт подбирают по ГОСТ 15622—77.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Шпонки призматические (по СТ СЭВ 189—75). Размеры, мм (см. рис. 3.44)

d	Сечение шпонки		Глубина паза		d	Сечение шпонки		Глубина паза	
	b	h	вала t_1	отв. t_2		b	h	вала t_1	отв. t_2
Св. 12 до 17	5	5	3	2,3	Св. 50 до 58	16	10	6	4,3
» 17 » 22	6	6	3,5	2,8	» 58 » 65	18	11	7	4,4
» 22 » 30	8	7	4	3,3	» 65 » 75	20	12	7,5	4,9
» 30 » 38	10	8	5	3,3	» 75 » 85	22	14	9	5,4
» 38 » 44	12	8	5	3,3	» 85 » 95	25	14	9	5,4
» 44 » 50	14	9	5,5	3,8	» 95 » 110	28	16	10	6,4
					» 110 » 130	32	18	11	7,4

Примечания: 1. Стандартный ряд длин, мм: 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 160; 180 (до 500).

2. В СТ СЭВ 189—75 даны сечения шпонок для валов $d = 2 \div 500$ мм, длины — до 500 мм.

3. Пример условного обозначения шпонки при $b = 16$ мм, $h = 10$ мм, $l = 80$ мм, торцы скругленные;

Шпонка 16×10×80 СТ СЭВ 189—75

То же — с плоскими торцами: *шпонка* 3—16×10×80 СТ СЭВ 189—75.

Приложение 2

Шпонки сегментные (по ГОСТ 24071—80). Размеры, мм (см. рис. 3.47)

d	b	h	d_1	l	t_1	t_2	d	b	h	d_1	l	t_1	t_2
Св. 10 до 12	4	5 6,5 7,5	13 16 19	12,6 15,7 18,6	3,5 5 6	1,8	Св. 22 до 30	8	9 11 13	22 28 32	21,6 27,3 31,4	6 8 10	3,3
Св. 12 до 17	5	7,5 9 10	19 22 25	18,6 21,6 24,5	5,5 7 8	2,3	Св. 30 до 38	10	13 15 16	32 38 45	31,4 37,1 43,1	10 12 13	3,3
Св. 17 до 22	6	9 10 11	22 25 28	21,6 24,6 27,3	6,5 7,5 8,5	2,8	Св. 38 до 44	12	19	65	59,1	16	3,3

Номинальная мощность P_0, кВт, передаваемая поликлиновым ремнем с десятью ребрами

Сечение ремня (Длина L_0, мм)	Диаметр малого шкива d_1, мм	Скорость ремня v, м/с							
		2	5	10	15	20	25	30	35
К ($L_0=710$)	40	0,65	1,4	2,4	3,2	3,7	—	—	—
	45	0,7	1,55	2,7	3,6	4,3	4,9	—	—
	50	0,76	1,65	2,9	4,0	4,8	5,3	—	—
	56	0,8	1,8	3,1	4,3	5,2	5,9	6,2	—
	63	0,85	1,9	3,4	4,6	5,7	6,4	6,8	—
	71	0,88	2,0	3,6	4,9	6,0	6,9	7,4	7,6
	80	0,92	2,05	3,7	5,2	6,4	7,3	7,9	8,2
Л ($L_0=1600$)	80	1,9	3,9	6,4	7,9	8,3	—	—	—
	90	2,2	4,5	7,6	9,7	10,8	—	—	—
	100	2,3	5,0	8,6	11,2	12,7	13,0	—	—
	112	2,54	5,5	9,6	12,7	14,7	15,3	—	—
	125	2,7	5,9	10,4	13,9	16,3	17,4	17,0	—
	140	2,9	6,3	11,0	15,0	17,8	19,2	19,0	17,2
М ($L_0=2240$)	180	7,1	14,5	24,0	30,2	32,8	31,8	24,2	—
	200	7,7	16,3	27,7	35,8	40,3	40,4	35,4	—
	224	8,5	18,0	31,3	41,2	47,5	49,5	46,3	37

Примечание. Для промежуточных значений скорости P_0 рассчитывают линейной интерполяцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Анурьев В. И.* Справочник конструктора-машиностроителя. М., 1978.
2. *Аркуша А. И.* Руководство к решению задач по теоретической механике. М., 1978.
3. *Бейзельман Р. Д., Цыпкин Б. В., Перель Л. Н.* Подшипники качения. Справочник. М., 1975.
4. *Биргер И. А., Василевич Г. Б.* Резьбовые соединения. М., 1973.
5. *Воробьев И. И.* Ременные передачи. М., 1979.
6. *Гернет М. М.* Курс теоретической механики. М., 1973.
7. *Геронимус Я. Л.* Теоретическая механика. Очерки об основных положениях. М., 1973.
8. *Гордон Дж.* Конструкции, или почему не ломаются вещи. М., 1980.
9. *Дубейковский Е. Н., Саввушкин Е. С., Цейтлин Л. А.* Техническая механика. М., 1980.
10. *Дунаев П. Ф.* Конструирование узлов и деталей машин. М., 1978.
11. *Зубов В. Г.* Механика. М., 1978.
12. *Иванов М. Н.* Детали машин. М., 1976.
13. *Ицкович Г. М.* Методика преподавания сопротивления материалов в техникумах. Минск, 1974.
14. *Ицкович Г. М.* Сопротивление материалов. М., 1976.
15. *Космодемьянский А. А.* Курс теоретической механики. М., ч. I, 1965; ч. II, 1966.
16. *Космодемьянский А. А.* Теоретическая механика и современная техника. М., 1969.
17. *Кудрявцев В. Н.* Детали машин. М., 1980.
18. *Куклин Н. Г., Куклина Г. С.* Детали машин. М., 1979.
19. Курсовое проектирование деталей машин / *Чернавский С. А., Ицкович Г. М., Боков К. Н.* и др. М., 1979.
20. *Никитин Е. М.* Теоретическая механика для техникумов. М., 1978.
21. *Поляков В. С., Барбаш Н. Д., Ряховский О. А.* Справочник по муфтам. Л., 1979.
22. Расчет и проектирование деталей машин / *Жуков К. П., Кузнецова А. К., Масленникова С. И.* и др. М., 1978.
23. *Решетов Д. Н.* Детали машин. М., 1974.
24. Сборник задач и примеров расчета по курсу деталей машин / *Ицкович Г. М., Чернавский С. А., Киселев В. А.* и др. М., 1975.
25. Справочник металлиста. Т. 1. М., 1976.
26. *Тарг С. М.* Краткий курс теоретической механики. М., 1979.
27. *Тимошенко С. П., Гере Дж.* Механика материалов. М., 1976.
28. Техническая механика / *Эрдеди А. А., Аникин И. В., Медведев Ю. А., Чуйков А. С.* М., 1980.
29. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М., 1978.
30. *Чернилевский Д. В.* Курсовое проектирование деталей машин и механизмов. М., 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 4

Раздел первый
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Статика

Глава 1. **Основные положения статики** 6
§ 1.1. Общие сведения 6
§ 1.2. Аксиомы статики 8
§ 1.3. Связи и их реакции 12
Глава 2. **Плоская система сходящихся сил** 16
§ 1.4. Сложение двух сил, приложенных к точке тела 19
§ 1.5. Сложение плоской системы сходящихся сил. Геометрическое условие равновесия 19
§ 1.6. Определение равнодействующей системы сходящихся сил методом проекций. Аналитическое условие равновесия 22
Глава 3. **Теория пар сил на плоскости** 27
§ 1.7. Пара сил 27
§ 1.8. Эквивалентность пар сил 29
§ 1.9. Сложение пар сил. Условие равновесия пар 31
§ 1.10. Момент силы относительно точки 33
Глава 4. **Плоская система произвольно расположенных сил** . . . 34
§ 1.11. Приведение силы к точке 34
§ 1.12. Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил 35
§ 1.13. Теорема Вариньона 39
§ 1.14. Частные случаи приведения плоской системы сил к точке. Условие равновесия 41
§ 1.15. Уравнения равновесия и их различные формы 43
§ 1.16. Балочные системы. Разновидности опор и виды нагрузок 45
§ 1.17. Реальные связи. Трение скольжения и его законы 50
Глава 5. **Пространственная система сил** 55
§ 1.18. Сложение пространственной системы сходящихся сил. Условие равновесия 55
§ 1.19. Момент силы относительно оси 60
§ 1.20. Произвольная пространственная система сил. Условие равновесия 63
Глава 6. **Центр тяжести** 67
§ 1.21. Центр параллельных сил 67
§ 1.22. Центр тяжести тела 69
§ 1.23. Определение координат центра тяжести плоских и пространственных фигур 72
§ 1.24. Устойчивость равновесия 77

Кинематика

Глава 7. **Кинематика точки** 81
§ 1.25. Основные понятия кинематики 81
§ 1.26. Способы задания движения точки 85
§ 1.27. Определение скорости точки при естественном способе задания ее движения 87

§ 1.28. Определение ускорения точки при естественном способе задания ее движения 88
§ 1.29. Частные случаи движения точки. Кинематические графики 91
§ 1.30. Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения 96
Глава 8. **Простейшие движения твердого тела** 98
§ 1.31. Поступательное движение 98
§ 1.32. Вращательное движение. Угловая скорость; угловое ускорение 99
§ 1.33. Частные случаи вращательного движения 102
§ 1.34. Скорости и ускорения различных точек вращающегося тела 105
§ 1.35. Способы передачи вращательного движения 107
Глава 9. **Сложное движение** 112
§ 1.36. Сложное движение точки 112
§ 1.37. Плоскопараллельное движение тела 115
§ 1.38. Определение скорости любой точки тела 116
§ 1.39. Мгновенный центр скоростей 117
§ 1.40. Сложение двух вращательных движений 119
§ 1.41. Понятие о планетарных передачах. Формула Виллиса . . . 121

Динамика

Глава 10. **Движение несвободной материальной точки** 123
§ 1.42. Основные понятия и аксиомы 123
§ 1.43. Свободная и несвободная точки 125
§ 1.44. Силы инерции 126
§ 1.45. Принцип Даламбера 128
Глава 11. **Работа и мощность** 129
§ 1.46. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении 129
§ 1.47. Работа равнодействующей силы 130
§ 1.48. Работа переменной силы на криволинейном пути 131
§ 1.49. Мощность 133
§ 1.50. Механический коэффициент полезного действия 133
§ 1.51. Работа сил на наклонной плоскости 135
§ 1.52. Работа и мощность при вращательном движении тел 137
§ 1.53. Трение качения. Работа при качении тел 138
Глава 12. **Общие теоремы динамики** 140
§ 1.54. Импульс силы. Количество движения. Кинетическая энергия 140
§ 1.55. Теорема об изменении количества движения точки 141
§ 1.56. Теорема об изменении кинетической энергии точки 142
§ 1.57. Понятие о механической системе 143
§ 1.58. Основное уравнение динамики вращающегося тела 144
§ 1.59. Моменты инерции некоторых тел 146
§ 1.60. Кинетическая энергия тела. Кинетический момент. . . . 148

Раздел второй
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Глава 1. **Основные положения** 150
§ 2.1. Задачи сопротивления материалов 150
§ 2.2. Классификация нагрузок 152
§ 2.3. Основные допущения 153
§ 2.4. Метод сечений. Виды нагружений 155
§ 2.5. Напряжения 157
Глава 2. **Растяжение и сжатие** 159
§ 2.6. Нормальные силы и напряжения в поперечном сечении бруса 159
§ 2.7. Перемещения и деформации. Закон Гука 162
§ 2.8. Напряженное состояние при одноосном растяжении 165
§ 2.9. Статические испытания материалов. Основные механические характеристики 167
§ 2.10. Расчеты на прочность 170
§ 2.11. Статически неопределимые системы 173

Глава 3. **Практические расчеты на срез и смятие** 177
§ 2.12. Основные расчетные предпосылки и формулы 177
§ 2.13. Примеры расчета 179
Глава 4. **Кручение** 180
§ 2.14. Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге 180
§ 2.15. Крутящий момент. Построение эпюр 182
§ 2.16. Кручение круглого прямого бруса. Основные предпосылки и формулы 183
§ 2.17. Расчеты на прочность и жесткость 187
§ 2.18. Цилиндрические пружины растяжения и сжатия 189
Глава 5. **Геометрические характеристики плоских сечений** 192
§ 2.19. Моменты инерции сечений 192
§ 2.20. Понятие о главных центральных моментах инерции 194
§ 2.21. Осевые моменты инерции простейших сечений 196
Глава 6. **Изгиб прямого бруса** 201
§ 2.22. Прямой изгиб чистый и поперечный 201
§ 2.23. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов 203
§ 2.24. Основные расчетные предпосылки и формулы при изгибе 211
§ 2.25. Расчеты на прочность 214
§ 2.26. Касательные напряжения при поперечном изгибе 219
§ 2.27. Понятие о линейных и угловых перемещениях при изгибе 221
§ 2.28. Интеграл Мора 223
§ 2.29. Правило Верещагина 224
§ 2.30. Расчеты на жесткость 228
§ 2.31. Основы расчета статически неопределимых балок 229
Глава 7. **Косой изгиб. Изгиб бруса с растяжением (сжатием)** . . . 231
§ 2.32. Косой изгиб 231
§ 2.33. Расчеты бруса большой жесткости при изгибе с растяжением (сжатием) 234
Глава 8. **Гипотезы прочности** 235
§ 2.34. Понятие о напряженном состоянии в точке упругого тела . . 235
§ 2.35. Гипотезы прочности и их назначение 238
§ 2.36. Расчеты бруса круглого поперечного сечения при изгибе с кручением 240
Глава 9. **Расчет на усталость** 243
§ 2.37. Основные понятия об усталости 243
§ 2.38. Основные характеристики цикла 244
§ 2.39. Предел выносливости 246
§ 2.40. Факторы, влияющие на предел выносливости 247
§ 2.41. Диаграмма предельных амплитуд цикла 249
§ 2.42. Определение коэффициента безопасности 250
Глава 10. **Устойчивость сжатых стержней** 251
§ 2.43. Устойчивость упругого равновесия. Критическая сила . . . 251
§ 2.44. Формула Эйлера 252
§ 2.45. Критическое напряжение. Пределы применимости формулы Эйлера 254

Раздел третий
ДЕТАЛИ МАШИН

Глава 1. **Основные положения** 257
§ 3.1. Общие сведения 257
§ 3.2. Понятия о надежности машин 259
§ 3.3. Критерии работоспособности и расчета деталей машин 260
§ 3.4. Допуски и посадки, шероховатость поверхностей и технологичность деталей машин 264
Глава 2. **Неразъемные соединения** 268
§ 3.5. Сварные соединения 268
§ 3.6. Клеевые соединения 272
§ 3.7. Соединения с натягом 273

Глава 3. **Резьбовые соединения** 276
§ 3.8. Резьбы 277
§ 3.9. Конструктивные формы резьбовых соединений 280
§ 3.10. Надежность резьбового соединения 282
§ 3.11. Стопорение резьбовых соединений 285
§ 3.12. Расчет на прочность при постоянной нагрузке 286
§ 3.13. Расчет одиночного болта при переменной нагрузке 293
§ 3.14. Материалы и допускаемые напряжения 294
Глава 4. **Шпоночные и шлицевые соединения** 295
§ 3.15. Шпоночные соединения 295
§ 3.16. Шлицевые соединения 298
Глава 5. **Основные понятия о передачах** 300
§ 3.17. Назначение передач 300
§ 3.18. Кинематические и силовые соотношения в передачах 301
Глава 6. **Фрикционные задачи** 303
§ 3.19. Общие сведения 303
§ 3.20. Нерегулируемые фрикционные передачи 304
§ 3.21. Вариаторы 306
Глава 7. **Ременные передачи** 308
§ 3.22. Общие сведения 308
§ 3.23. Детали ременных передач 310
§ 3.24. Геометрические зависимости 315
§ 3.25. Силы и напряжения в ветвях ремня. Силы, действующие на валы 316
§ 3.26. Скольжение ремня и передаточное число 318
§ 3.27. Расчет ременных передач 320
§ 3.28. Передачи зубчатым ремнем 326
Глава 8. **Зубчатые передачи** 329
§ 3.29. Общие сведения 329
§ 3.30. Основы теории зубчатого зацепления 331
§ 3.31. Зацепление двух эвольвентных колес 334
§ 3.32. Зацепление зубчатого колеса с рейкой 336
§ 3.33. Краткие сведения об изготовлении зубчатых колес 337
§ 3.34. Понятие о зубчатых колесах со смещением 339
§ 3.35. Материалы и конструкции зубчатых колес 341
§ 3.36. Цилиндрические зубчатые передачи 344
§ 3.37. Виды разрушения зубьев и критерии работоспособности зубчатых передач 348
§ 3.38. Расчет на прочность цилиндрических зубчатых передач . . . 350
§ 3.39. Основные параметры, расчетные коэффициенты и допускаемые напряжения 354
§ 3.40. Конические зубчатые передачи 360
§ 3.41. Планетарные зубчатые передачи 368
§ 3.42. Волновые зубчатые передачи 370
§ 3.43. Понятие о зубчатых передачах с зацеплением Новикова . . . 372
Глава 9. **Передача винт — гайка** 373
§ 3.44. Общие сведения 373
§ 3.45. Расчет передачи винт — гайка 375
Глава 10. **Червячные передачи** 377
§ 3.46. Общие сведения 377
§ 3.47. Основные параметры и передаточное число 380
§ 3.48. Особенности рабочего процесса и к. п. д. червячной передачи 383
§ 3.49. Силы в зацеплении 384
§ 3.50. Материалы червячной пары 385
§ 3.51. Виды разрушения зубьев червячных колес 386
§ 3.52. Расчет на прочность и тепловой расчет червячных передач . . 387
Глава 11. **Цепные передачи** 392
§ 3.53. Общие сведения 392
§ 3.54. Детали цепных передач и смазка цепи 392
§ 3.55. Основные параметры, кинематика и геометрия 395
§ 3.56. Силы в ветвях цепи. Силы, действующие на валы 397

§ 3.57. Расчет цепной передачи 398
Глава 12. **Валы и оси** 400
§ 3.58. Общие сведения 400
§ 3.59. Расчет валов 402
§ 3.60. Расчет осей 408
Глава 13. **Подшипники скольжения** 408
§ 3.61. Общие сведения 408
§ 3.62. Конструкции, материал и смазка 409
§ 3.63. Виды разрушения и критерии работоспособности подшипников скольжения 413
§ 3.64. Расчет подшипников скольжения 413
§ 3.65. Понятие о работе подшипников скольжения в условиях жидкостной смазки 414
§ 3.66. Подшипники скольжения без смазки 415
Глава 14. **Подшипники качения** 416
§ 3.67. Общие сведения 416
§ 3.68. Основные типы подшипников качения 418
§ 3.69. Условные обозначения подшипников качения 420
§ 3.70. Особенности рабочего процесса подшипников качения . . . 421
§ 3.71. Виды разрушения и критерии работоспособности подшипников качения 423
§ 3.72. Основы расчета на долговечность 423
§ 3.73. Подбор подшипников качения 424
§ 3.74. Краткие сведения об опорах подшипников качения 430
§ 3.75. Смазка и уплотнения 431
Глава 15. **Муфты** 432
§ 3.76. Общие сведения 432
§ 3.77. Нерасцепляемые муфты 433
§ 3.78. Управляемые муфты 436
§ 3.79. Самодействующие муфты 438
Приложение 440
Список литературы 442

Александр Иоакимович Аркуша
Михаил Игнатьевич Фролов

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Зав. редакцией *К. И. Аношина.* Редактор *Н. Н. Ещенко.* Младший редактор *С. В. Мовчан.* Художественный редактор *Т. А. Дурасова.* Технический редактор *Р. С. Родичева.* Корректор *Г. И. Кострикова.*

ИБ № 3376

Изд. № ОТ-404. Сдано в набор 30.03.83. Подп. в печать 23.09.83. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Объем 28 усл. печ. л. Усл. кр.-отт. 28. Уч.-изд. л. 28,08. Тираж 140 000 экз. Заказ № 1505. Цена 1 руб.

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28

1 руб.