Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОТКРЫТЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теоретической механики

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Контрольные задания и методические указания
для студентов-заочников
энергетических, горных, металлургических,
электроприборостроения и автоматизации,
технологических специальностей,
а также геологических, электротехнических,
электронной техники и автоматики,
химико-технологических специальностей

Москва
Издательство МГОУ
2008

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Теоретическая механика – дисциплина физико-математического цикла. Для изучения теоретической механики необходимы знания раздела «Механика» курса физики и соответствующая математическая подготовка.

Студенту необходимо уметь пользоваться системой декартовых прямоугольных координат на плоскости и в пространстве.

В курсе теоретической механики широко используются понятия и методы векторной алгебры, а именно: сложение и вычитание векторов; скалярное и векторное умножение векторов; проекция вектора на ось; выражения составляющих вектора, параллельных координатным осям.

Студент должен знать: основные тригонометрические функции, графики этих функций; теоремы синусов и косинусов; уравнения кривых второго порядка, изучаемых в аналитической геометрии. Надо уметь дифференцировать функции одного переменного, находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, интегрировать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения второго порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

Для изучения механики необходимо понимание физической сущности изучаемых явлений, методов их схематизации (моделирования), умение пользоваться математическими методами при решении задач. Студент должен не только работать с учебником и конспектом лекций, но обратить самое серьезное внимание на самостоятельное решение задач. Задачник по механике является таким же необходимым учебным пособием для студента, как и теоретический курс.

При изучении курса особое внимание следует обратить на основные понятия и определения, формулировки аксиом, теорем и принципов (в точных формулировках существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так). Однако следует не только заучивать формулировки, важно понять их смысл и уметь изложить их содержание своими словами. Необходимо также понять смысл и методику всех доказательств.

Для понимания теорем и принципов механики важно разобраться в решениях задач, которые приведены в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению. Следует также самостоятельно решить несколько задач (например, из сборника задач И.В.Мещерского) и после этого решить соответствующую задачу из контрольного задания, приняв во внимание методические указания и пример решения аналогичной задачи, имеющийся в данном методическом пособии.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Введение

Предмет теоретической механики. Место теоретической механики в цикле естественнонаучных дисциплин. Основные исторические этапы развития механики. Структура курса теоретической механики.

Основные модели материальных тел в теоретической механике (материальная точка, система материальных точек, абсолютно твердое тело, системы твердых тел).

Раздел 1. СТАТИКА

Основные понятия, определения и аксиомы статики

Сила, проекция силы на ось. Момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси. Система сил. Эквивалентность двух систем сил. Равнодействующая системы сил.

Основные задачи статики. Аксиомы статики.

Пара сил, ее векторный и скалярный моменты. Теоремы о парах сил и операциях с ними.

Приведение произвольной системы сил к центру. Теорема Пуансо. Главный вектор и главный момент относительно центра приведения произвольной системы сил. **Условия равновесия тела под действием систем сил**. Условия равновесия тела под действием произвольной системы сил в векторной и аналитической формах. Условия равновесия тела под действием различных частных видов систем сил. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Связи и реакции связей. Основные виды связей: гладкая поверхность, уступ, нить, цилиндрический шарнир, сферический шарнир, невесомый стержень с шарнирами на концах, шарнирно-подвижная опора, плоская и пространственная заделка. Аксиома связей (принцип освобождаемости от связей).

Решение задач на равновесие одного твердого тела под действием различных систем сил. (Равновесие системы тел.)

Трение. Сцепление и трение скольжения. Законы трения скольжения. Сопротивление качению.

Центр тяжести тела. Центр системы параллельных сил. Центры тяжести простейших однородных геометрических тел. Методы нахождения центров тяжести тел.

Раздел 2. **КИНЕМАТИКА**

Введение. Системы отсчета.

Кинематика точки. Способы задания движения точки (векторный, координатный, естественный). Определение скорости и ускорения точки при различных способах задания ее движения.

Простейшие движения твердого тела. Поступательное движение. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Уравнение движения, угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение точки тела при его вращательном движении вокруг неподвижной оси.

Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела. Уравнения плоского движения. Разложение его на поступательное и вращательное движения. Векторная формула для скоростей точек тела при плоском движении. Теорема о проекциях скоростей двух точек твердого тела. Мгновенный центр скоростей, методы его нахождения и применения.

Сложное движение точки. Абсолютное, переносное и относительное движение. Теоремы о скоростях и ускорениях точки при сложном движении. Ускорение Кориолиса.

Раздел 3. **ДИНАМИКА**

Введение. Законы Ньютона. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной точки в векторной и координатной формах (декартова система координат). Уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника. Две основные задачи динамики материальной точки, методика решения задач динамики.

Динамика относительного движения материальной точки. Дифференциальные уравнения относительного движения точки. Переносная и кориолисова силы инерции. Принцип относительности Галилея. Условия равновесия материальной точки в неинерциальной системе отсчета. Невесомость.

Колебания точки. Свободные колебания точки без учета сил сопротивления. Свободные колебания при вязком сопротивлении (затухающие колебания). Вынужденные колебания. Резонанс.

Понятие о механической системе. Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил.

Геометрия масс. Центр масс механической системы. Моменты инерции системы относительно оси. Теорема Гюйгенса. Формулы для моментов инерции простейших тел. Радиус инерции. Дифференциальные уравнения движения механической системы.

Теорема о движении центра масс. (Частные случаи движения центра масс). Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.

Количество движения материальной точки и механической системы. Элементарный и полный импульс силы. Теорема об изменении количества движения системы в дифференциальной и интегральной формах, закон сохранения количества движения.

Кинетический момент механической системы относительно центра и относительно оси. Теорема об изменении кинетического момента системы относительно оси.

Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Мощность и работа силы. Мощность, элементарная и полная работа силы. Работа внутренних сил механической системы. Идеальные связи.

Кинетическая энергия материальной точки и механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Принцип Даламбера. Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для точки и системы материальных точек. Метод кинетостатики. Определение реакций в опорах твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Введение в аналитическую механику. Классификация связей. Действительные и возможные перемещения точки и механической системы. Число степеней свободы. Возможная работа силы. Идеальные связи. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

Уравнения Лагранжа второго рода. Обобщенные координаты. Обобщенные силы. Способы вычисления обобщенных сил. Уравнения Лагранжа второго рода.

Примерный перечень тем практических занятий

1. Плоская система сил.

2. Пространственная система сил.

3. Кинематика точки и вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

4. Кинематика плоского движения твердого тела.

5. Сложное движение точки.

6. Первая и вторая задачи динамики материальной точки.

7. Общие теоремы динамики системы.

8. Принцип Даламбера (Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики).

Список рекомендуемой литературы

Основной

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. – М.: Высшая школа, 2004.

2. Цывильский В. Л. Теоретическая механика: Учебник. – М.: Высшая школа, 2008.

3. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. – М.: Наука, 2002.

Дополнительный

4. Гернет М.М. Курс теоретической механики. – М.: Высшая школа,1998.

5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие / под ред. А.А. Яблонского. – М.: Наука, 2004.

Состав контрольных работ

Студенты выполняют две контрольные работы в следующем составе:

– контрольная работа 1 – задачи С1, С2, К1, К2, К3;

– контрольная работа 2 – задачи Д1, Д2, Д3.

В каждой задаче наряду с общим для всех вариантов условием имеется таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая некоторые дополнительные условия для каждого варианта данной задачи.

К каждой задаче дается 10 рисунков. Нумерация рисунков двойная: она включает номер задачи и номер рисунка к данной задаче. Например, рис. С1.4 – это рис. 4 к задаче С1 и т.д.

Выбор вариантов

Вариант решаемой студентом задачи выбирается **по двум последним цифрам** его **учебного шифра** (порядкового номера в учебной группе).

По последней цифре шифра выбирается номер рисунка.

Дополнительные условия для рассматриваемой задачи берутся из таблицы по строке, номер которой соответствует предпоследней цифре учебного шифра.

Например, если учебный шифр студента оканчивается числом **83**, то: в каждой задаче он берет **рисунок с номером 3** (в задаче С1 это рис. С1.3, в задаче С2 – рис. С2.3 и т.д.) ; дополнительные условия задания берутся из таблицы к соответствующей задаче **по строке, имеющей номер 8.**

Порядок выполнения контрольных работ

Каждая контрольная работа выполняется в отдельной тетради (ученической), страницы которой нумеруются. На обложке указываются: название дисциплины, номер контрольной работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет и специальность.

Решение каждой задачи для удобства его проверки следует **начинать на левой странице разворота тетради** (т.е. на четной странице).

Сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается то, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи переписывать не следует).

Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи; на нем все размеры, углы, действующие силы, расположение тел и т.п. должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть достаточного размера, аккуратным и наглядным, ясно показывать все необходимые размеры, углы, векторные величины.

Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие теоремы или формулы применяются, откуда получаются те или иные результаты, подробно излагать с необходимыми пояснениями весь ход расчетов). Не следует вычислять большое число значащих цифр, вычисления должны соответствовать необходимой точности. Обязательно указывать размерность получаемых величин. В конце решения даются ответы.

Общие пояснения к тексту задач

При чтении текста каждой задачи необходимо учесть следующее. Большинство рисунков заданий в данном пособии дано схематически, без соблюдения масштаба.

На рисунках к задачам С1, С2, Д1–Д3 все линии, параллельные строкам, считаются горизонтальными, а перпендикулярные строкам – вертикальными; и это в текстах задач специально не оговаривается. Также без оговорок считается, что все нити (тросы, веревки) являются невесомыми и нерастяжимыми; нити, перекинутые через блок, по блоку не скользят; катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте и в таблице задачи величины m_1, l_1 и т.п. означают массу и размер тела 1, величины m_2, l_2 – массу и размер тела 2 и т.д. Аналогично обозначены величины: ω_1, ε_1 – угловая скорость и угловое ускорение тела 1; V_B, a_B – скорость и ускорение точки В и т.п. В каждой задаче подобные обозначения могут специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из величин, заданных в общем условии задачи, при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться; они нужны для решения других вариантов этой задачи. Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к вашему варианту (номеру вашего рисунка или строке вашего условия в таблице).

После изложения текста каждой задачи под рубрикой «Указания» даются методические указания по ее решению, а затем пример решения аналогичной задачи с краткими пояснениями хода решения, при этом в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются.

При выполнении своего задания студент должен показывать все преобразования и числовые расчеты с необходимыми пояснениями.

Таблица

Значения тригонометрических функций

Угол α°	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
0	0	1,0000
20	0,3420	0,9397
30	0,5000	0,8660
40	0,6428	0,7660
45	0,7071	0,7071
50	0,7660	0,6428
60	0,8660	0,5000
70	0,9397	0,3420
90	1,0000	0

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

СТАТИКА

Задача С1

Жесткая рама (рис. С1.0 – С1.9), расположенная в вертикальной плоскости, закреплена шарнирно в неподвижной точке А, а в точке В имеет либо шарнирно-подвижную опору, либо связью является невесомый стержень с шарнирами на концах.

На раму действуют пара сил, момент которой $M = 120$ Нм, и две силы, для каждой из которых модуль, направление и точка приложения указаны в табл. С1. Например, в данных по строке 5 на раму действуют сила $\overline{F}_1$ ($F_1 = 10$ Н), приложенная в точке Е и направленная под углом $\alpha_1 = 60^0$ к горизонтальной оси (в соответствии со схемой действия сил, приведенной в верхней части табл. С1, угол α_1 откладывается от этой оси против хода часовой стрелки), и сила $\overline{F}_4$ ($F_4 = 40$ Н), приложенная в точке К под углом $\alpha_4 = 20^0$ к горизонту (угол α_4 откладывается по ходу часовой стрелки).

Определить реакции связей в точках А и В, вызываемые действием заданных нагрузок, если $a = 0{,}6$ м, $b = 0{,}4$ м, $c = 0{,}2$ м, d = 0,3 м.

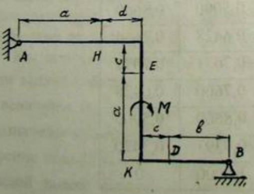


Рис. С1.0

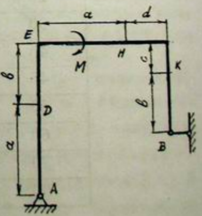


Рис. С1.1

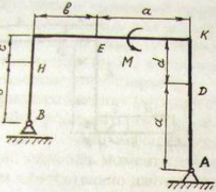


Рис. С1.2

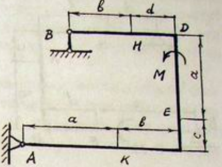


Рис. С1.3

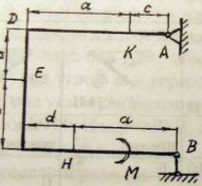


Рис. С1.4

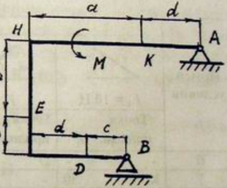


Рис. С1.5

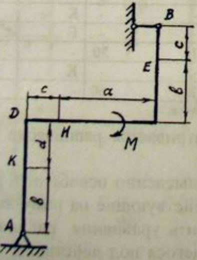


Рис. С1.6

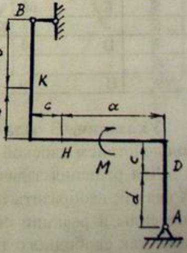


Рис. С1.7

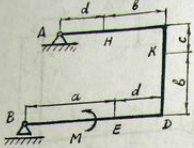


Рис. C1.8

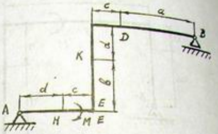
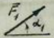
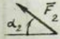
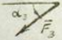


Рис. C1.9

Таблица C1

Номер условия	Силы							
	 $F_1 = 10$ H		 $F_2 = 20$ H		 $F_3 = 30$ H		 $F_4 = 40$ H	
	Точка прилож.	α_1^0	Точка прилож.	α_2^0	Точка прилож.	α_3^0	Точка прилож.	α_4^0
0	-	-	D	60	E	20	-	-
1	K	30	-	-	-	-	H	70
2	-	-	E	50	-	-	D	30
3	H	40	-	-	K	60	-	-
4	-	-	H	30	D	50	-	-
5	E	60	-	-	-	-	K	20
6	-	-	K	70	-	-	E	60
7	D	50	-	-	H	30	-	-
8	-	-	D	20	-	-	K	30
9	H	70	-	-	E	60	-	-

Указания. В задаче C1 рассматривается равновесие тела под действием плоской системы сил.

Для решения задачи следует: мысленно освободить раму от связей; изобразить на чертеже действующие на раму активные силы и реакции связей; составить уравнения равновесия рамы как свободного тела, находящегося под действием приложенных к ней сил; определить искомые величины и проверить правильность решения.

При записи уравнений равновесия в виде сумм проекций сил на координатные оси следует учесть, что сумма проекций сил, образующих пару, на любую ось равна нулю, так как эти силы равны по модулю, параллельны друг другу и направлены в противоположные стороны.

При определении момента силы относительно точки иногда удобно разложить эту силу на такие составляющие, для которых плечи легко вычисляются, и, пользуясь теоремой Вариньона, находить момент силы как сумму моментов её составляющих относительно данной точки.

Пример С1. Жесткая рама, размеры которой указаны на рис. С1*а*, закреплена шарнирно в неподвижной точке А, а в точке В имеет подвижную шарнирную опору, которая может свободно двигаться по горизонтальной плоскости. На раму действуют пара сил (ее момент *М*), сила $\overline{F}$, приложенная в точке К под углом α к горизонту, и сила $\overline{T}$, приложенная в точке Е под углом β к горизонту.

Дано: $M = 40$ Н·м; $F = 50$ Н; $\alpha = 30^0$; $T = 25$ Н, $\beta = 70^0$; $a = 0{,}6$ м; $b = 0{,}4$ м, $c = 0{,}2$ м, $d = 0{,}3$ м.

Определить реакции опор А и В.

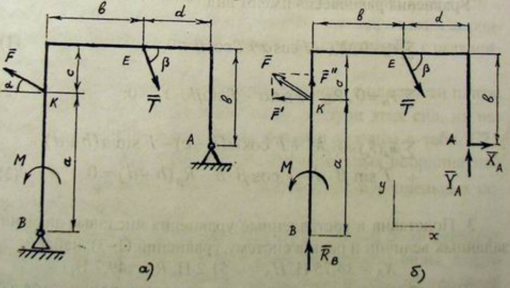


Рис. С1

Решение 1. Рассмотрим равновесие рамы. На расчетной схеме (рис. С1б) освобожденной от связей рамы показываем действующие на нее заданные силы $\overline{F}$, $\overline{T}$, пару сил (ее момент М) и реакции связей. Реакцию неподвижной шарнирной опоры А представим двумя ее составляющими $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ по направлению выбранных координатных осей x,y. Реакция $\overline{R}_B$ шарнирно-подвижной опоры В направлена к рассматриваемому телу перпендикулярно опорной плоскости.

2. Для действующей на раму плоской системы сил (рис. С1б) составим три уравнения равновесия первой (основной) формы аналитических условий равновесия. При вычислении алгебраических моментов сил относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона. Так, например, при определении момента силы $\overline{F}$ относительно точки А разложим её на составляющие $\overline{F}'$ и $\overline{F}''$, параллельные координатным осям (модули этих сил $F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$), и учтем, что $m_A(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') + m_A(\overline{F}'') = F\cos\alpha\cdot(b-c) - F\sin\alpha\cdot(b+d)$.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A - F\cos\alpha + T\cos\beta = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ R_B + F\sin\alpha - T\sin\beta + Y_A = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0,\ M + F\cos\alpha(b-c) - F\sin\alpha(b+d) + T\sin\beta\cdot d - T\cos\beta\cdot b - R_B(b+d) = 0. \qquad (3)$$

3. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1–3), найдем:

$X_A = 34{,}75$ Н, $H_A = -51{,}2$ Н, $R_B = 49{,}7$ Н.

Для проверки правильности полученных результатов составим какое-либо другое уравнение равновесия рамы, например:

$$\sum m_B(\overline{F}_k)=0,\ M+F\cos\alpha\cdot a-T\sin\beta\cdot b-T\cos\beta\cdot(a+c)+$$
$$+Y_A(b+d)-X_A(a+c-b)=0.$$

Подставив в это уравнение числовые значения величин, убеждаемся, что они удовлетворяют этому уравнению.

Если полученное в расчете числовое значение силы имеет знак минус, то действительное направление этой силы противоположно показанному на расчетной схеме (рис. С1*б*).

Полная реакция опоры А находится как геометрическая сумма сил $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, а модуль реакции $\overline{R}_A$ определим по формуле $R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}$ = 61,88 Н.

Ответ: X_A = 34,75 Н, Y_A = –51,2 Н, R_B = 49,7 Н. Действительное направление силы $\overline{Y}_A$ противоположно показанному на рис. С1*б*.

Задача С2

Однородная прямоугольная плита весом G = 50 кН расположена в горизонтальной плоскости *xy*. Плита закреплена (рис. С2.0–С2.9) в точке А сферическим шарниром, в точке В – цилиндрическим шарниром (подшипником), в точке К – невесомым стержнем KL с шарнирами на концах.

На плиту действуют: пара сил, лежащая в плоскости плиты (ее момент M = 6 кН·м), и две силы (модули этих сил, их направления и точки приложения к плите указаны в табл. С2). Силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ лежат в плоскостях, параллельных координатной плоскости *xz*, а силы $\overline{F}_3$ и $\overline{F}_4$ – в плоскостях, параллельных координатной плоскости *yz*.

На рис. С2*а* даны размеры плиты, а жирным обозначены те точки, в которых к плите могут быть приложены силы, заданные в условиях задачи. Эти точки располагаются: на короткой стороне плиты в ее середине, на длинной стороне в точках, отстоящих от ближайшего угла плиты на расстояние *a*.

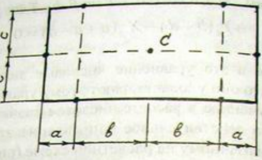
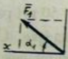
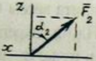
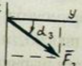


Рис. С2а

Определить реакции связей плиты в точках A, B и реакцию стержня KL, если $\gamma = 60^0$, $a = 0{,}2$ м, $b = 0{,}4$ м, $c = 0{,}3$ м.

Таблица С2

Номер условия	Силы							
								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
	Точка прилож.	α_1^0	Точка прилож.	α_2^0	Точка прилож.	α_3^0	Точка прилож.	α_4^0
0	D	60	-	-	E	20	-	-
1	-	-	H	70	-	-	D	30
2	E	30	-	-	-	-	H	40
3	-	-	D	50	H	30	-	-
4	H	20	-	-	E	60	-	-
5	-	-	E	30	-	-	H	70
6	D	40	-	-	-	-	E	60
7	-	-	H	20	D	30	-	-
8	E	30	-	-	H	50	-	-
9	-	-	D	40	-	-	E	30

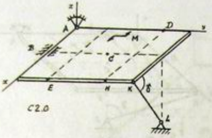


Рис. С2.0

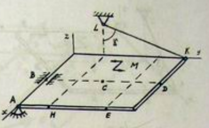


Рис. С2.1

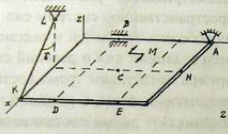


Рис. С2.2

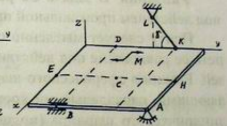


Рис. С2.3

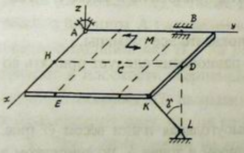


Рис. С2.4

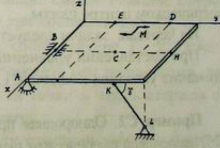


Рис. С2.5

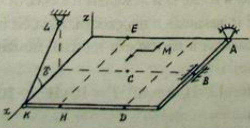


Рис. С2.6

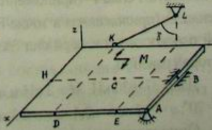


Рис. С2.7

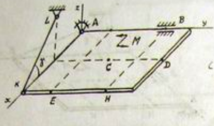


Рис. **C2.8**

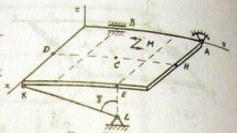


Рис. **C2.9**

Указания. В задаче С2 рассматривается равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил.

Плиту следует мысленно освободить от связей и рассмотреть ее равновесие под действием заданных сил и реакций связей. Реакцию сферического шарнира представим тремя составляющими, параллельными координатным осям, а реакцию цилиндрического шарнира (подшипника) – двумя составляющими, лежащими в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Сила тяжести $\overline{G}$ однородной плиты приложена в точке С – геометрическом центре плиты.

На чертеже задачи следует показать все размеры.

При составлении уравнений равновесия следует принять во внимание указания к задаче С1.

Пример С2. Однородная прямоугольная плита весом *G* (рис. С2б) закреплена сферическим шарниром в точке А, подшипником в точке В и невесомым стержнем *KL*, лежащим в плоскости *xz*. На плиту действуют сила $\overline{F}$ (приложенная в точке D и лежащая плоскости *xy*), сила $\overline{T}$ (приложенная в точке Е и лежащая в плоскости, параллельной плоскости *yz*) и пара сил (лежащая в плоскости плиты), момент которой равен *M*.

Дано: $G = 30$ кН, $M = 2$ кН·м, $F = 12$ кН, $\alpha = 40^\circ$, $T = 16$ кН, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 70^\circ$; $a = 0{,}2$ м, $b = 0{,}4$ м, $c = 0{,}3$ м.

Определить реакции опор в точках А, В и реакцию стержня KL.

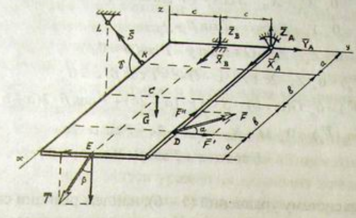


Рис. С2б

Решение 1. Рассмотрим равновесие плиты. Мысленно освободим ее от связей. Проведём координатные оси (рис. С2б) и изобразим действующие на плиту заданные силы $\bar{G}$, $\bar{F}$, $\bar{T}$, пара сил (ее момент M), а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира А разложим на три составляющие $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{Z}_A$, реакцию подшипника В – на две составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$, действующие в плоскости, перпендикулярной оси подшипника, реакцию $\bar{S}$ стержня KL направим из точки К вдоль стержня от плиты, предположив, что он растянут.

2. Для действующей на плиту пространственной системы сил можно составить шесть аналитических уравнений равновесия, из которых найти шесть неизвестных реакций. При вычислении моментов сил $\bar{F}$, $\bar{T}$, $\bar{S}$ относительно координатных осей разложим их на составляющие, параллельные этим осям (например, силу $\bar{F}$ разложим на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, где $F' = F \cdot \cos\alpha$, $F'' = F \cdot \sin\alpha$), и применим теорему Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx}=0,\ X_A+X_B-S\cos\gamma+F\sin\alpha=0, \tag{1}$$

$$\sum F_{ky}=0,\ Y_A+F\cos\alpha+T\sin\beta=0, \tag{2}$$

$$\sum F_{kz}=0,\ Z_A+Z_B-G+S\sin\gamma-T\cos\beta=0, \tag{3}$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k)=0,\ Z_A\cdot 2c+Z_B\cdot c-G\cdot c-T\cos\beta\cdot c=0, \tag{4}$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k)=0,\ G(a+b)-S\sin\gamma\cdot(a+2b)+T\cos\beta\cdot 2(a+b)=0, \tag{5}$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k)=0,\ M-X_B\cdot c-X_A\cdot 2c-F\sin\alpha\cdot 2c+ +F\cos\alpha\cdot a+T\sin\beta\cdot 2(a+b)=0. \tag{6}$$

Решив систему уравнений (1 – 6), найдем реакции связей.

Для проверки правильности полученных результатов составим какое-то другое уравнение равновесия, отличное от уравнений (1 – 6). Например, сумма моментов всех действующих на плиту сил относительно оси y_1 должна быть равна нулю:

$$\sum m_{y1}(\bar{F}_k)=0,\ (Z_A+Z_B)\cdot 2(a+b)-G\cdot(a+b)+S\sin\gamma\cdot a=0.$$

Подставив сюда значения величин, убеждаемся, что это равенство выполняется, т.е. решение задачи верное.

Ответ: $X_A = 13{,}84$ кН, $Y_A = -14{,}66$ кН, $Z_A = 36{,}05$ кН, $X_B = -8{,}43$ кН, $Z_B = -27{,}06$ кН, $S = 38{,}36$ кН.

Знак минус указывает, что действительные направления сил $\bar{Y}_A$, $\bar{X}_B$, $\bar{Z}_B$ противоположны тем, которые были приняты на расчетной схеме (рис. С2*б*).

КИНЕМАТИКА

Задача К1

Движение точки *M* на плоскости *xy* задано уравнениями: $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, где *x* и *y* выражены в сантиметрах, *t* – в секундах. Зависимость $x=f_1(t)$ указана непосредственно на рис. К1.0 – К1.9 (на этих рисунках условно показана часть траектории точки), а зависимость $y = f_2(t)$ дана в табл. К1 (для рис. 0 – 2 в столбце 2, для рис. 3 – 6 в столбце 3, для рис. 7 – 9 в столбце 4).

Найти уравнение траектории точки и изобразить ее на чертеже. Для момента времени $t_1 = 1$ с определить: 1) положение движущейся точки M на ее траектории (точка M_1); 2) скорость и ускорение точки; 3) касательное и нормальное ускорения точки; 4) радиус кривизны траектории в точке M_1.

Траекторию и все найденные величины изобразить на чертеже.

Указания. Задача К1 относится к теме «Кинематика точки». Заданные в условиях задачи уравнения движения точки являются параметрическими уравнениями её траектории – координаты точки определяются через параметр t. Чтобы найти уравнение траектории точки в виде $f(x,y) = 0$, нужно из заданных уравнений получить зависимость между x и y без участия параметра t. В некоторых вариантах при выполнении этой операции следует применить тригонометрические формулы:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Для определения искомых кинематических величин следует применять формулы, соответствующие координатному и естественному способам задания движения точки.

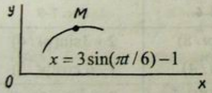


Рис. К1.0

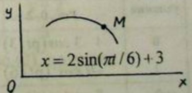


Рис. К1.1

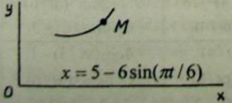


Рис. К1.2

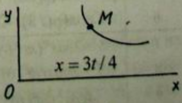


Рис. К1.3

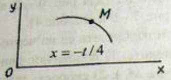


Рис. К1.4

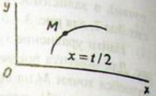


Рис. К1.5

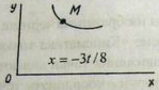


Рис. К1.6

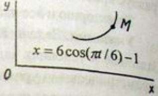


Рис. К1.7

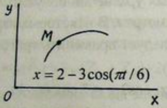


Рис. К1.8

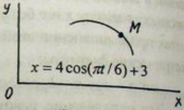


Рис. К1.9

Таблица К1

Номер условия	$y = f_2(t)$		
	Рис. 0–2	Рис. 3–6	Рис. 7–9
0	$4-3\cos(\mathrm{p}t/3)$	$1-\cos(\mathrm{p}t/8)$	$2+3\sin(\mathrm{p}t/6)$
1	$-9\cos^2(\mathrm{p}t/6)$	$6\sin(\mathrm{p}t/4)$	$1-6\cos(\mathrm{p}t/3)$
2	$8\cos(\mathrm{p}t/6)-1$	$2\cos(\mathrm{p}t/8)-1$	$9\sin^2(\pi t/6)-2$
3	$6\cos(\mathrm{p}t/3)-4$	$3-2\cos(\mathrm{p}t/4)$	$8\sin(\pi t/6)$
4	$2-6\cos^2(\mathrm{p}t/6)$	$2-4\sin(\mathrm{p}t/8)$	$3+2\cos(\pi t/3)$
5	$3\cos(\mathrm{p}t/6)$	$2\sin(\mathrm{p}t/4)-1$	$7-12\sin^2(\pi t/6)$
6	$9\cos(\mathrm{p}t/3)-2$	$5-6\cos(\mathrm{p}t/4)$	$6\sin(\pi t/6)-3$
7	$5-2\cos^2(\pi t/6)$	$12\sin(\mathrm{p}t/4)$	$4\cos(\pi t/3)-1$
8	$7-2\cos(\pi t/6)$	$1-4\cos(\mathrm{p}t/8)$	$5-6\sin^2(\pi t/6)$
9	$4\cos^2(\pi t/6)$	$\cos(\pi t/4)-2$	$3+2\sin(\pi t/6)$

Пример К1. Даны уравнения движения точки M на плоскости xy:

$$x = 4\sin\left(\frac{pt}{6}\right) - 1, \quad y = 3\cos\left(\frac{pt}{6}\right) + 2, \tag{1}$$

где координаты x, y – в сантиметрах, время t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки. Определить вид кривой (парабола, эллипс и т.п.) и изобразить траекторию на чертеже.

Для момента времени $t_1 = 2$с найти: 1) положение точки на траектории; 2) скорость и ускорение точки; 3) касательное и нормальное ускорения точки и радиус кривизны траектории. Найденные величины изобразить на чертеже.

Решение 1. Чтобы получить уравнение траектории в виде $f(x,y) = 0$, из системы уравнений (1) необходимо исключить время t. Поскольку в выражениях (1) параметр t входит в аргументы тригонометрических функций и эти аргументы одинаковы, то используем формулу:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ или, считая } \alpha = \frac{\pi t}{6},$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 1. \tag{2}$$

Из уравнений (1) находим:

$$\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{x+1}{4}; \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = \frac{y-2}{3}.$$

Подставив эти выражения в равенство (2), получим

$$\left(\frac{x+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1. \tag{3}$$

Уравнение (3) является уравнением эллипса, центр С которого имеет координаты (-1, 2), а размеры полуосей, параллельных осям x и y, равны соответственно 4 и 3 см (рис. К1*а*).

В момент времени $t_1 = 2$ с движущаяся точка М займет на траектории положение M_1; ее координаты находим по уравнениям (1): $x_1 = 2{,}46$ см, $y_1 = 3{,}5$ см и изображаем точку M_1 на рисунке.

Заметим, что далее значения всех величин в момент времени t_1 будут обозначаться с индексом 1.

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$\overline{V} = V_x\overline{i} + V_y\overline{j},$$

где $V_x = \dot{x} = \frac{2p}{3}\cos\left(\frac{pt}{6}\right)$; $\quad V_y = \dot{y} = -\frac{p}{2}\sin\left(\frac{pt}{6}\right)$.

Подставив эти выражения в формулу

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \tag{4}$$

получим выражение для модуля скорости точки

$$V = \frac{p}{6}\sqrt{9 + 7\cos^2\left(\frac{pt}{6}\right)}.$$

При $t_1 = 2$ с получим: $V_{1x} = 1{,}05$ см/с, $V_{1y} = -1{,}36$ см/с, $V_1 = 1{,}72$ см/с.

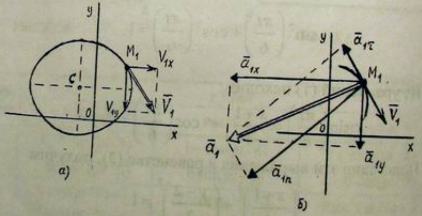


Рис. К1

Используя полученные результаты, строим вектор $\overline{V}_1$. Для этого на рис. К1*а* из точки M_1 откладываем в выбранном масштабе значения проекций V_{1x} и V_{1y}. По этим проекциям определяем вектор $\overline{V}_1$, который должен быть направлен из M_1 по касательной к траектории точки.

3. Аналогично находим ускорение точки:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j},$$

где

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{x} = -\frac{\pi^2}{9}\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right),\ a_y = \dot{V}_y = \ddot{y} = -\frac{\pi^2}{12}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right),\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

При $t_1 = 2$ с получим $a_{1x} = -0{,}95$ см/с^2, $a_{1y} = 0{,}41$ см/с^2, $a_1 = 1{,}02$ см/с^2. По этим результатам, выбрав удобный для построения масштаб, показываем вектор $\overline{a}_1$ (рис. К1б).

4. Определим составляющие вектора $\overline{a}_1$, направленные вдоль осей естественного трехгранника, т.е. касательное и нормальное ускорения точки.

Дифференцируя по времени выражение (4), получим

$$\dot{V} = (2V_x\dot{V}_x + 2V_y\dot{V}_y)/2V.$$

Учитывая, что $\dot{V}_x = a_x$, $\dot{V}_y = a_y$, получим

$$\dot{V} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}. \qquad (5)$$

Величина $\dot{V}$, определяемая по этой формуле, является проекцией ускорения $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{V}$, т.е. a_V. Если знак a_V положителен – движение ускоренное, если знак a_V отрицателен – движение замедленное. При разложении вектора $\overline{a}$ на составляющие по осям естественного трехгранника $\overline{a}_\tau = \overline{a}_V$.

Подставив в (5) числовые значения всех величин при $t_1 = 2$ с, получим $\dot{V}_1 = a_{V1} = a_{1\tau} = -0{,}26$ см/с^2. Знак минус показывает, что вектор $\overline{a}_{1\tau}$ направлен противоположно вектору $\overline{V}_1$ – значит движение точки замедленное.

Нормальное ускорение точки при известных значениях величин a и a_τ определим по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Подставив сюда значения a_1 и $a_{1\tau}$ получим $a_{1n} = 0{,}98$ см/с^2.

Изобразим на рис. К1*б* составляющие $\overline{a}_{1\tau}$ и $\overline{a}_{1n}$, которые найдем путем разложения ранее определенного вектора $\overline{a}_1$ на направления касательной (прямая, на которой расположен вектор $\overline{V}_1$) и главной нормали (перпендикуляр к вектору $\overline{V}_1$ в сторону вогнутости траектории). Результаты геометрического разложения вектора $\overline{a}_1$ на составляющие $\overline{a}_{1x}$ и $\overline{a}_{1y}$ и составляющие $\overline{a}_{1\tau}$, $\overline{a}_{1n}$ должны соответствовать числовым расчетам этих величин.

5. Радиус кривизны траектории в точке M_1 определяем по формуле

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{1{,}72^2}{0{,}98} = 3\,\text{см}.$$

Ответ: $V_1 = 1{,}72$ см/с, $a_1 = 1{,}02$ см/с^2, $a_{1\tau} = -\ 0{,}26$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}98$ см/с^2, $\rho_1 = 3$ см.

Задача К2

Механизм, совершающий движение в плоскости чертежа (рис. К2.0 – К2.9), состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами шарнирами. Длины стержней: $l_1 = 0{,}2$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}6$ м, $l_4 = 0{,}8$ м. Положение механизма определено углами б, в, г, θ, φ, которые вместе с другими величинами заданы в табл. К2. Точки D и К на всех рисунках расположены в середине соответствующего стержня.

При решении задачи полагать, что стержень 1 (или 4), угловая скорость которого задана, вращается против хода часовой стрелки, а скорость $\overline{V}_B$ направлена от точки В к точке *b*.

Определить для заданного положения механизма скорости точек А, В, D, Е, К и угловые скорости всех стержней. Найти ускорение точки А, если стержень 1 имеет в данный момент времени угловое ускорение $\varepsilon_1 = 4$ с$^{-2}$ и замедленное вращение стержня.

Все векторные величины показать на чертеже.

Таблица К2

Номер условия	Углы					Дано		
	α	β	γ	θ^0	φ^0	ω_1 1/с	ω_4 1/с	V_B м/с
0	0	60	30	120	0	2	-	-
1	60	150	120	30	90	-	4	-
2	30	120	30	60	0	-	-	8
3	90	150	120	30	90	3	-	-
4	30	120	120	60	0	-	5	-
5	90	120	60	60	90	-	-	10
6	0	120	120	60	0	4	-	-
7	30	150	120	60	0	-	3	-
8	60	60	60	120	90	-	-	6
9	0	150	30	60	0	5	-	-

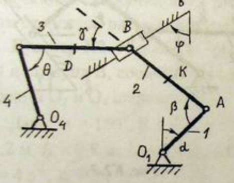


Рис. К2.0

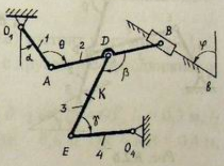


Рис. К2.1

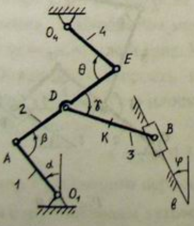


Рис. К2.2

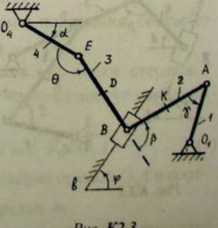


Рис. К2.3

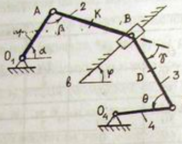


Рис. K2.4

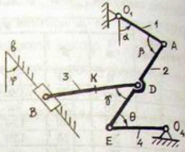


Рис. K2.5

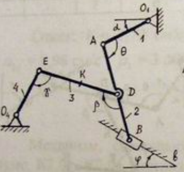


Рис. K2.6

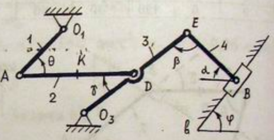


Рис. K2.7

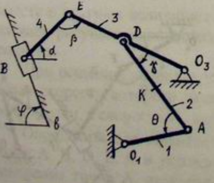


Рис. K2.8

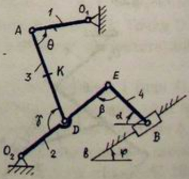


Рис. K2.9

Указания. В задаче К2 рассматривается механизм, звенья которого совершают разные движения: поступательное, вращение вокруг неподвижной оси и плоскопараллельное.

Для решения задачи нужно изобразить механизм в том положении, которое определяется заданными в данном варианте углами б, в, г, θ, φ. Построение следует начинать со стержня, положение которого определяется углом б. Дуговые стрелки на рисунках показывают, как должны откладываться соответствующие углы, т.е. по ходу или против хода часовой стрелки.

Для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться либо теоремой о проекциях скоростей двух точек тела, либо мгновенным центром скоростей рассматриваемого тела.

Пример К2. Механизм (рис. К2*а*) состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_4 шарнирами.

Дано: $\alpha = 150^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 90^0$, $\theta = 30^0$, $\varphi = 60^0$, $l_1 = 0{,}3$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 0{,}8$ м, $l_4 = 0{,}4$ м, AD = BE = 0,6 м, DK = KB = 0,4 м, $\omega_1 = 4\ c^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7\ c^{-2}$.

Определить: скорость точек A, B, D, E, K; угловые скорости стержней 2, 3, 4; ускорение точки А.

Решение. 1. Изобразим механизм в положении, соответствующем заданным углам (рис. К2*б*).

2. Определяем скорость точки А как точки стержня 1. Стержень 1 вращается в плоскости чертежа вокруг неподвижной оси O_1, поэтому

$$V_A = \omega_1\, l_1 = 4\ 0{,}3 = 1{,}2 \text{ м/с}; \ \overline{V_A} \perp \overline{O_1 A}. \qquad (1)$$

Вектор $\overline{V_A}$ проводим перпендикулярно прямой O_1A в соответствии с направлением дуговой стрелки ω_1.

3. Стержень 2 совершает плоскопараллельное движение. Скорость точки А, принадлежащей одновременно стержням 1 и

2, нами определена. Так как точка Е принадлежит не только стержню 2, но и стержню 4, вращающемуся вокруг оси O_4, то скорость точки Е будет направлена перпендикулярно прямой O_4E. ***см. Примечание.*

Зная скорость точки А (вектор $\overline{V}_A$) и направление прямой, вдоль которой будет направлена скорость $\overline{V}_E$, можно воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки. Предварительно, учитывая, что проекции скоростей точек А и Е (точки стержня 2) на ось ЕА должны иметь одинаковые знаки, устанавливаем направление вектора $\overline{V}_E$. Равенство проекций скоростей $\overline{V}_A$, $\overline{V}_E$ на ось ЕА дает зависимость:

$V_A \cos 30^0 = V_E \cos 60^0$; отсюда V_E=1,2 · 0,866 / 0,5 = 2,08 м/с. (2)

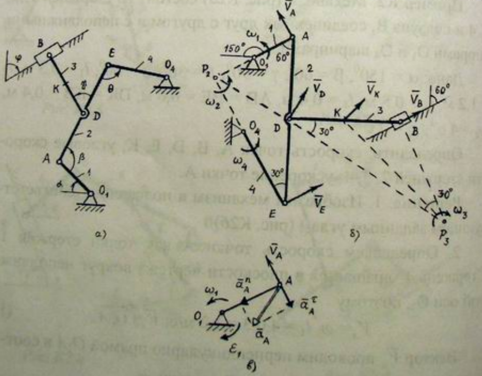


Рис. К2

Угловая скорость стержня 4, вращающегося вокруг оси O_4, равна:

$$\omega_4 = V_E / EO_4 = 2{,}08 / 0{,}4 = 5{,}2 \text{ c}^{-1}. \qquad (3)$$

Приняв во внимание направление скорости $\overline{V}_E$, определим, что стержень 4 вращается против хода часовой стрелки (в соответствии с этим показываем на рис. К2*б* дуговую стрелку ω_4).

Для определения скорости точки D стержня 2 найдем положение мгновенного центра скоростей (МЦС) этого тела: из точек A и E проводим прямые, перпендикулярные векторам $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_E$. Точка пересечения этих прямых (точка P_2) будет МЦС стержня 2.

Зная скорость $\overline{V}_A$ и определив расстояние AP_2 (из Δ AEP_2 получим $AP_2 = AE \sin 30^0 = 0{,}6$ м), находим угловую скорость ω_2 стержня 2:

$$\omega_2 = V_A / AP_2 = 1{,}2 / 0{,}6 = 2 \text{c}^{-1}. \qquad (4)$$

Сопоставив направление вектора $\overline{V}_A$ и положение точки P_2, определим, что стержень 2 вращается против хода часовой стрелки ;на рис. К2*б* показываем дуговую стрелку угловой скорости ω_2.

Скорость точки D равна:

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2 . \qquad (5)$$

Треугольник ADP_2 равносторонний, поэтому $DP_2 = AP_2 = 0{,}6$ м и тогда:

$$V_D = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \text{ м/с}; \quad \overline{V}_D \perp \overline{P_2D}.$$

*Примечание. Определение скоростей точек стержня 2 можно произвести и другим способом. После операций, выполненных до пункта расчета, обозначенного **, можно определить положение МЦС стержня 2 , т.е. точку P_2, затем найти угловую скорость* $\omega_2 = V_A / AP_2 = 1{,}2 / 0{,}6 = 2 \text{ c}^{-1}$ *и далее вычислить скорости точек стержня 2:*

$$V_D = \omega_2 \cdot DP_2, \quad V_E = \omega_2 \cdot EP_2.$$

4. Стержень 3 совершает плоскопараллельное движение. Найдем точку P_3 – МЦС этого стержня: проводим через точку D прямую, перпендикулярную $\overline{V}_D$, а через точку B прямую, перпендикулярную

направляющим ползуна В. Точка пересечения этих прямых – точка P_3. Из рис. К2*б* видно, что в Δ DBP_3 углы $\angle BDP_3 = \angle BP_3D = 30^0$; тогда $BP_3 = BD = l_3 = 0{,}8$ м, $DP_3 = = 2l_3 \cdot \cos 30^0 = 1{,}384$ м.

Находим ω_3 – угловую скорость стержня 3:

$$\omega_3 = V_D / DP_3 = 1{,}2 / 1{,}384 = 0{,}87 \text{ с}^{-1}. \qquad (6)$$

Вращается стержень 3 по ходу часовой стрелки (на рис. К2*б* показываем дуговую стрелку угловой скорости ω_3).

Теперь определяем скорость точки В:

$$V_B = \omega_3 \cdot BP_3 = 0{,}87 \cdot 0{,}8 = 0{,}69 \text{ м/с}, \ \overline{V_B} \perp \overline{P_3B}. \qquad (7)$$

Для вычисления скорости точки К находим расстояние KP_3 по теореме косинусов из Δ KBP_3:

$$KP_3 = \sqrt{(BP_3)^2 + (KB)^2 - 2 \cdot BP_3 \cdot KB \cdot cos120^0} = 1{,}06 \text{ м}.$$

Определяем модуль и направление скорости точки К:

$$V_K = \omega_3 \cdot KP_3 = 0{,}87 \cdot 1{,}06 = 0{,}92 \text{ м/с}, \ \overline{V_K} \perp \overline{P_3K}. \qquad (8)$$

5. Определяем ускорение точки А как точки стержня 1, вращающегося замедленно вокруг оси O_1 с угловой скоростью ω_1, направленной против хода часовой стрелки, и угловым ускорением ε_1, направленным по ходу часовой стрелки (рис. К2*в*).

Находим касательное и нормальное ускорения точки А:

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 2{,}1 \text{ м/с}^2, \qquad a_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1 = 4{,}8 \text{ м/с}^2.$$

Вычисляем модуль ускорения точки А

$$a_A = \sqrt{(a_A^\tau)^2 + (a_A^n)^2} = 5{,}24 \text{ м/с}^2.$$

На рис. К2*в* показываем векторы: $\overline{a}_A^\tau$ (направлен перпендикулярно O_1A в соответствии с направлением дуговой стрелки ε_1), $\overline{a}_A^n$ (направлен от точки А к оси вращения O_1) и вектор $\overline{a}_A$, равный сумме векторов $\overline{a}_A = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n$.

Ответ: $V_A = 1{,}2$ м/с, $V_E = 2{,}08$ м/с, $V_D = 1{,}2$ м/с, $V_B = 0{,}69$ м/с, $V_K = 0{,}92$ м/с; $\omega_2 = 2$ с$^{-1}$, $\omega_3 = 0{,}87$ с$^{-1}$, $\omega_4 = 5{,}2$ с$^{-1}$; $a_A = 5{,}24$ м/с^2.

Задача К3

Круглая пластина радиусом R = 60 см (рис. К3.0 – К3.9) вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω, заданной в табл. К3 (при положительном знаке ω направление вращения соответствует показанному на рисунке дуговой стрелкой, при знаке минус – противоположно). На рис. 0, 2, 4, 6, 8 ось вращения перпендикулярна плоскости пластинки и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. 1, 3, 5, 7, 8 ось вращения BD расположена в плоскости пластины.

По ободу пластины (окружности радиуса R) движется точка M; закон ее относительного движения, т.е. зависимость $s = A\breve{M} = f(t)$ (s – дуговая координата в сантиметрах, t – в секундах). На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s > 0$ (при $s < 0$ положение точки M находим, откладывая размер $|s|$ от точки A в направлении, противоположном показанному на рисунке задания).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с.

Указания. В задаче К3 рассматривается сложное движение точки. Абсолютное движение точки представим как результат двух одновременных движений: относительного движения по пластине и переносного вместе с вращающейся пластиной. Прежде чем производить расчеты, следует найти положение точки M на пластине в момент времени t_1 (точка M_1) и показать его на чертеже (при относительном движении точки по дуге окружности удобно для заданного момента времени определить центральный угол между радиусами CA и CM_1, равный s_1 / R.

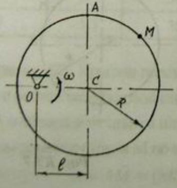


Рис. ***К3.0***

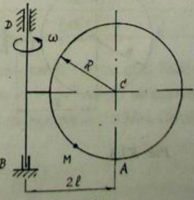


Рис. ***К3.1***

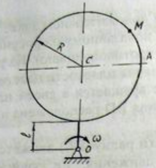


Рис. К3.2

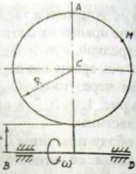


Рис. К3.3

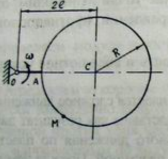


Рис. К3.4

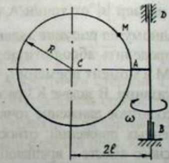


Рис. К3.5

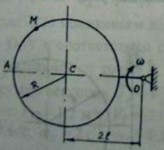


Рис. К3.6

Рис. К3.7

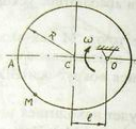


Рис. К3.8

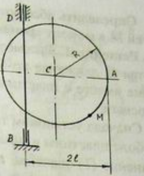


Рис. К3.9

Таблица К3

Номер условия	ω, 1/с	l, см	$s = A\breve{M} = f(t)$
0	–2	30	$(\pi R/6)(3t - t^2)$
1	2,5	35	$(3\pi R/4)(2t^2 - 1)$
2	–3	40	$(2\pi R/3)(t^4 - 3t^2)$
3	3,5	45	$(\pi R/4)(2t^3 + t^2)$
4	–4	50	$(\pi R/3)(3t^2 - t)$
5	3	60	$(\pi R/6)(t - 5t^2)$
6	–2,5	30	$(3\pi R/4)(t^2 + 2)$
7	2	45	$(2\pi R/3)(2t^2 - t^3)$
8	4	50	$(\pi R/4)(t - 2t^3)$
9	–3,5	35	$(\pi R/3)(t + t^2)$

Пример К3. Круглая пластина радиусом $R = 40$ см (рис. К3*а*) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = -2$ с$^{-1}$ вокруг неподвижной оси BD, отстоящей от центра пластины на расстояние $l = 3R/4$. По ободу пластины движется точка М по закону:

$$s = A\breve{M} = (\pi R/6)(7t - 2t^2), \qquad (1)$$

где s – в сантиметрах, t – в секундах.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение 1. Рассмотрим движение точки М как сложное, считая ее движение по ободу пластины относительным, а движение вместе с пластиной, вращающейся вокруг оси BD - переносным.

Сначала установим то место, где будет находиться точка М на ободе пластины в момент времени t_1 (точка M_1). Подставив в уравнение (1) значение $t_1 = 1$ с, получим $s_1 = (5/6)\pi R$. Значит, $\angle ACM_1 = s_1/R = (5/6)\pi = 150^0$. На рис. К3 *а,б* изображаем точку M_1, откладывая дугу s_1 (или $\angle ACM_1$) в направлении положительного отсчета координаты s.

Так как по условию задачи угловая скорость пластины постоянна, то в момент времени $t_1=1$ с $\omega_1 = \omega = -2$ с. Отрицательный знак ω_1 означает, что в момент времени $t_1=1$ с пластина вращается в противоположном, направлении, указанном дуговой стрелкой ω. На рис. К3*а* и К3*б* действительное направление вращения показано дуговой стрелкой ω_1, вектор $\overline{\omega}_1$ расположен на оси вращения и направлен от точки D к точке B.

Через точку M_1 проведем координатные оси x, y, z, связанные с телом пластины (ось x перпендикулярна плоскости пластины, ось y расположена в плоскости пластины и направлена перпендикулярно оси вращения, ось z параллельна оси вращения).

2. Абсолютная скорость точки равна сумме относительной и переносной скоростей:

$$\overline{V} = \overline{V}_r + \overline{V}_e. \tag{2}$$

Определяем относительную скорость

$$V_r = \dot{s} = (\text{p}R/6)(7-4t). \tag{3}$$

При $t_1 = 1$ с получим $V_r = \pi R/2$ =62,8 см/с; положительный знак этой величины указывает, что вектор $\overline{V}_r$ направлен из точки M_1 по касательной к ободу пластины в направлении положительного отсчета координаты s (рис. К3*б*).

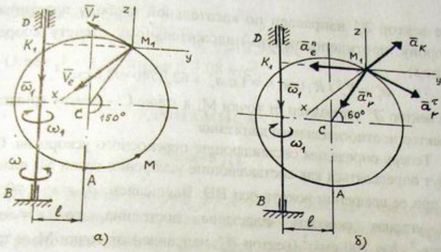


Рис. К3

Переносная скорость точки М в момент времени t_1 равна скорости точки M_1 пластины при ее вращении вокруг оси BD:

$$V_e = |\omega_1| \cdot h_1, \tag{4}$$

где $h_1 = M_1K_1$ – расстояние от точки M_1 до оси вращения $M_1K_1 = l + R\sin30^0 = 0{,}75R + 0{,}5R = 1{,}25R = 50$ см.

Подставив в формулу (4) числовые значения величин, получим $V_e = 100$ см/с, вектор $\overline{V}_e$ направлен перпендикулярно плоскости пластины (вдоль оси x) в соответствии с направлением угловой скорости ω_1.

Абсолютную скорость точки М находим согласно векторному равенству (2). Поскольку в рассматриваемом случае векторы $\overline{V}_r$ и $\overline{V}_e$ взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости точки равен:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = 118{,}08 \text{ см/с} = 1{,}18 \text{ м/с}.$$

3. Абсолютное ускорение точки определим по формуле:

$$\overline{a} = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_к. \tag{5}$$

Сначала найдем составляющие $\overline{a}_r^\tau$ и $\overline{a}_r^n$ относительного ускорения точки:

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = \ddot{s} = -2\text{p}R/3 = -83{,}73 \text{ см/с}^2,$$

где вектор $\overline{a}_r^\tau$ направлен по касательной к ободу пластины в сторону, противоположную положительному отсчету координаты s;

$$a_r^n = V_r^2 / R, \text{ при } t_1 = 1 \text{ с } a_r^n = 62{,}8^2/40 = 98{,}6 \text{ см/с}^2,$$

где вектор $\overline{a}_r^n$ направлен от точки M_1 к точке C – центру кривизны траектории относительного движения.

Теперь определим составляющие переносного ускорения. Они будут определяться как составляющие ускорения точки M_1 пластины при ее вращении вокруг оси BD. Вычисляем: $a_e^\tau = \varepsilon \cdot h_1 = 0$, так как угловая скорость пластины постоянна, то $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$; $a_e^n = \omega_1^2 \cdot h_1 = 200$ см/с^2 (вектор $\overline{a}_e^n$ направлен от точки M_1 к точке K_1, т.е. к оси вращения пластины).

Определим кориолисово ускорение. Его модуль находим по формуле

$$a_\kappa = 2|\omega_1| \cdot |V_r| \cdot \sin \text{в}, \tag{6}$$

где β – угол между векторами $\overline{V}_r$ и $\overline{\omega}_1$; в нашем случае β = 120^0. Подставив в формулу (6) значения величин, получим $a_\kappa = 217{,}54$ см/с^2.

Направление вектора $\overline{a}_\kappa$ найдем по ***правилу Жуковского***: спроецируем вектор $\overline{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения пластины (эта проекция будет направлена так же, как и вектор $\overline{a}_e^n$), а затем повернем эту проекцию в плоскости M_1xy в сторону переносного вращения (т.е. по направлению дуговой стрелки ω_1) на 90^0. Таким образом получим направление вектора $\overline{a}_\kappa$ (он направлен из точки M_1 по оси x противоположно вектору $\overline{V}_e$ (рис. К3*б*).

Для определения модуля абсолютного ускорения точки спроецируем векторное равенство (5) на координатные оси x, y, z:

$$a_x = -a_\kappa = -217{,}54 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = |a_r^\tau| \cos 30^0 - a_r^n \cos 60^0 - a_e^n = 176{,}8 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = -|a_r^\tau| \sin 30^0 - a_r^n \sin 60^0 = -127{,}25 \text{ см/с}^2.$$

Отсюда находим:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 307{,}9 \text{ см/с}^2 = 3{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $V = 1{,}18$ м/с; $a = 3{,}08$ м/с^2.

ДИНАМИКА

Задача Д1

Груз D массой m (рис. Д1.0–Д1.9, табл. Д1), получив в точке А начальную скорость $\overline{V}_0$, движется в изогнутой трубе АВС, расположенной в вертикальной плоскости. На участке АВ, длина которого l, на груз действуют постоянная сила $\overline{T}$ (ее направление показано на рисунках) и сила $\overline{R}$ сопротивления среды (модуль этой силы $R = \mu V^2$, вектор $\overline{R}$ направлен противоположно скорости $\overline{V}$ груза).

Груз, закончив движение на участке АВ, в точке В трубы, не изменяя значение модуля своей скорости, переходит на участок ВС. На участке ВС на груз действует переменная сила $\overline{F}$, проекция F_x которой на ось x задана в табл. Д1.

Считая груз материальной точкой, найти закон его движения на участке ВС, т.е. $x = f(t)$, где x = BD. Трением груза о трубу пренебречь.

Указания. Задача Д 1 на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи сводится к составлению и интегрированию дифференциальных уравнений движения точки.

Для составления дифференциального уравнения движения груза на участке АВ следует направить координатную ось Az вдоль оси трубы в сторону движения груза и записать дифференциальное уравнение движения точки в проекциях на ось z :

$$m\ddot{z} = \Sigma F_{kz}. \qquad (1)$$

Отметим, что в общем случае входящие в правую часть уравнения (1) силы могут зависеть от времени t, от положения точки, т.е. от z, и от скорости, т.е. от $V_z = \dot{z}$.

В зависимости от конкретных условий рассматриваемой задачи проекция ускорения может быть выражена либо через производную скорости по времени

$$\ddot{z} = \frac{dV_z}{dt}, \tag{а}$$

либо через производную скорости по координате

$$\ddot{z} = \frac{dV_z}{dz}\frac{dz}{dt} = V_z\frac{dV_z}{dz}. \tag{б}$$

Так как по условию задачи Д1 известна длина l участка АВ, то для определения скорости груза в точке В (точке окончания движения на участке АВ и начала движения на участке ВС) целесообразно при составлении дифференциального уравнения (1) выразить $\ddot{z}$ по формуле (б).

Проинтегрировав дифференциальное уравнение движения груза, учтя начальные условия, следует определить скорость груза в точке В.

После этого нужно перейти к рассмотрению движения груза на участке ВС. Ось Вх следует направить вдоль ВС. При исследовании движения груза на участке ВС будем считать ,что в момент времени, когда груз находится в сечении В, $t_0 = 0$. При записи начальных условий движения груза на участке ВС следует учесть, что модуль его начальной скорости на участке ВС равен модулю его конечной скорости на участке АВ.

Дифференциальное уравнение движения груза

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx}, \tag{2}$$

где правая часть является функцией времени t, с математической точки зрения представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка.

Решение такого уравнения целесообразно выполнить методом понижения порядка.

Сначала, введя функцию $V_x = \dot{x}$, преобразуем уравнение (2) в уравнение первого порядка относительно V_x:

$$m\frac{dV_x}{dt} = \Sigma F_{kx}.$$

Проинтегрировав его, находим $V_x = f(t)$. После этого, проинтегрировав уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = V_x,$$

находим $x = f(t)$.

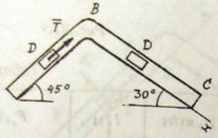


Рис. Д1.0

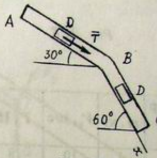


Рис. Д1.1

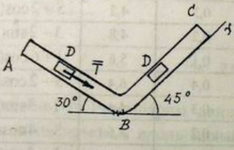


Рис. Д1.2

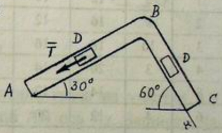


Рис. Д1.3

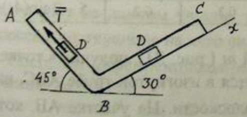


Рис. Д1.4

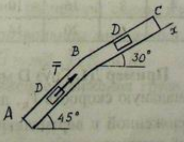


Рис. Д1.5

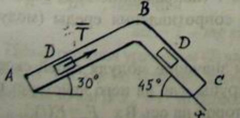


Рис. Д1.6

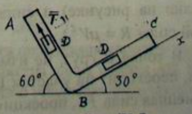


Рис. Д1.7

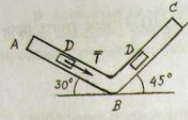


Рис. Д1.8

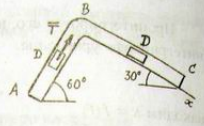


Рис. Д1.9

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	V_0, м/с	T, Н	μ, кг/м	l, м	F_x, Н
0	4	10	18	0,4	3,6	$2+3\sin(6t)$
1	5	12	10	0,3	4,2	$5-2\cos(4t)$
2	8	16	12	0,2	4,8	$3-2\sin(2t)$
3	10	18	16	0,1	5,6	$1+6\cos(3t)$
4	3	20	14	0,4	6,4	$3-2\cos(2t)$
5	6	14	12	0,3	4,4	$1+3\sin(3t)$
6	4	12	20	0,2	3,6	$3-4\cos(6t)$
7	5	10	14	0,1	4,2	$5+2\sin(4t)$
8	8	16	10	0,4	5,6	$3+6\cos(3t)$
9	6	20	14	0,3	6,2	$5-2\sin(4t)$

Пример Д1. Груз D массой m (рис. Д1), получив в точке A начальную скорость $\overline{V}_0$, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости. На участке AB, который наклонен к горизонту под углом α и длина которого l, на груз действуют постоянная сила $\overline{T}$ (направление этой силы показано на рисунке) и сила $\overline{R}$ сопротивления среды (модуль этой силы $R=\mu V^2$).

В точке B груз, не изменяя значение модуля своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него действует переменная сила $\overline{F}$, проекция которой на ось Bx $F_x = F(t)$.

Определить закон движения груза на участке BC, т.е. $x = f(t)$, где $x = \text{BD}$.

Дано: $m = 2$ кг, $\mu = 0{,}5$ кг/м, $T = 30$ Н, $V_0 = 10$ м/с, $l = 4$ м, $\alpha = 45^0$, $в = 30^0$, $F_x = -8\sin(4t)$ Н. Груз принять за материальную точку.

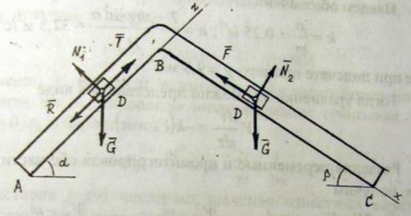


Рис. Д1

Решение 1. Рассмотрим движение груза на участке AB. Проведем из точки A вдоль прямой AB ось Az. Запишем начальные условия движения, когда груз находился в сечении A трубы $z_0 = 0$ $V_{0z} = V_0$. Для составления расчетной схемы изобразим груз на данном участке в произвольном положении и покажем действующие на него силы: $\overline{G} = m\overline{g}$, $\overline{T}, \overline{N}_1$ и $\overline{R}$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Az:

$$m\ddot{z} = \Sigma F_{kz} \text{ или } m\ddot{z} = G_z + T_z + N_{1z} + R_z. \tag{1}$$

Подставив в (1) значения $G_z = -mg\sin\alpha$, $T_z = T$, $N_{1z} = 0$, $R_z = -R = -\mu V^2$, получим

$$m\ddot{z} = T - mg\sin\alpha - \mu V^2. \tag{2}$$

Целью решения уравнения (2) является определение скорости груза в точке B. Так как по условию задачи известна длина участка AB, т.е. координата точки B $z_B = l$, то целесообразно ускорение точки представить в зависимости от координаты z

$$\ddot{z} = \frac{dV_z}{dt} = V_z \frac{dV_z}{dz}.$$

Тогда, учтя еще, что $V_z = V$, получим:

$$mV\frac{dV}{dz} = T - mg\sin\alpha - \mu V^2 \text{ или } V\frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{T - mg\sin\alpha}{\mu} - V^2\right). \quad (3)$$

Введем обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}25 \text{ м}^{-1},\ n = \frac{T - mg\sin\alpha}{\mu} = 32{,}3 \text{ м}^2/\text{с}^2, \quad (4)$$

где при подсчете принято $g = 9{,}8$ м/с^2.

Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$V\frac{dV}{dz} = -k\left(V^2 - n\right). \quad (5)$$

Разделив переменные и проинтегрировав обе части уравнения, получим

$$\int_{V_0}^{V_B} \frac{2V \cdot dV}{V^2 - n} = -2k\int_0^l dz,\ \ln\frac{\left|V_B^2 - n\right|}{\left|V_0^2 - n\right|} = -2kl \text{ и } \frac{\left|V_B^2 - n\right|}{\left|V_0^2 - n\right|} = e^{-2kl}.$$

В результате находим:

$V_B^2 = n + (V_0^2 - n)e^{-2kl} = 32{,}3 + [(10^2 - 32{,}3)/7{,}39] = 41{,}46$ м^2/с^2 и $V_B = 6{,}44$ м/с.

2. Рассмотрим движение груза на участке ВС. Проведем из точки В вдоль прямой ВС ось Bx . Полагаем ,что в момент времени, когда груз находился в сечении В, $t_0 = 0$. Начальные условия движения груза на этом участке таковы: $x_0 = 0$, $V_{0x} = V_B$.

Изобразим груз на участке ВС в произвольном положении и покажем действующие на него силы: $\overline{G} = m\overline{g}$, $\overline{N}_2$ и $\overline{F}$.

Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = G_x + N_{2x} + F_x. \quad (6)$$

Так как $G_x = mg\sin\text{в}$, $N_{2x} = 0$, $F_x = -8\sin(4t)$, то уравнение (6) примет вид

$$m\ddot{x} = mg\sin\text{в} - 8\sin(4t). \quad (7)$$

Выразив $\dot{x} = \dfrac{dV}{dt}$ и далее, умножив обе части уравнения (7) на dt и разделив на m, получим

$$dV = g\sin\text{в}\cdot dt - \frac{8}{m}\sin(4t)\cdot dt.$$

Проинтегрировав это уравнение, учтя, что при $t_0 = 0$ $V_0 = V_B$, получим

$$V = V_B + gt\sin\text{в} - \frac{2}{m}[1-\cos(4t)]. \qquad (8)$$

Заменим V на dx/dt и умножим обе части полученного выражения на dt. Выполнив интегрирование (учитывая, что при $t_0 = 0$ $x_0 = 0$), получим

$$x = V_B t + \frac{gt^2}{2}\sin\text{в} - \frac{2t}{m} + \frac{1}{2m}\sin(4t). \qquad (9)$$

Подставив в (9) числовые значения известных величин, найдем закон движения груза на участке BC:

$$x = 5{,}44t + 2{,}45t^2 + 0{,}25\sin(4t), \qquad (10)$$

где x – в метрах, t – в секундах.

Задача Д2

Механическая система (рис. Д2.0–Д2.9, табл. Д2) состоит из грузов 1 и 2, цилиндрического катка 3, двухступенчатых шкивов 4 и 5. Тела системы соединены нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Каток (сплошной однородный цилиндр) катится по опорной плоскости без скольжения. Радиусы ступеней шкивов 4 и 5 равны соответственно $R_4 = 0{,}3$ м, $r_4 = 0{,}1$ м и $R_5 = 0{,}2$ м, $r_5 = 0{,}1$ м. Массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу. Опорные плоскости грузов 1 и 2 – шероховатые, коэффициент трения скольжения для каждого груза $f = 0{,}1$.

Под действием силы $\overline{F}$, модуль которой изменяется по закону $F = F(s)$, где s – перемещение точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на один из шкивов (либо на шкив 4, либо на шкив 5) действуют силы сопротивления, момент которых относительно оси вращения постоянный и равен соответственно M_4 или M_5.

Определить значение искомой величины, указанной в столбце «Найти» табл. Д2, в тот момент времени, когда перемещение s точки приложения силы $\overline{F}$ станет равным s_1=1,2 м. В столбце «Найти» табл. Д2 обозначено: V_1 – скорость груза 1; V_{C3} – скорость центра масс катка 3; ω_4 – угловая скорость тела 4 и т.д.

Указания. Для решения задачи Д2 следует применить теорему об изменении кинетической энергии механической системы. При определении кинетической энергии системы учесть, что она равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел. При вычислении кинетической энергии катка, движущегося плоскопараллельно, для установления зависимости между угловой скоростью катка и скоростью его центра масс надо воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей. Кинетическую энергию механической системы следует выразить через ту скорость, которую в задаче надо определить. При определении работы действующих на систему сил следует перемещения точек приложения всех сил выразить через заданное перемещение s_1, учтя, что зависимость между перемещениями будет такой же, как между соответствующими скоростями.

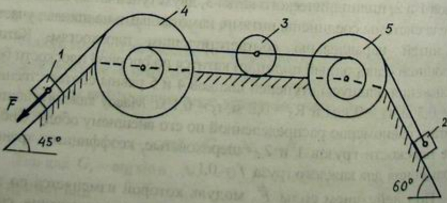


Рис. Д2.0

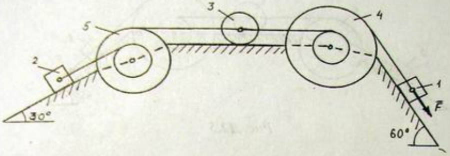


Рис. Д2.1

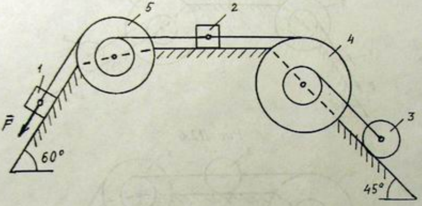


Рис. Д2.2

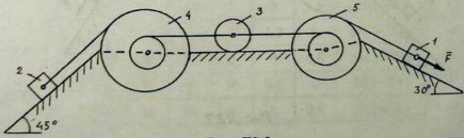


Рис. Д2.3

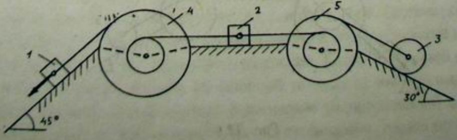


Рис. Д2.4

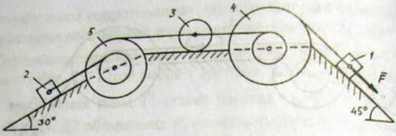


Рис. Д2.5

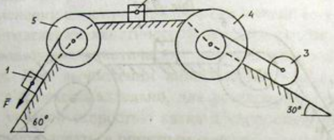


Рис. Д2.6

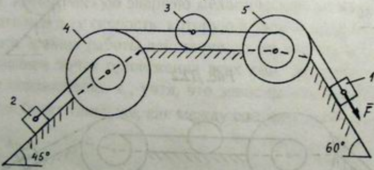


Рис. Д2.7

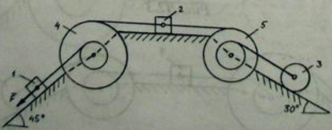


Рис. Д2.8

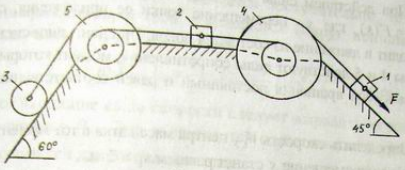


Рис. Д2.9

Таблица Д2

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	M_4, Н м	M_5, Н м	$F = F(s)$, Н	Найти
0	60	10	24	0	6	1,8	0	$60(2+3s)$	V_1
1	30	12	16	10	0	0	2,4	$20(7+2s)$	ω_5
2	40	18	12	0	10	0,6	0	$40(5+4s)$	V_{C3}
3	50	16	10	12	0	0	0,8	$20(9+2s)$	V_2
4	60	20	16	0	8	2,4	0	$30(4+5s)$	ω_4
5	70	14	12	20	0	0	1,6	$20(3+4s)$	V_1
6	50	12	24	0	4	1,2	0	$40(3+2s)$	ω_5
7	30	16	20	12	0	0	0,6	$60(2+7s)$	V_{C3}
8	40	20	12	0	10	0,6	0	$30(7+2s)$	V_2
9	50	18	16	20	0	0	2,4	$90(2+5s)$	ω_4

Пример Д2. Механическая система (рис. *Д2а*) состоит из грузов 1 и 2, цилиндрического катка 3, двухступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней соответственно R_4, r_4 и R_5, r_5. Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. Каток (сплошной однородный цилиндр) катится по опорной плоскости без скольжения. Массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу. Коэффициент трения скольжения грузов по опорным плоскостям $f = 0,2$.

Под действием силы $\overline{F}$, модуль которой изменяется по закону $F = F(s)$, где s – перемещение точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 4 и 5 действуют силы сопротивления, момент которых относительно оси вращения постоянный и равен соответственно M_4 и M_5.

Определить скорость V_{C3} центра масс катка в тот момент времени, когда перемещение s станет равным $s_1 = 2$ м.

Дано: $m_1 = 0$, $m_2 = 20$ кг, $m_3 = 8$ кг, $m_4 = 24$ кг, $m_5 = 0$, $R_4 = 0{,}3$ м, $r_4 = 0{,}2$ м, $R_5 = 0{,}4$ м, $r_5 = 0{,}2$ м, $M_4 = 3$ Н м, $M_5 = 4$ Н м, $F = 20(5 + 4s)$ Н.

Решение 1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3, 4, 5, соединенных нитями. Изобразим на чертеже (рис. Д2*б*) все действующие на систему внешние силы: движущую силу $\overline{F}$, силы тяжести $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, $\overline{G}_4$ весомых тел, моменты M_4 и M_5 сил сопротивлений вращению шкивов, составляющие опорных реакций подшипников шкивов $\overline{X}_4$, $\overline{Y}_4$, $\overline{X}_5$, $\overline{Y}_5$, нормальные реакции опорных поверхностей $\overline{N}_2, \overline{N}_3$ и силы трения $\overline{F}_2^{тр}$, $\overline{F}_3^{тр}$.

Для решения задачи воспользуемся интегральной формой теоремы об изменении кинетической энергии механической системы. Так как тела данной системы твердые, нити нерастяжимые, то сумма работ внутренних сил этой системы равна нулю (идеальные внутренние связи) и уравнение теоремы будет таким:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e. \qquad (1)$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Кинетическая энергия механической системы равна сумме энергий всех тел системы (тел, имеющих массу)

$$T = T_2 + T_3 + T_4. \qquad (2)$$

Учитывая, что тело 2 движется поступательно, тело 3 – плоскопараллельно, а тело 4 вращается вокруг неподвижной оси, получим:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2^2,\ T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2,\ T_4 = \frac{1}{2} I_4 \omega_4^2. \qquad (3)$$

Все входящие сюда скорости следует выразить через искомую величину V_{C3}. Это выполняется с учетом схемы соединения нитями тел данного механизма.

Учитывая, что точка P (точка контакта катка с опорной плоскостью) является мгновенным центром скоростей катка, то, обозначив радиус катка через r_3, получим

$$\omega_3 = \frac{V_{C3}}{PC_3} = \frac{V_{C3}}{r_3}. \qquad (4)$$

Приняв во внимание, что нерастяжимые нити соединяют: точку C_3 с точками обода малой ступени шкива 5; точки внешнего обода шкива 5 с телом 2 и с точками внешнего обода шкива 4, получим такие зависимости:

$$\omega_5 = \frac{V_{C3}}{r_5},\ V_2 = \omega_5 R_5 = V_{C3}\frac{R_5}{r_5},\ \omega_4 = \frac{V_{C3}}{r_5}\frac{R_5}{R_4}. \qquad (5)$$

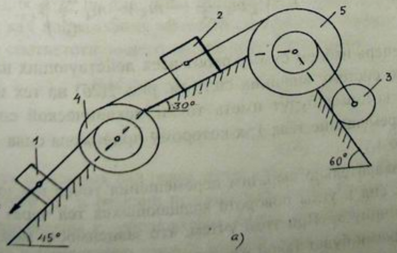


Рис. Д2а

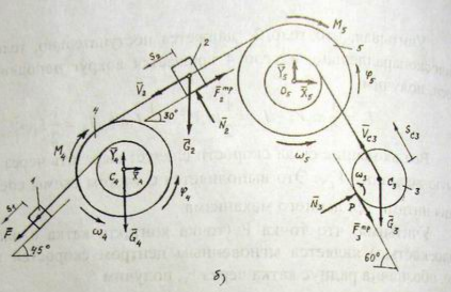


Рис. Д2б

Кроме того, запишем выражения моментов инерции тел:

$$I_3 = m_3 r_3^2 / 2, \; I_4 = m_4 R_4^2. \tag{6}$$

Подставив все величины (4), (5), (6) в равенства (3), а затем в равенство (2), получим окончательно выражение кинетической энергии системы:

$$T = \left(\frac{1}{2} m_2 \frac{R_5^2}{r_5^2} + \frac{3}{4} m_3 + \frac{1}{2} m_4 \frac{R_5^2}{r_5^2}\right) V_{C3}^2. \tag{7}$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих на механическую систему внешних сил (см. рис. Д2*б*) на тех перемещениях, которые будут иметь точки механической системы, когда перемещение тела 1, к которому приложена сила $\overline{F}$, будет равно s_1.

Предварительно выразим перемещения точек приложения внешних сил и углы поворота вращающихся тел через заданную величину s_1. При этом учтем, что зависимость между перемещениями будет такой же, как и между соответствующими скоростями:

$$\varphi_4=\frac{s_1}{r_4},\ s_2=\varphi_4 R_4=s_1\frac{R_4}{r_4},\ \varphi_5=\frac{s_2}{R_5}=s_1\frac{R_4}{r_4R_5},\ s_{C5}=\varphi_5 r_5=s_1\frac{R_4r_5}{r_4R_5}. \quad (8)$$

Элементарная работа силы вычисляется по формуле

$$dA(\overline{F})=F\cdot ds\cdot\cos\gamma,$$

где F – модуль силы, ds–модуль элементарного перемещения точки приложения силы, γ– угол между вектором силы и вектором элементарного перемещения точки приложения силы.

Вычисляем работу сил:

$$A(\overline{F})=\int_0^{s_1}30(5+4s)\cdot ds\cdot\cos 0^0=30(5s_1+2s_1^2);$$

$$A(\overline{G}_2)=G_2s_2\cos 60^0=G_2s_1\frac{R_4}{r_4}\sin 30^0, \quad \text{где } G_2=m_2g;$$

$A(\overline{F}_2^{mp})=F_2^{mp}s_2\cos 180^0$, учитывая, что $F_2^{mp}=fN_2=fG_2\cos 30^0$, получим $A(\overline{F}_2^{mp})=-fG_2\cos 30^0\cdot s_1\dfrac{R_4}{r_4}$;

$$A(\overline{G}_3)=G_3s_{C3}\cos 150^0=-G_3s_1\frac{R_4r_5}{r_4R_5}\sin 60^0, \text{ где } G_3=m_3g.$$

Работа сил сопротивления вращению шкива равна произведению момента указанных сил относительно оси вращения на угол поворота шкива; знак этой работы будет отрицательным, так как направления момента сил сопротивления и угла поворота соответствующего шкива противоположны:

$$A(M_4)=-M_4\varphi_4=-M_4\frac{s_1}{r_4};$$

$$A(M_5)=-M_5\varphi_5=-M_5s_1\frac{R_4}{r_4R_5}.$$

Работа остальных сил равна нулю по следующим причинам: сила тяжести $\overline{G}_4$ и реакции подшипников осей шкивов $\overline{X}_4$, $\overline{Y}_4$, $\overline{X}_5$, $\overline{Y}_5$ приложены к неподвижным точкам; реакция $\overline{N}_2$ перпендикулярна перемещению груза 2; точка P катка 3, где приложены силы $\overline{N}_3$ и $\overline{F}_3^{mp}$– мгновенный центр скоростей.

Окончательно получим

$$\Sigma A_k^e = 30(5s_1 + 2s_1^2) - M_4\frac{s_1}{r_4} + G_2 s_1\frac{R_4}{r_4}\sin 30^0 - fG_2\cos 30^0\cdot s_1\frac{R_4}{r_4} -$$
$$- M_5 s_1\frac{R_4}{r_4 R_5} - G_3 s_1\frac{R_4 r_5}{r_4 R_5}\sin 60^0. \qquad (9)$$

4. Подставив выражения (7) и (9) в уравнение (1) и учитывая, что $T_0 = 0$, получим

$$\left(\frac{1}{2}m_2\frac{R_5^2}{r_5^2} + \frac{3}{4}m_3 + \frac{1}{2}m_4\frac{R_5^2}{r_5^2}\right)V_{C3}^2 = 30(5s_1 + 2s_1^2) - M_4\frac{s_1}{r_4} + G_2 s_1\frac{R_4}{r_4}\sin 30^0 -$$
$$- fG_2\cos 30^0\cdot s_1\frac{R_4}{r_4} - M_5 s_1\frac{R_4}{r_4 R_5} - G_3 s_1\frac{R_4 r_5}{r_4 R_5}\sin 60^0. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения заданных величин, получим

$$91V_{C3}^2 = 390{,}3.$$

Отсюда находим искомую скорость.

Ответ: $V_{C3} = 2{,}07$ м/с.

Задача Д3

Вертикальный вал АК (рис. Д3.0–Д3.9, табл. Д3), вращающийся равномерно с угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке А и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в столбе 2 табл. Д3. К валу жестко прикреплены невесомый стержень 1 длиной $l_1 = 0{,}3$ м, на свободном конце которого расположен груз массой $m_1 = 4$ кг, и однородный стержень 2 длиной $l_2 = 0{,}6$ м, имеющий массу $m_2 = 8$ кг. Оба стержня лежат в одной вертикальной плоскости. Точки прикрепления стержней к валу, а также углы α и β указаны в таблице. Размеры AB = BD = DE = EK = b, где $b = 0{,}4$ м. Груз принять за материальную точку.

Пренебрегая массой вала, определить реакции подпятника и подшипника.

Указания. В задаче Д3 для определения реакций связей вращающегося целесообразно применить принцип Даламбера. В соответствии с этим принципом приложенные к механической системе активные силы, реакции связей и силы инерции её материальных точек образуют уравновешенную систему сил. При решении задачи следует учесть, что силы инерции точек однородного прямолинейного стержня 2 распределены по всей его длине по линейному закону. Эти силы можно заменить равнодействующей $\overline{R}^{\Phi}$, модуль которой $R^{\Phi} = ma_C$, где m – масса стержня, a_C – модуль ускорения центра масс C стержня. Отметим, что расположение прямой, являющейся линией действия равнодействующей $\overline{R}^{\Phi}$, зависит от формы эпюры сил инерции тела и в общем случае эта линия не проходит через центр масс C.

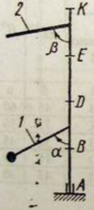


Рис. Д3.0

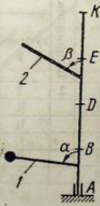


Рис. Д3.1

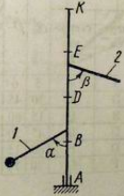


Рис. Д3.2

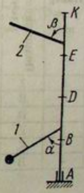


Рис. Д3.3

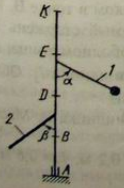


Рис. Д3.4

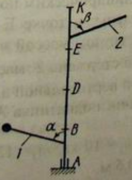


Рис. Д3.5

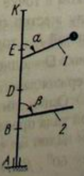


Рис. Д3.6

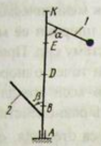


Рис. Д3.7

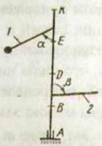


Рис. Д3.8

Рис. Д3.9

Таблица Д3

Номер условия	Подшипник в точке	Точка крепления к валу: Стержня 1	стержня 2	α^0	β^0	Номер условия	Подшипник в точке	Точка крепления к валу: стержня 1	стержня 2	α^0	β^0
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
0	B	D	K	30	45	5		K	B	45	60
1	D	B	E	15	60	6		B	K	75	30
2	E	D	B	45	30	7		E	B	30	45
3	K	D	E	60	15	8		K	D	15	60
4	B	E	D	30	75	9		E	B	45	30

Пример Д3. Вертикальный вал АЕ (рис. Д3*а*), вращающийся равномерно с угловой скоростью ω, закреплен подпятником в точке А и цилиндрическим подшипником в точке В. К валу жестко прикреплены: в точке Е невесомый стержень 1 длиной l_1 с точечным грузом массой m_1 на свободном конце; в точке D – однородный стержень 2 массой m_2 и длиной l_2. Оба стержня лежат в одной вертикальной плоскости.

Определить реакции подпятника А и подшипника В. Массой вала пренебречь.

Дано: $\omega = 6$ с$^{-1}$, $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 12$ кг, $l_1 = 0{,}2$ м, $l_2 = 0{,}6$ м, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $b = 0{,}5$ м.

Решение 1. Механическая система, представляет собой твердое тело, состоящее из вала АЕ, стержня 1 с грузом и стержня 2. Проведем в плоскости расположения стержней (плоскость чертежа) координатные оси Axy, которые жестко скреплены с вращающимся телом.

2. Изобразим действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{G}_1, \overline{G}_2 (G_1 = m_1 g,\ G_2 = m_2 g)$, составляющие $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ реакции подпятника А и реакцию $\overline{X}_B$ подшипника В.

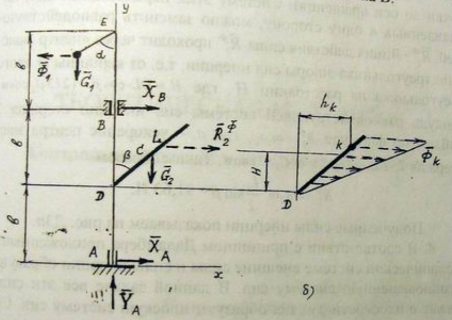


Рис. Д3

3. Определим числовые значения и направления сил инерции груза и стержня 2. Так как рассматриваемая система вращается равномерно, то ускорения его точек будут равны нормальным ускорениям и векторы этих ускорений направлены к оси вращения. Тогда силы инерции материальных точек тела, равномерно вращающегося вокруг неподвижной оси, будут направлены от оси вращения и для произвольной k-й точки модуль силы инерции

$$\Phi_k = m_k a_k^n = m_k \omega^2 h_k, \tag{a}$$

где m_k – масса точки; h_k – расстояние от k -й точки до оси вращения.

Модуль силы инерции $\overline{\Phi}_1$ точечного груза на свободном конце стержня 1 равен:

$$\Phi_1 = m_1\omega^2 l_1 \sin\alpha = 62{,}35 \text{ Н}.$$

Эпюра сил инерции точек однородного стержня 2 представляет собой треугольник (рис. Д3*б*), поскольку модули этих сил согласно формуле (а) пропорциональны расстоянию h_k (от точки до оси вращения). Систему этих параллельных сил, направленных в одну сторону, можно заменить равнодействующей $\overline{R}_2^{\Phi}$. Линия действия силы $\overline{R}_2^{\Phi}$ проходит через «центр тяжести» треугольника эпюры сил инерции, т.е. от вершины D этого треугольника на расстоянии H, где $H = DL\cdot\cos\beta = (2/3)l_2\cos\beta$. Модуль равнодействующей системы сил инерции стержня 2 найдем по формуле $R_2^{\Phi} = m_2 a_C$, где a_C – ускорение центра масс стержня 2, т.е. $a_C = a_C^n = \omega^2(l_2/2)\sin\beta$. Таким образом

$$R_2^{\Phi} = m_2\omega^2\frac{l_2}{2}\sin\beta = 91{,}63 \text{ Н}.$$

Полученные силы инерции показываем на рис. Д3*а*.

4. В соответствии с принципом Даламбера приложенные к механической системе внешние силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. В данной задаче все эти силы лежат в плоскости xy, т.е. образуют плоскую систему сил. Составим для этой системы сил три уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx} = 0,\ X_A - \Phi_1 + X_B + R_2^{\Phi} = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0,\ Y_A - G_1 - G_2 = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma m_A(\overline{F}_k) = 0,\ G_1 l_1\sin\alpha + \Phi_1(3b - l_1\cos\alpha) - G_2(l_2/2)\sin\beta - R_2^{\Phi}(b+H) - X_B 2b = 0. \quad (3)$$

Подставив в эти уравнения числовые значения всех заданных и вычисленных величин, найдем искомые реакции связей.

Ответ: $X_A = -37{,}13$ Н, $Y_A = 215{,}6$ Н, $X_B = 7{,}85$ Н. Знак минус указывает, что сила $\overline{X}_A$ направлена противоположно показанной на рис. Д3*а*.

Учебное издание

ЦЫВИЛЬСКИЙ Василий Львович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Контрольные задания и методические указания

Редактор А.П. Онофрей
Компьютерная верстка Ю.И. Щербакова