

Федеральное агентство по образованию

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»

Кафедра «Теоретическая механика»

Одобрено
методической комиссией по
общенаучным дисциплинам

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО СТАТИКЕ, КИНЕМАТИКЕ И ДИНАМИКЕ

Методические указания по курсу «Теоретическая механика»
для студентов специальностей 654500 180800, 657900 210200,
656600 330200, 653800 072000

Под редакцией
д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С.

МОСКВА - 2005

Авторский коллектив: А.И.Блохина, Л.В.Божкова, В.Г.Рябов, Г.И.Норицына, В.К.Петров, Л.Г.Ильина, В.В.Даншин, А.И.Зубков.

Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С..

Расчетно-графические работы по статике, кинематике и динамике. Методические указания по курсу "Теоретическая механика" для студентов специальностей 654500 180800, 657900 210200, 656600 330200, 653800 072000.

В настоящий сборник включены три задания по разделу «статика», три задания по разделу «кинематика» и четыре задания по разделу «динамика». Каждое задание содержит 30 вариантов, часть схем заимствована из "Сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике" под общей редакцией проф. А.А.Яблонского. Приведены примеры выполнения всех заданий с пояснениями.

ЗАДАНИЕ С-2

Определение реакций опор составной конструкции.

Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире С заданной составной конструкции. Схемы конструкции представлены на рис. С-2.1 – С-2.5, а необходимые данные - в таблице С-2.

Таблица С-2

№№ п/п	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	a , м	α , град.	β , град.
1	10	5	1,4	1,0	45	30
2	12	8	1,0	2,0	60	15
3	15	4	0,8	1,5	30	15
4	14	6	1,8	1,0	75	30
5	20	4	1,4	2,0	60	15
6	16	10	1,2	1,0	30	15
7	18	8	1,6	1,5	60	30
8	20	12	2,2	1,0	75	30
9	22	6	1,2	2,0	45	30
10	30	8	2,4	1,5	30	15
11	10	5	1,4	1,0	45	30
12	12	8	1,0	2,0	60	15
13	15	4	0,8	1,5	30	15
14	14	6	1,8	1,0	75	30
15	20	4	1,4	2,0	60	15
16	16	10	1,2	1,0	30	15
17	18	8	1,6	1,5	60	30
18	20	12	2,2	1,0	75	30
19	22	6	1,2	2,0	45	30
20	30	8	2,4	1,5	30	15
21	10	5	1,4	1,0	45	30
22	12	8	1,0	2,0	60	15
23	15	4	0,8	1,5	30	15
24	14	6	1,8	1,0	75	30
25	20	4	1,4	2,0	60	15
26	16	10	1,2	1,0	30	15
27	18	8	1,6	1,5	60	30
28	20	12	2,2	1,0	75	30
29	22	6	1,2	2,0	45	30
30	30	8	2,4	1,5	30	15

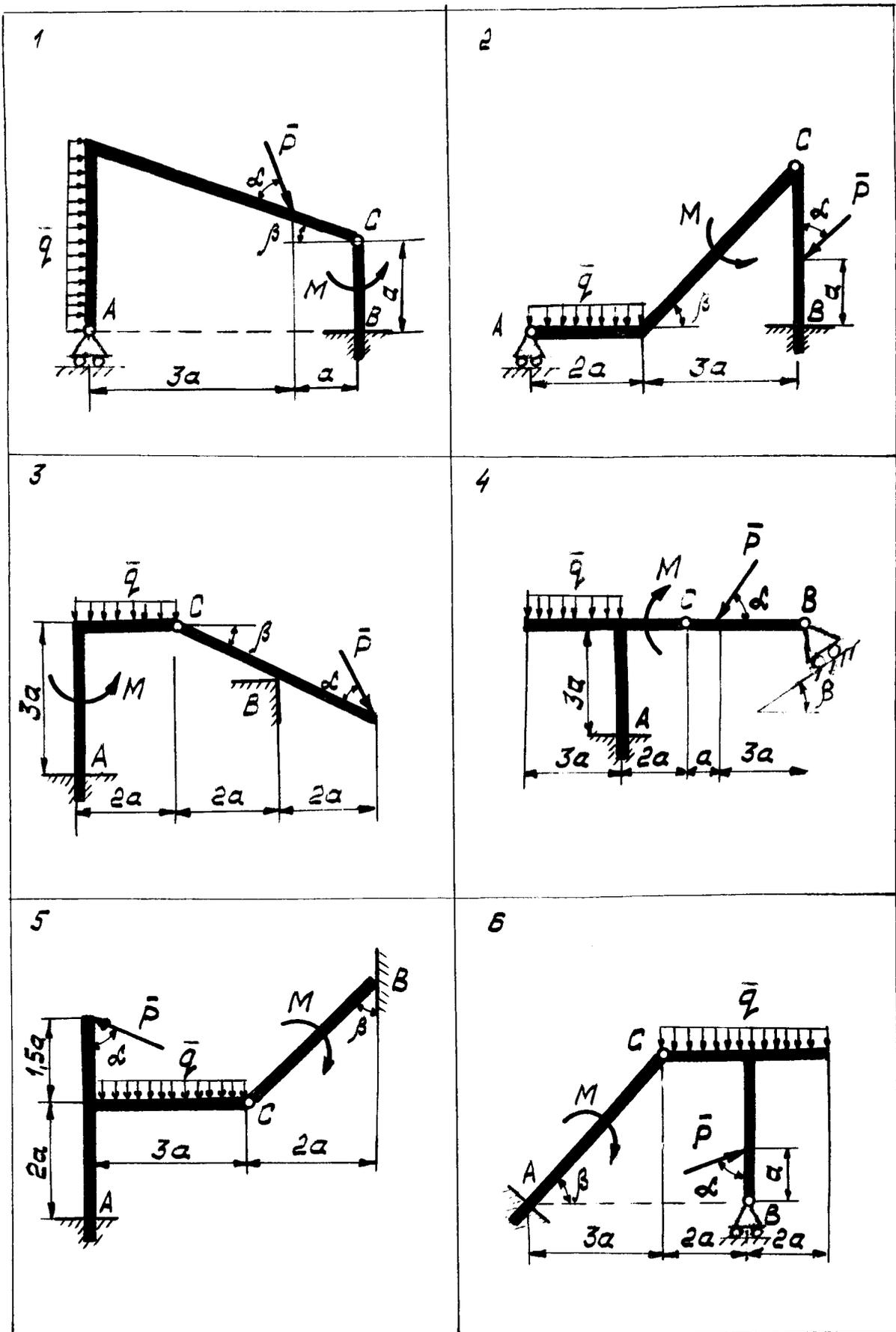


Рис. С-2.1

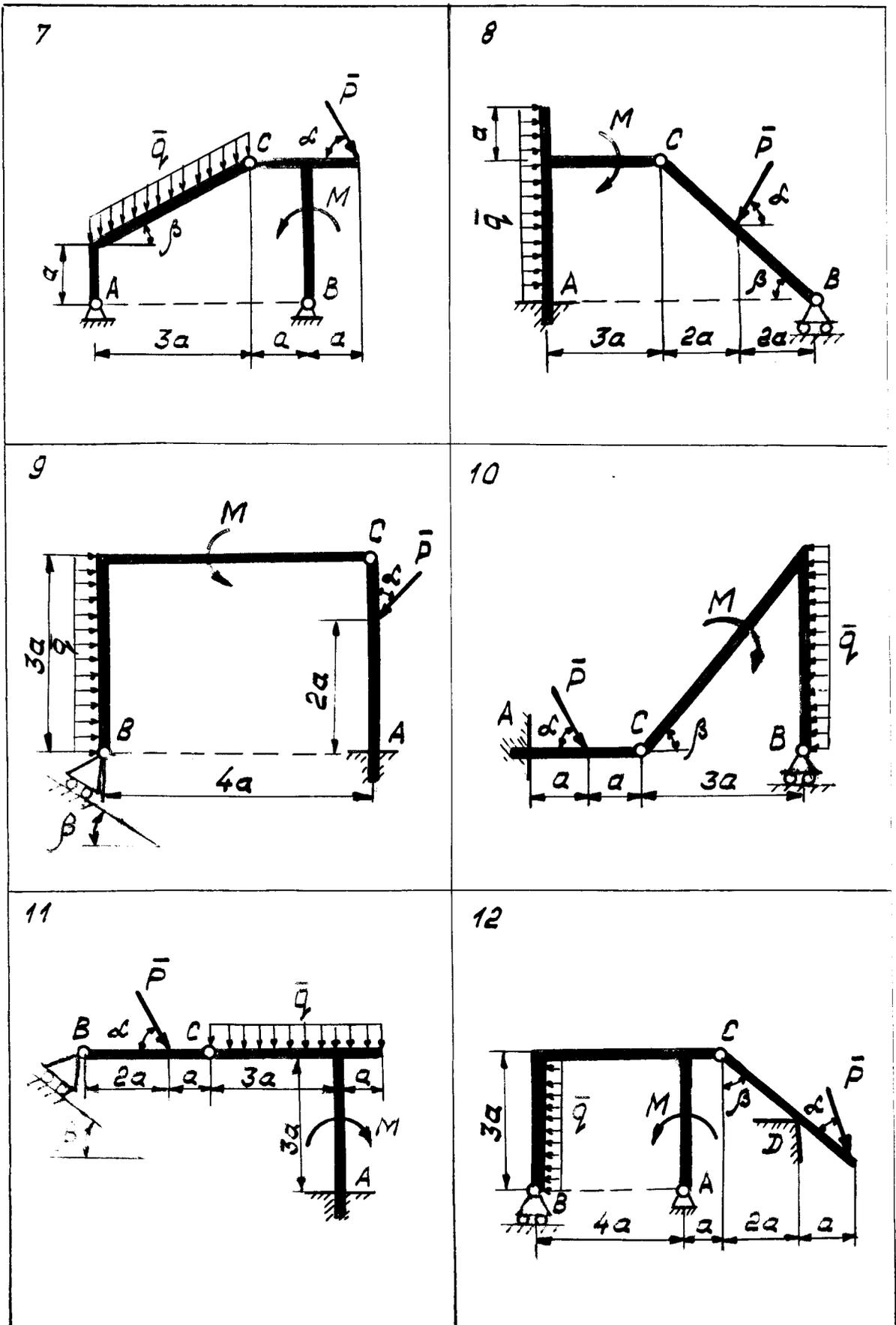


Рис. С-2.2

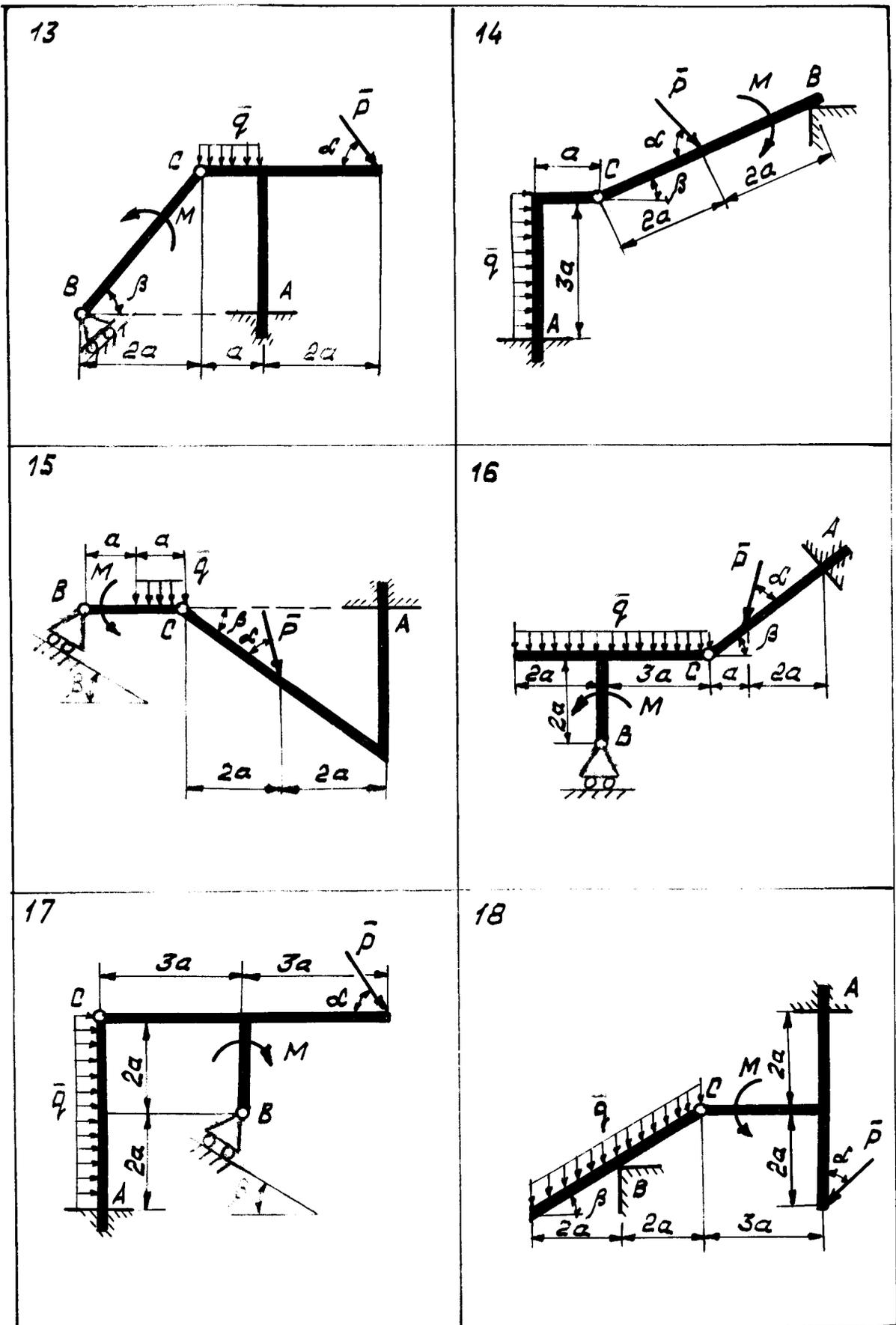


Рис. С-2.3

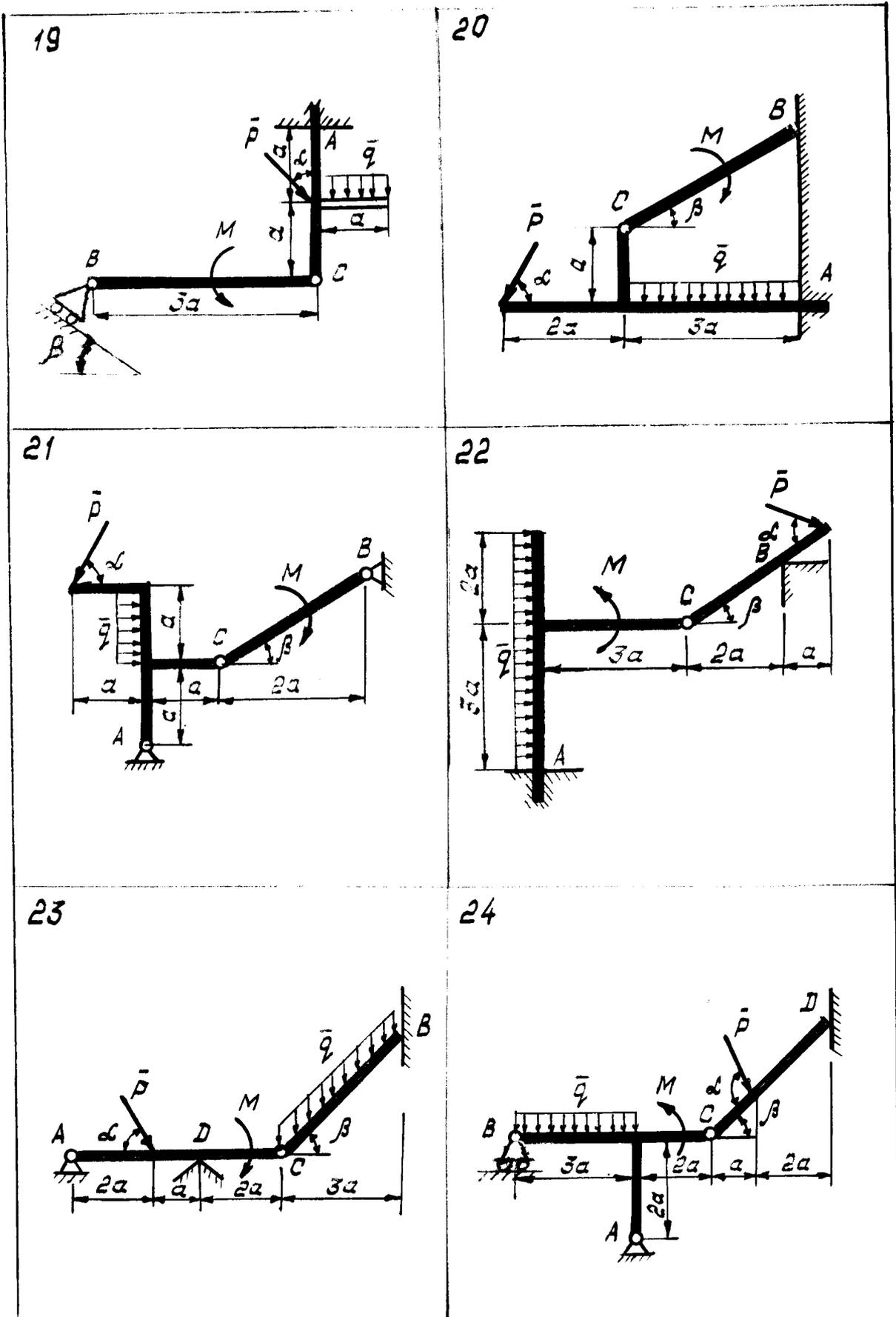


Рис. С-2.4

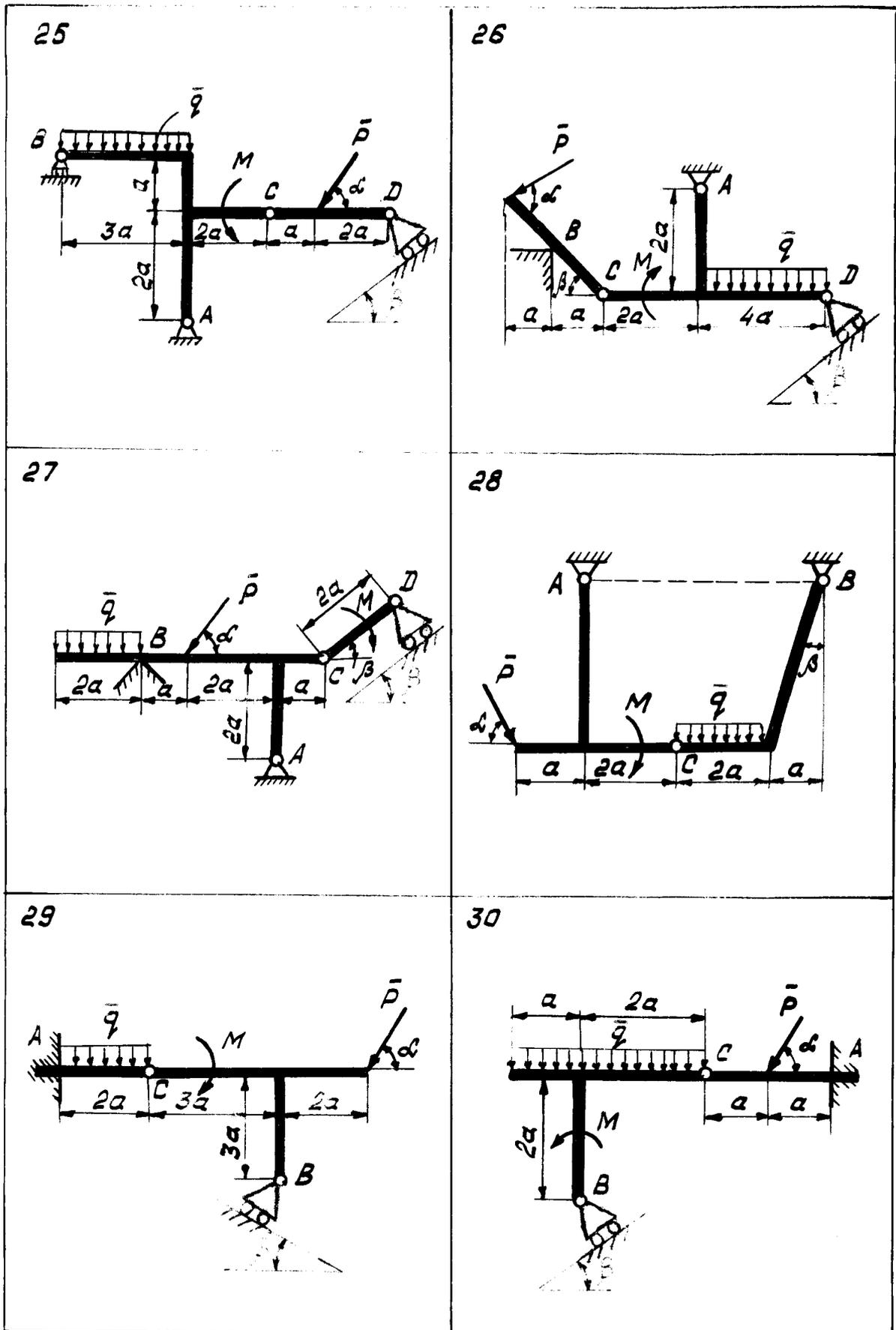


Рис. С-2.5

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис. С-2.6а); $P = 8 \text{ кН}$; $M = 20 \text{ кНм}$; $q = 2 \text{ кН/м}$; $a = 1 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$. Определить реакции опор А и В и давление в промежуточном шарнире С.

РЕШЕНИЕ

Данная конструкция состоит из двух тел, сочлененных шарниром С. Задачу можно решить двумя способами.

Первый способ. Мысленно освобождаемся от связей, наложенных на каждое из тел, прикладывая при этом соответствующие реакции. Рассматриваем системы уравновешивающихся сил, приложенных к каждому телу в отдельности.

На первое тело (рис. С-2.6б) действуют: сила \vec{P} , пара сил с моментом M , реакция опоры А и давление балки CD в точке С. Реакция жесткой заделки А представляется силами \vec{X}_A , \vec{Y}_A и парой с моментом M_A , а давление балки CD - составляющими \vec{X}_C и \vec{Y}_C . Указанные силы расположены на плоскости произвольным образом, поэтому составляем три уравнения равновесия:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 ; \quad X_A + X_C - P \cdot \cos \alpha = 0 ; \quad (1)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 ; \quad Y_A + Y_C - P \cdot \sin \alpha = 0 ; \quad (2)$$

$$\sum_K m_0(\vec{F}_K) = 0 ; \quad X_A \cdot OA + M_A + Y_C \cdot OC - M + P \cdot OC = 0 ; \quad (3)$$

где $OA = 2 \cdot a = 2 \text{ м}$, $OC = 1.5 \cdot a = 1.5 \text{ м}$,

$$OK = a \cdot \sin \alpha = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87 \text{ м} .$$

На второе тело (рис. С-2.6в) действуют: распределенные силы интенсивности q , реакция опоры В и давление первого тела в точке С. Равномерно распределенные силы заменяем их равнодействующей \vec{Q} , приложенной в середине участка CD и направленной по вертикали вниз. Ее модуль определяется по формуле:

$$Q = q \cdot CD = 2 \cdot 3,5 = 7 \text{ кН}.$$

Реакция \vec{N}_B опоры В перпендикулярна к балке CD, а давление первого тела представляется составляющими \vec{X}'_C и \vec{Y}'_C . Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия

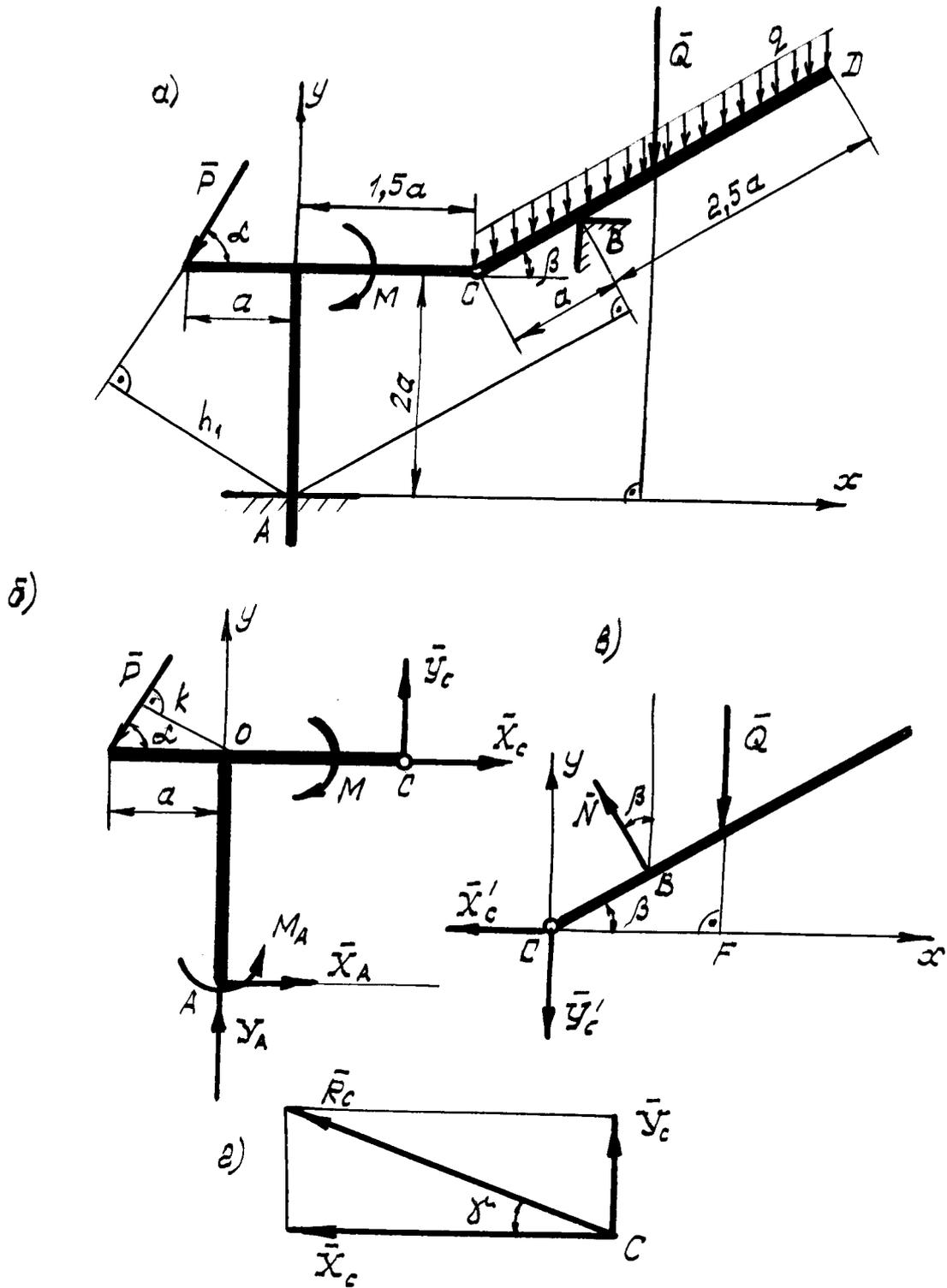


Рис. С-2.6

$$\begin{aligned} X'_C = X_C & \quad \text{и} \quad \dot{X}'_C \uparrow \downarrow \dot{X}_C, \\ Y'_C = Y_C & \quad \text{и} \quad \dot{Y}'_C \uparrow \downarrow \dot{Y}_C. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия сил, приложенных к балке CD имеют вид:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 ; \quad -X'_C - N_B \cdot \sin b = 0 ; \quad (4)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 ; \quad -Y'_C + N_B \cdot \cos b - Q = 0 ; \quad (5)$$

$$\sum_K m_C(\dot{F}_K) = 0 ; \quad N_B \cdot CB - Q \cdot CF = 0 ; \quad (6)$$

где $CB = a = 1 \text{ м}$, $CF = \frac{CD}{2} \cdot \cos b = \frac{3.5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.52 \text{ м}$.

Уравнения равновесия (1)-(6) образуют полную систему уравнений, откуда определяются все шесть неизвестных величин: X_A , Y_A , M_A , X_C , Y_C , N_B .

Из уравнения (6) находим

$$N_B = Q \cdot \frac{CF}{CB} = 7 \cdot \frac{1.52}{1} = 10.64 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$Y'_C = N_B \cdot \cos b - Q = 10.64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 7 = 2.21 \text{ кН.}$$

Из уравнения (4)

$$X'_C = -N_B \sin b = -10.64 \cdot \frac{1}{2} = -5.32 \text{ кН.}$$

Отрицательный знак указывает, что в действительности сила \dot{X}'_C (соответственно и \dot{X}_C) будет направлена в сторону противоположную принятой. Истинные направления сил \dot{X}_C и \dot{Y}_C , представляющих собой составляющие давления \dot{R}_C балки CD на первое тело конструкции, показаны на рис. С-2.6г.

Модуль \dot{R}_C и угол определяются по формулам:

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2} = \sqrt{(5.32)^2 + (2.21)^2} = 5.76 \text{ кН,}$$

$$g = \arctg \frac{|Y_C|}{|X_C|} = \arctg 0.4154 = 22^\circ 34'.$$

Далее из уравнения (1) находим

$$X_A = P \cdot \cos a - X_C = 8 \cdot \frac{1}{2} + 5.32 = 9.32 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = P \cdot \sin a - Y_C = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2.21 = 4.72 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$\begin{aligned} M_A &= -X_A \cdot OA - Y_C \cdot OC + M - P \cdot OK = \\ &= -9.32 \cdot 2 - 2.21 \cdot 1.5 + 20 - 8 \cdot 0.87 = -8.92 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Отрицательный знак указывает, что направление вращения пары в опоре А в действительности противоположно выбранному.

Второй способ. Рассматриваем систему уравнивающих сил, приложенных ко всей конструкции (рис.С-2.6а). На конструкцию действуют: сила \dot{P} , пара сил с моментом M , равнодействующая \dot{Q} распределенных сил и реакции опор А и В ($\dot{X}_A, \dot{Y}_A, \dot{M}_A, \dot{N}_B$). При рассмотрении всей конструкции в целом давления в шарнире С (\dot{X}_C, \dot{Y}_C и \dot{X}'_C, \dot{Y}'_C) не рассматриваются.

Уравнениями равновесия для указанной системы сил будут:

$$\sum_K F_{Kx} = 0 ; \quad X_A - P \cdot \cos a - N_B \cdot \sin b = 0 ; \quad (7)$$

$$\sum_K F_{Ky} = 0 ; \quad Y_A - P \cdot \sin a + N_B \cdot \cos b - Q = 0 ; \quad (8)$$

$$\sum_K m_A(\dot{F}_K) = 0 ; \quad M_A + P \cdot h_1 - M + N_B \cdot h_2 - Q \cdot h_3 = 0 ; \quad (9)$$

где $h_1 = a \cdot \sin a + 2 \cdot a \cdot \cos a = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.87 \text{ м},$

$$h_2 = a + 1.5a \cdot \cos b + 2a \cdot \sin b = 1 + 1.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.30 \text{ м},$$

$$h_3 = 1.5a + 1.75a \cdot \cos b = 1.5 + 1.75 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.02 \text{ м}.$$

Далее следует рассматривать систему уравнивающих сил, приложенных к одному из тел конструкции, при этом целесообразно выбрать ту часть конструкции, на которую действует меньшее число сил. В данном случае рассматриваем систему сил, действующих на балку CD, условия равновесия которой выражаются уравнениями (4) – (6).

Таким образом, для определения шести неизвестных величин будем иметь систему уравнений (4) – (9).

В заключении отметим, что уравнения (7) – (9) могут быть использованы для проверки результатов решения задачи первым способом, а уравнения (1) – (3) - вторым способом.

ЗАДАНИЕ С-3

Приведение пространственной системы сил к заданному центру.

Определить главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M}_0 заданной системы сил относительно центра О. Схемы вариантов приведены на рис. С-3.1 – С-3.5, необходимые данные - в таблице С-3.

Таблица С-3.

№№ п/п	$a=OE,$ м	$b=OL,$ м	$c=OB,$ м	$F_1,$ Н	$F_2,$ Н	$F_3,$ Н	$F_4,$ Н	$F_5,$ Н	$\alpha,$ град	$\beta,$ град	$M,$ Нм
1	15	20	15	9	14	12	14	15	60	30	10
2	30	40	30	12	18	16	18	20	75	15	20
3	45	60	45	15	22	20	22	25	30	60	30
4	60	80	60	18	26	24	26	30	15	75	40
5	15	20	15	21	30	28	30	35	60	30	10
6	30	40	30	24	34	32	34	40	75	15	20
7	45	60	45	27	38	36	38	45	30	60	30
8	60	80	60	30	42	40	42	50	15	75	40
9	15	20	15	33	46	44	46	55	60	30	10
10	30	40	30	36	50	48	50	60	75	15	20
11	45	60	45	12	54	16	54	20	30	60	30
12	60	80	60	15	58	20	58	25	15	75	40
13	15	20	15	18	17	24	17	30	60	30	10
14	30	40	30	21	19	28	19	35	75	15	20
15	45	60	45	24	21	32	21	40	30	60	30
16	60	80	60	27	23	36	23	45	15	75	40
17	15	20	15	30	25	40	25	50	60	30	10
18	30	40	30	33	27	44	27	55	75	15	20
19	45	60	45	36	29	48	29	60	30	60	30
20	60	80	60	9	31	12	31	15	15	75	40
21	15	20	15	9	14	12	14	15	60	30	10
22	30	40	30	12	18	16	18	20	75	15	20
23	45	60	45	15	22	20	22	25	30	60	30
24	60	80	60	18	26	24	26	30	15	75	40
25	15	20	15	21	30	28	30	35	60	30	10
26	30	40	30	24	34	32	34	40	75	15	20
27	45	60	45	27	38	36	38	45	30	60	30
28	60	80	60	30	42	40	42	50	15	75	40
29	15	20	15	33	45	44	46	55	60	30	10
30	30	40	30	36	50	48	50	60	75	15	20

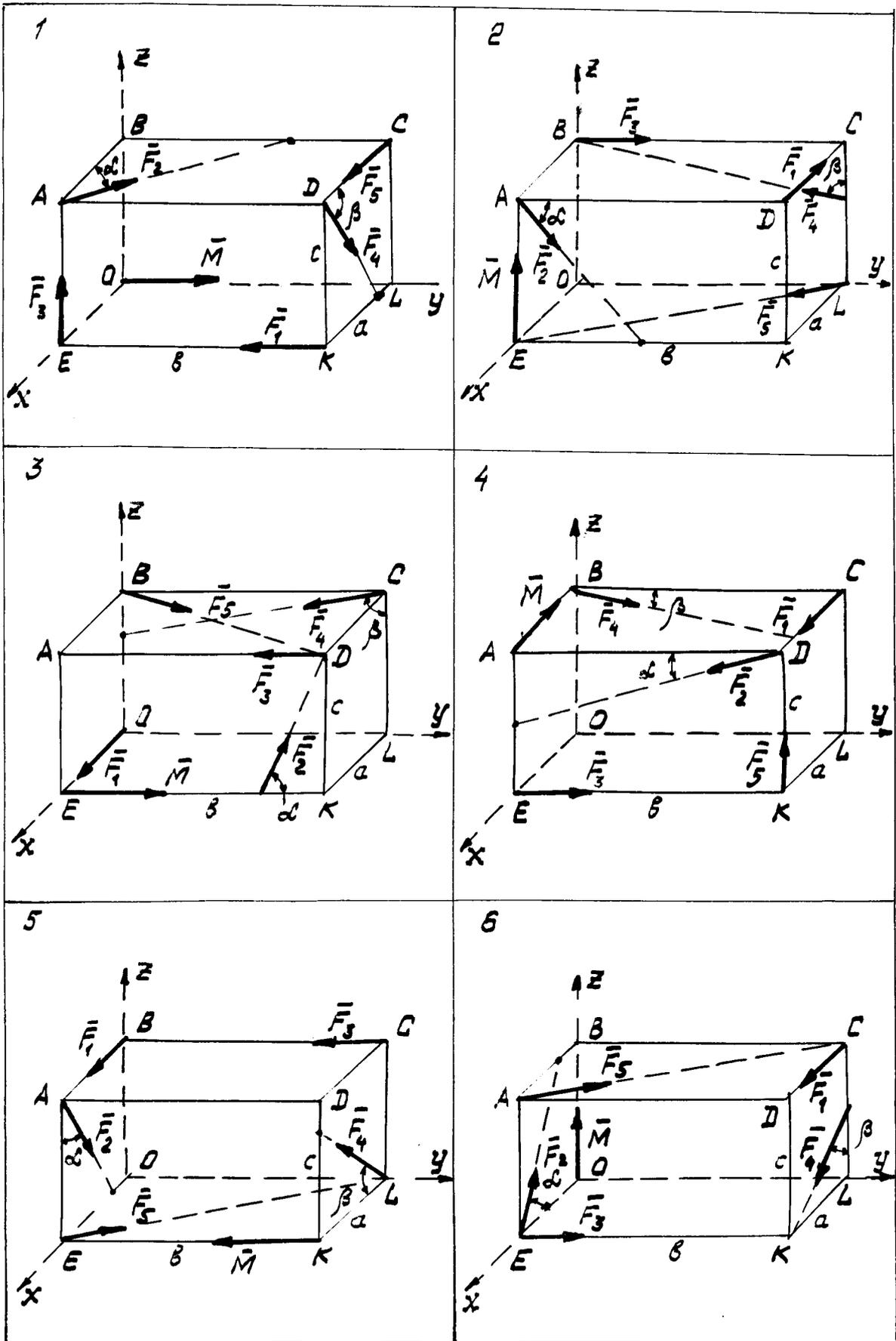


Рис. С-3.1

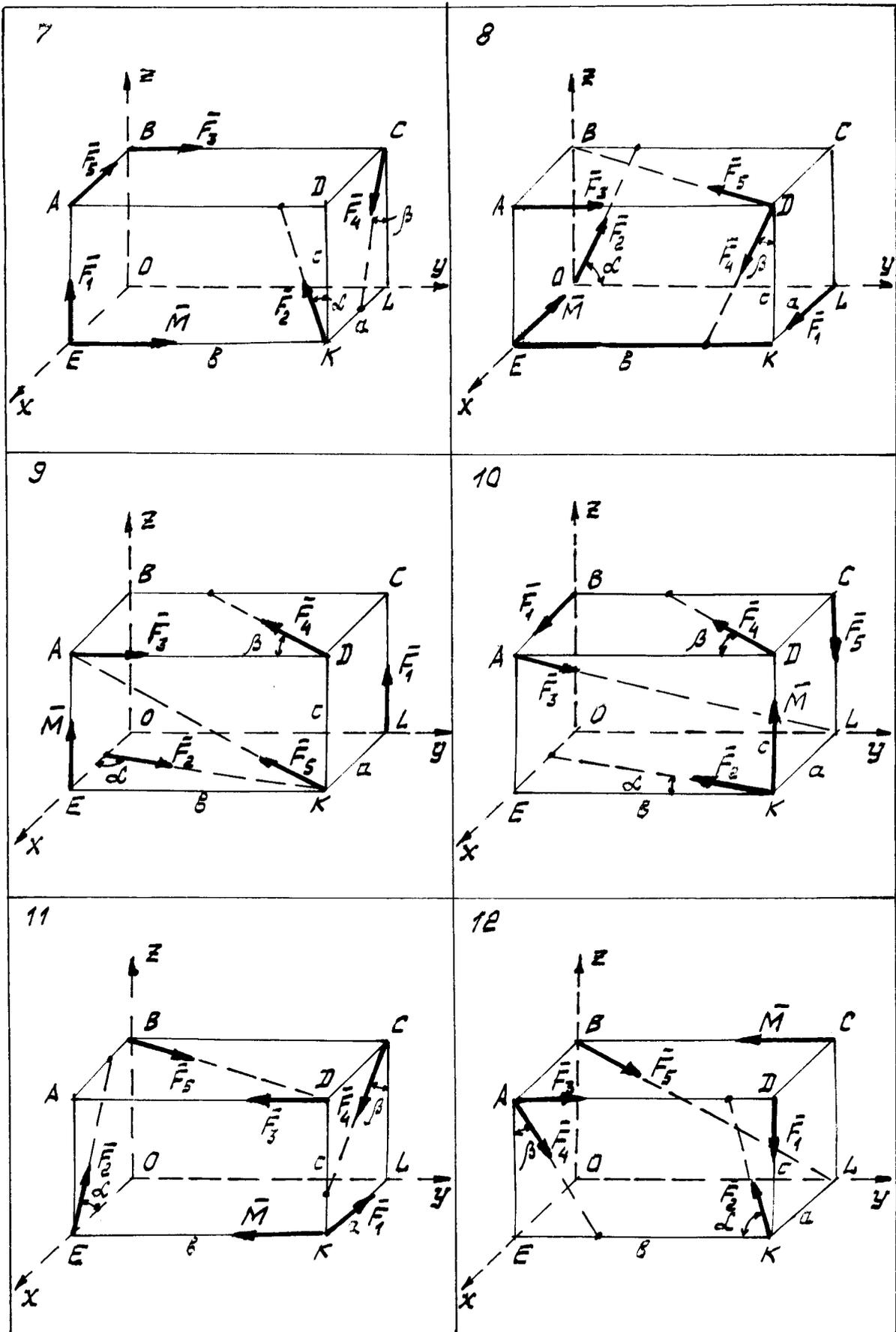


Рис. С-3.2

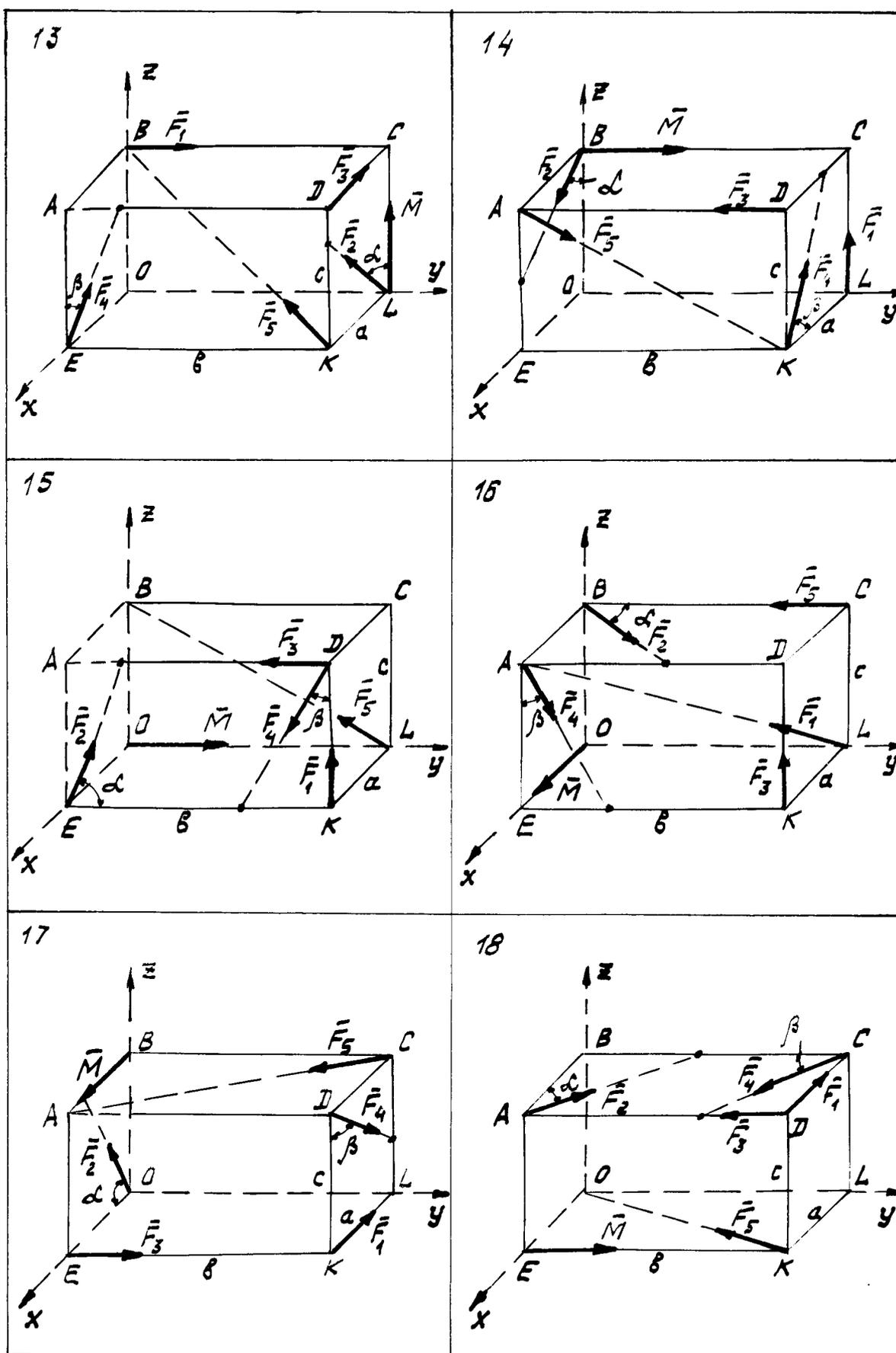


Рис. С-3.3

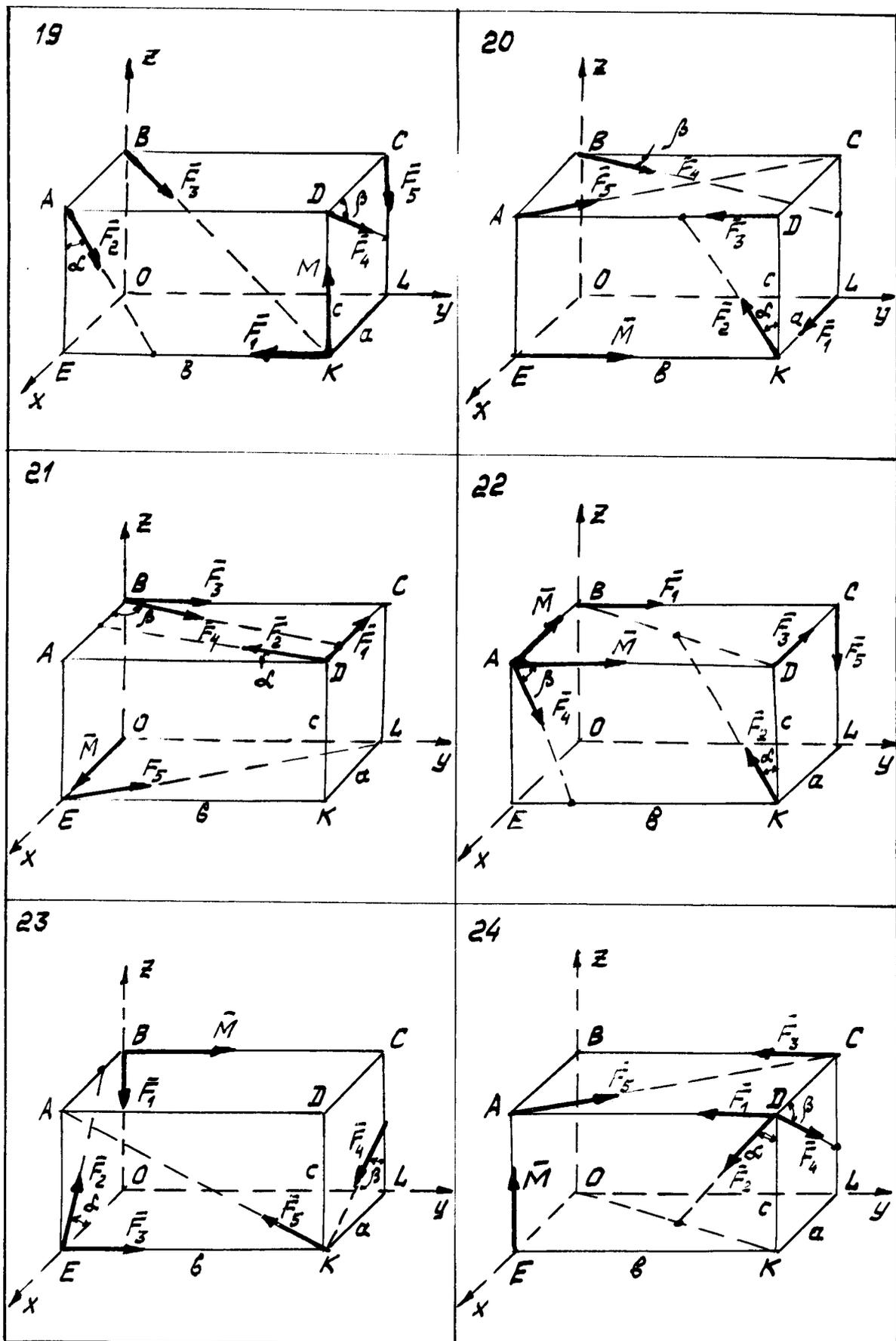


Рис. С-3.4

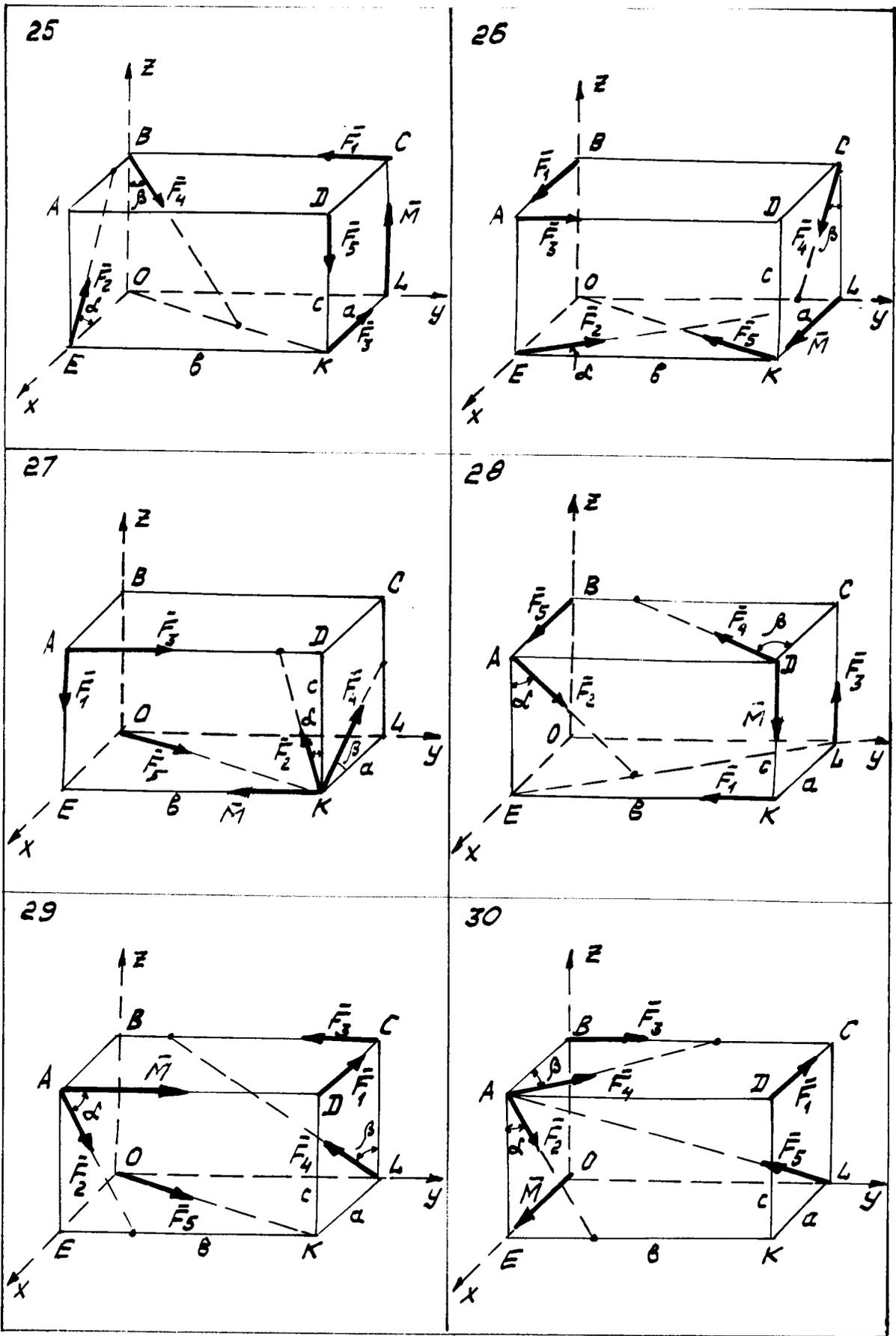


Рис. С-3.5

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: $F_1 = 15 \text{ Н}$; $F_2 = 60 \text{ Н}$; $F_3 = 30 \text{ Н}$; $F_4 = 20 \text{ Н}$; $F_5 = 25 \text{ Н}$;
 $M = 10 \text{ Нм}$; $a = 0.5 \text{ м}$; $b = 0.4 \text{ м}$; $c = 0.3 \text{ м}$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$
 (рис. С-3.6а).

РЕШЕНИЕ

Прежде, чем приступить к определению главного вектора \mathbf{R} заданной системы сил и ее главного момента M_0 относительно начала координат, введем углы γ , φ и разложим силу \mathbf{F}_4 на две составляющие: \mathbf{F}'_4 – на плоскости $ХОУ$ и $\mathbf{F}_4^{(3)}$ – перпендикулярно к ней (рис.С-3.6а).

$$F'_4 = F_4 \cdot \sin b = 10 \text{ Н}, \quad F_4^{(3)} = F_4 \cdot \cos b = 17.32 \text{ Н}.$$

Проекцию силы \mathbf{F}_4 на ось найдем, как сумму проекций составляющих \mathbf{F}'_4 и $\mathbf{F}_4^{(3)}$, а ее момент относительно оси, согласно теореме Вариньона, будет равен сумме моментов \mathbf{F}'_4 и $\mathbf{F}_4^{(3)}$ относительно этой же оси.

Для проекций главного вектора на координатные оси получим выражения:

$$R_x = \sum_{k=1}^5 F_{kx} = -F_1 + F_2 \cdot \cos j + F'_4 \cdot \sin g, \quad (1)$$

$$R_y = \sum_{k=1}^5 F_{ky} = F_3 \cdot \cos a - F'_4 \cdot \cos g - F_5, \quad (2)$$

$$R_z = \sum_{k=1}^5 F_{kz} = -F_2 \cdot \sin j + F_3 \cdot \sin a + F_4^{(3)}, \quad (3)$$

где

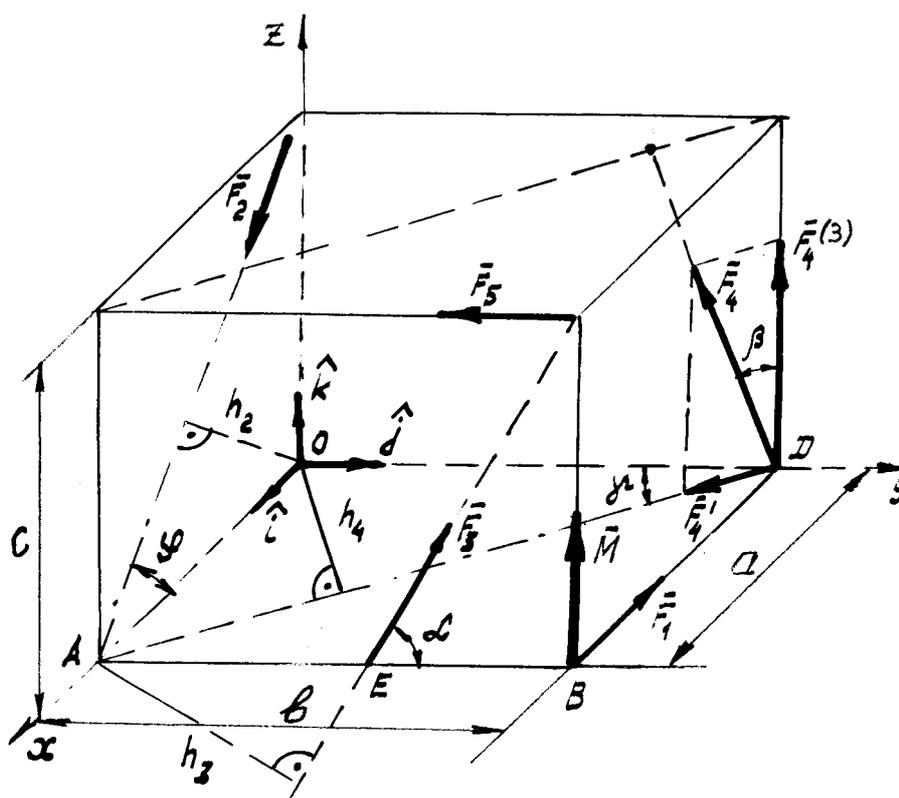
$$\sin g = \frac{OA}{AD} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.78, \quad \cos g = \frac{OD}{AD} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.62,$$

$$\sin j = \frac{ON}{AN} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.51, \quad \cos j = \frac{OA}{AN} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0.86.$$

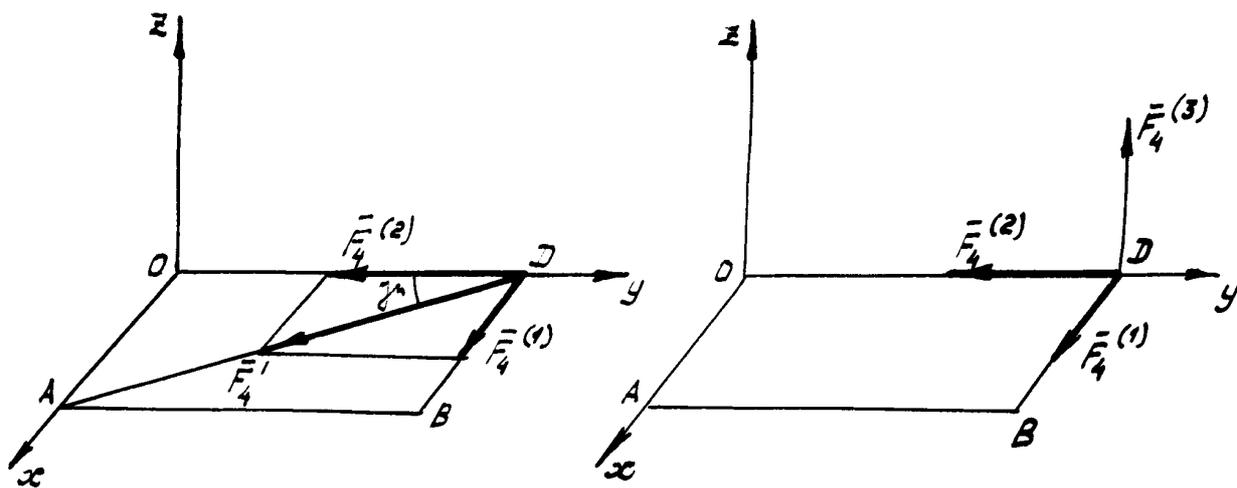
Подставив в (1) – (3) выражения для \mathbf{F}'_4 и $\mathbf{F}_4^{(3)}$, заданные значения $F_1, F_2, \dots, F_5, \alpha, \beta$, а также найденные значения тригонометрических функций углов φ и γ , получим

$$R_x = 44.27 \text{ Н}, \quad R_y = -16.25 \text{ Н}, \quad R_z = 12.31 \text{ Н}.$$

Модуль главного вектора



a)



б)

в)

Рис. С-3.6

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2 + (R_z)^2} = \sqrt{(44.27)^2 + (-16.25)^2 + (12.31)^2} = 48.74 \text{ Н.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(R, i) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{i}}{R} = \frac{R_x}{R} = \frac{44.27}{48.74} = 0.91 \text{ ,}$$

$$\cos(R, j) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}}{R} = \frac{R_y}{R} = \frac{-16.25}{48.74} = -0.33 \text{ ,}$$

$$\cos(R, k) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{R} = \frac{R_z}{R} = \frac{12.305}{48.74} = 0.25 \text{ .}$$

Проекции главного момента системы сил относительно начала координат на координатные оси равны суммам моментов всех сил относительно соответствующих координатных осей. Поэтому, будем иметь:

$$M_{ox} = M_x = \sum_{k=1}^5 m_x(F_k) = F_3 \cdot h_3 + F_4^{(3)} \cdot b + F_5 \cdot c \text{ ,} \quad (4)$$

$$M_{oy} = M_y = \sum_{k=1}^5 m_y(F_k) = F_2 \cdot h_2 - F_3 \cdot \sin a \cdot a \text{ ,} \quad (5)$$

$$M_{oz} = M_z = \sum_{k=1}^5 m_z(F_k) = F_1 \cdot b + F_3 \cdot \cos a \cdot a - F_4' \cdot h_4 - F_5 \cdot a + M \text{ ,} \quad (6)$$

Из рис. С-3.6

$$h_2 = a \cdot \sin j = 0.5 \cdot 0.51 = 0.26 \text{ м,}$$

$$h_3 = AE \cdot \sin a = (AB - BE) \cdot \sin a =$$

$$= (a - c \cdot \operatorname{ctg} a) \cdot \sin a = (0.5 - 0.3 \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ) \cdot \sin 60^\circ = 0.28 \text{ м,}$$

$$h_4 = b \cdot \sin g = 0.4 \cdot 0.78 = 0.31 \text{ м.}$$

Подставив в (4) – (6) числовые значения всех необходимых величин, получим:

$$M_{ox} = 22.92 \text{ Нм,} \quad M_{oy} = 2.45 \text{ Нм,} \quad M_{oz} = 7.87 \text{ Нм}$$

Модуль главного момента

$$M_o = \sqrt{(M_{ox})^2 + (M_{oy})^2 + (M_{oz})^2} = \sqrt{22.92^2 + 2.45^2 + 7.87^2} = 24.36 \text{ Н·м.}$$

Направляющие косинусы

$$\cos(M_o, i) = \frac{M_{ox}}{M_o} = \frac{22.92}{24.36} = 0.941,$$

$$\cos(M_o, j) = \frac{M_{oy}}{M_o} = \frac{2.45}{24.36} = 0.101,$$

$$\cos(M_o, k) = \frac{M_{oz}}{M_o} = \frac{7.87}{24.36} = 0.323.$$

Примечание. При вычислении моментов сил относительно координатных осей во многих случаях целесообразно разлагать силу на составляющие, параллельные осям координат, а затем применять теорему Вариньона. Проиллюстрируем этот метод на примере вычисления момента силы \dot{F}_4 относительно оси Oz . Выше показано разложение силы \dot{F}_4 на две составляющие \dot{F}'_4 и $\dot{F}_4^{(3)}$ ($\dot{F}_4 = \dot{F}'_4 + \dot{F}_4^{(3)}$). Далее разложим силу \dot{F}'_4 , расположенную в координатной плоскости Oxy на две составляющие $\dot{F}_4^{(1)}$ и $\dot{F}_4^{(2)}$, параллельные соответственно осям Ox и Oy (рис. С-3.6б). Следовательно, $\dot{F}'_4 = \dot{F}_4^{(1)} + \dot{F}_4^{(2)}$, а $\dot{F}_4 = \dot{F}_4^{(1)} + \dot{F}_4^{(2)} + \dot{F}_4^{(3)}$, то-есть сила \dot{F}_4 разложена на составляющие $\dot{F}_4^{(1)}$, $\dot{F}_4^{(2)}$, $\dot{F}_4^{(3)}$, параллельные осям координат (рис. С-3.6в). Модули сил $\dot{F}_4^{(1)}$ и $\dot{F}_4^{(2)}$ легко вычисляются:

$$F_4^{(1)} = F'_4 \cdot \sin g = F_4 \cdot \sin b \cdot \sin g = 7.8 \text{ Н},$$

$$F_4^{(2)} = F'_4 \cdot \cos g = F_4 \cdot \sin b \cdot \cos g = 6.2 \text{ Н},$$

На основании теоремы Вариньона получим

$$M_z(\dot{F}_4) = M_z(\dot{F}_4^{(1)}) + M_z(\dot{F}_4^{(2)}) + M_z(\dot{F}_4^{(3)}) \quad ,$$

$$M_z(\dot{F}_4^{(1)}) = -F_4^{(1)} \cdot AB = -3.12 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

$$M_z(\dot{F}_4^{(2)}) = M_z(\dot{F}_4^{(3)}) = 0 \quad .$$

Следовательно, $M_z(\dot{F}_4) = -3.12 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

ЗАДАНИЕ С-5

Равновесие тел с учетом сил трения

Определить, при каких значениях силы \vec{F} возможно равновесие конструкции, если коэффициент трения скольжения между тормозной колодкой и касающимся с ней телом равен f . Шириной колодки пренебречь, считая контакт точечным. Определить также реакции опор O, A, B, C, D , соответствующие предельному состоянию равновесия конструкции. Трением в шарнирах и опорах пренебречь. Схемы вариантов приведены на рис.26-30, а необходимые данные - в таблице 5.

Таблица 5

№№ п/п	$P, \text{ кН}$	$Q, \text{ кН}$	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$l, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	f
1	0.1	0.4	0.5	0.7	0.03	45	0.10
2	0.2	0.6	0.6	0.4	—	30	0.20
3	0.3	0.8	0.8	0.2	0.06	60	0.25
4	0.4	0.5	0.4	0.5	0.08	30	0.15
5	0.5	0.9	0.3	0.7	0.04	60	0.10
6	0.6	1.0	0.2	0.6	—	45	0.25
7	0.4	1.2	0.7	0.2	0.06	30	0.20
8	0.3	1.4	0.8	0.4	—	60	0.15
9	0.5	1.6	0.5	0.3	—	45	0.20
10	0.3	1.2	0.6	0.3	0.08	30	0.25
11	0.1	0.4	0.5	0.7	0.03	45	0.10
12	0.2	0.6	0.6	0.4	—	30	0.20
13	0.3	0.8	0.8	0.2	—	60	0.25
14	0.4	0.5	0.4	0.5	0.08	30	0.15
15	0.5	0.9	0.3	0.7	—	60	0.10
16	0.6	1.0	0.2	0.6	0.05	45	0.25
17	0.4	1.2	0.7	0.2	0.9	30	0.20
18	0.3	1.4	0.8	0.4	0.02	60	0.15
19	0.5	1.6	0.5	0.3	0.08	45	0.20
20	0.3	1.2	0.6	0.3	—	30	0.25
21	0.1	0.4	0.5	0.7	0.03	—	0.10
22	0.2	0.6	0.6	0.4	0.04	—	0.20
23	0.3	0.8	0.8	0.2	0.06	45	0.25
24	0.4	0.5	0.4	0.5	0.08	30	0.15
25	0.5	0.9	0.3	0.7	0.04	30	0.10
26	0.6	1.0	0.2	0.6	0.05	60	0.25
27	0.4	1.2	0.7	0.2	0.06	45	0.20
28	0.3	1.4	0.8	0.4	0.02	30	0.15
29	0.5	1.6	0.5	0.3	0.08	60	0.20
30	0.3	1.2	0.6	0.3	0.08	45	0.25

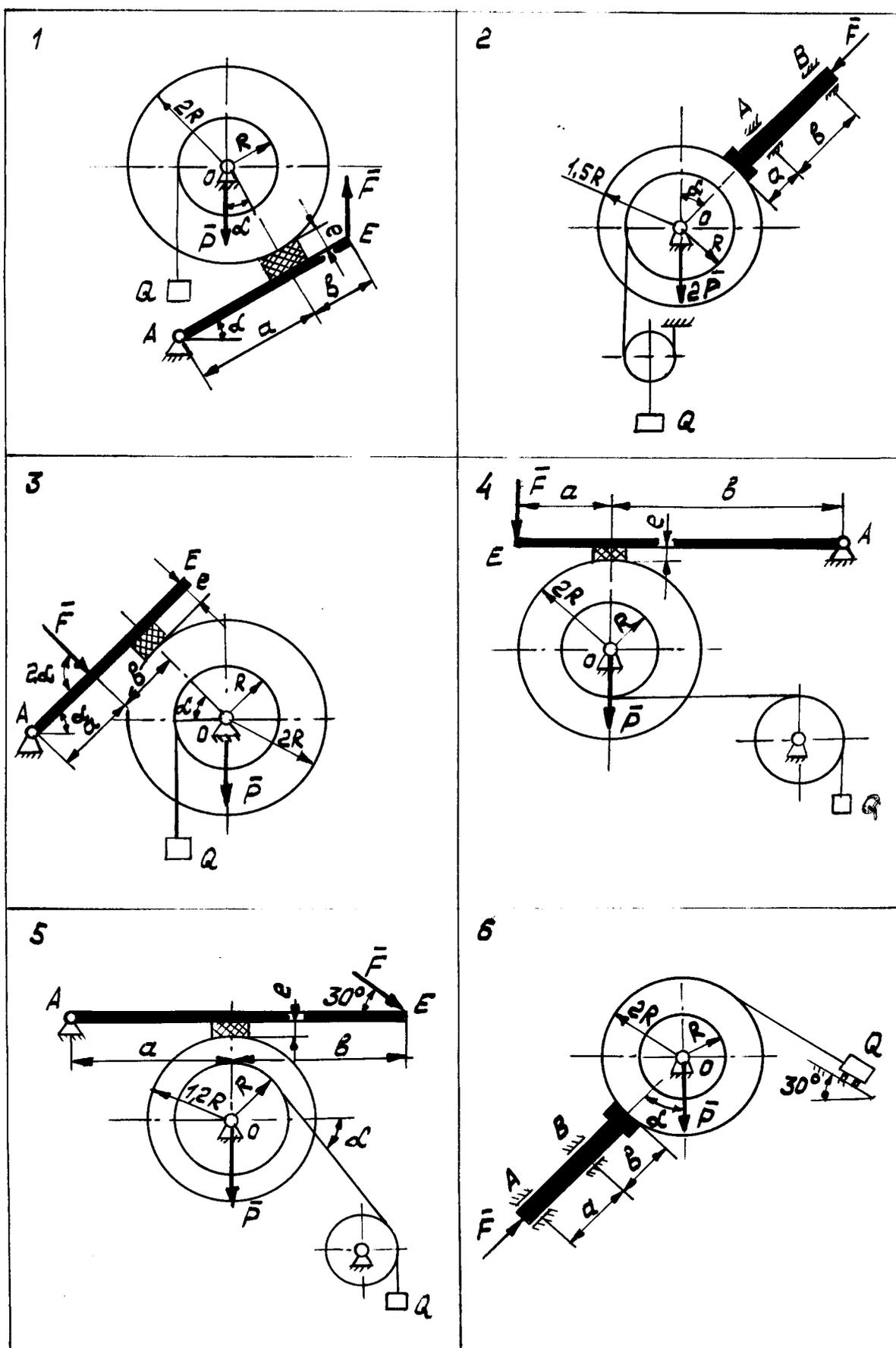


Рис. С-5.1

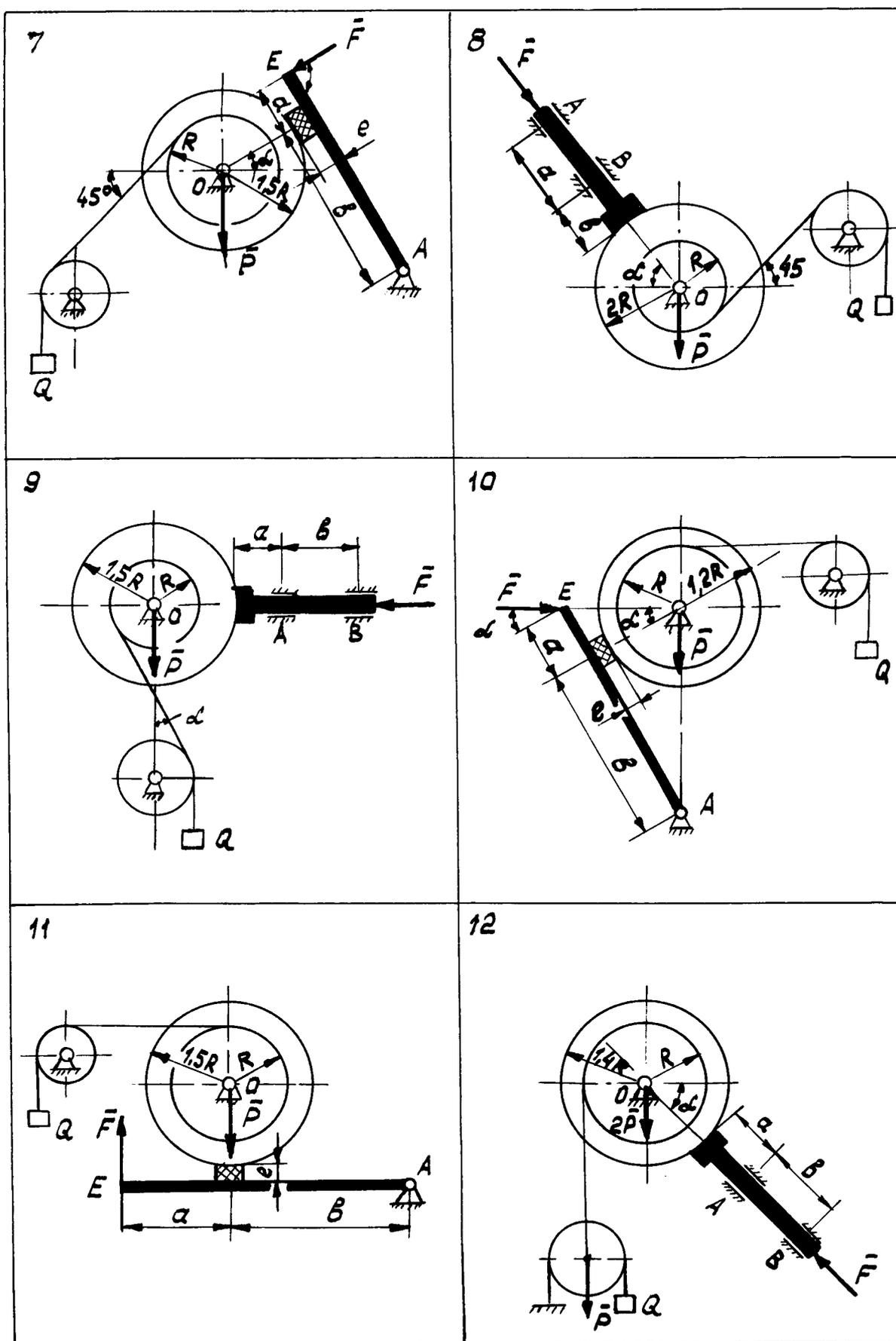


Рис. С-5.2

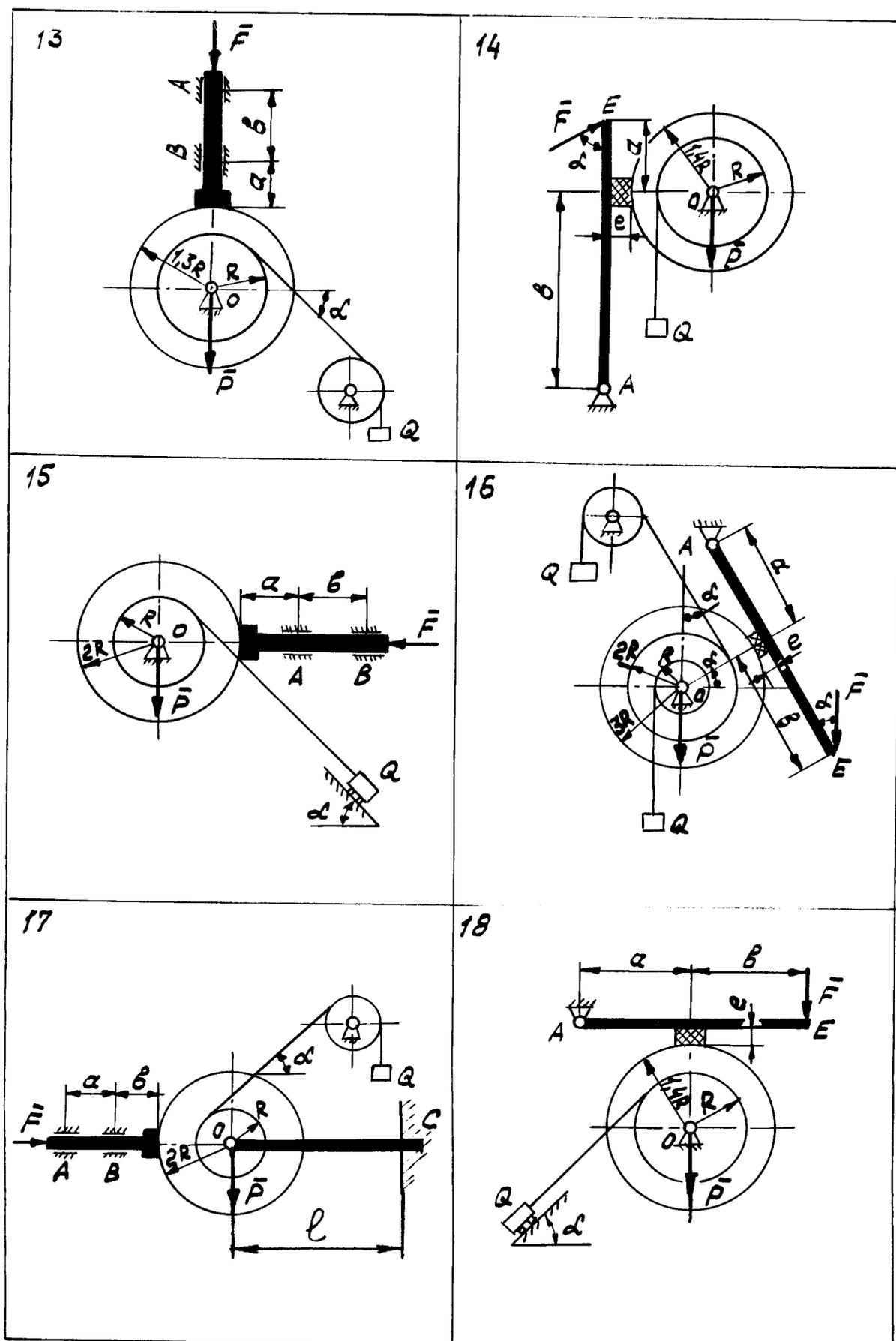


Рис. С-5.3

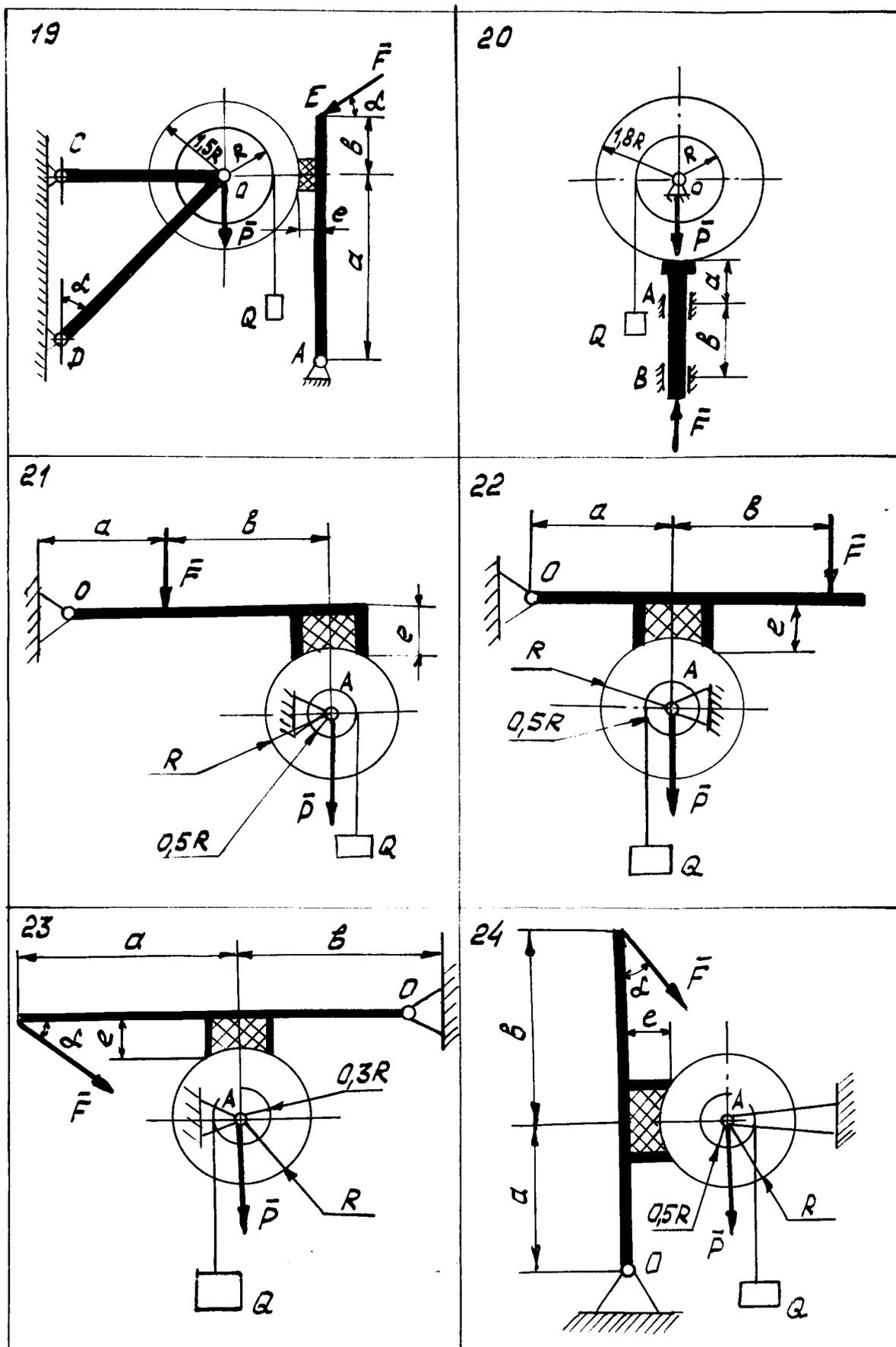


Рис. С-5.4

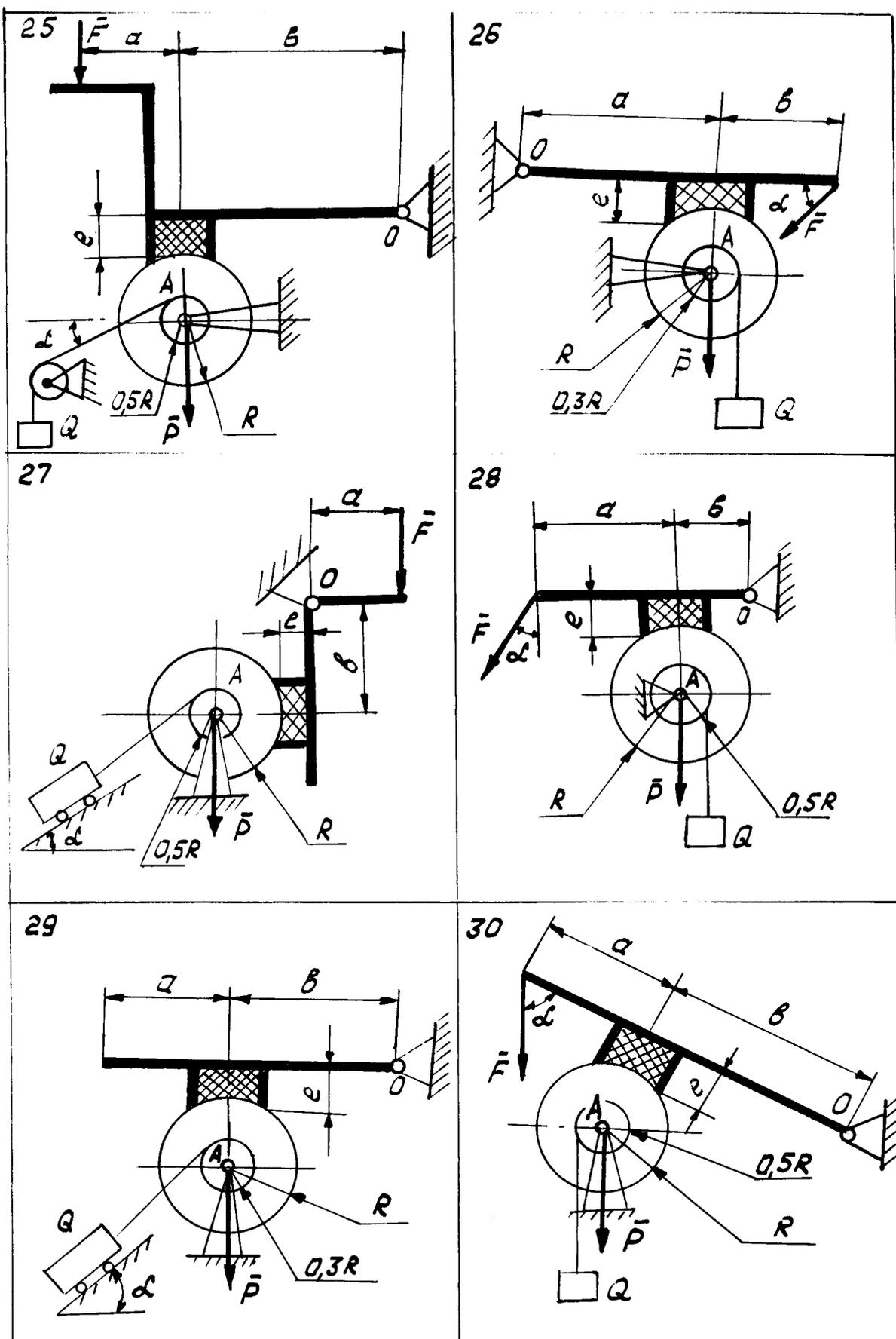


Рис. С-5.5

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: схема конструкции (рис.31а); $P = 0.3$ кН, $Q = 1.2$ кН, $a = 0.5$ м, $b = 0.2$ м, $l = 0.04$ м, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $f = 0.25$.

Определить, при каких значениях силы \vec{F} возможно равновесие конструкции. Определить также реакции опор O и A , соответствующие предельному состоянию равновесия.

РЕШЕНИЕ

Рассматриваемая конструкция состоит из трех тел: тележки, барабана и стержня AE с тормозной колодкой.

Рассмотрим равновесие, предполагая, что оно имеет место, для каждого из тел в отдельности.

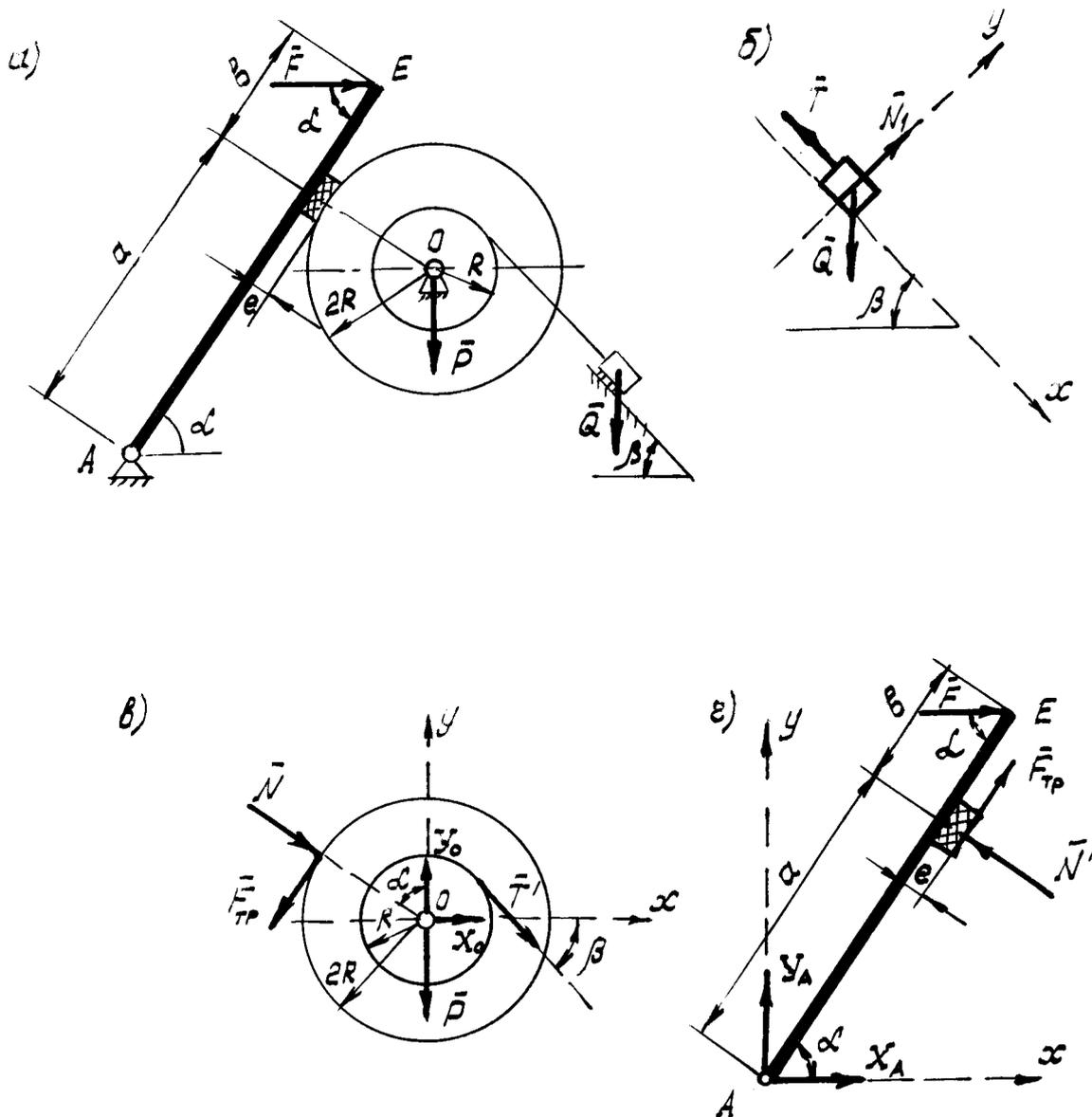


Рис. С-5.6

Сначала запишем уравнения равновесия тележки. На тележку действуют: сила тяжести \dot{Q} , реакция нити \dot{T} и нормальная реакция наклонной плоскости \dot{N}_1 (рис.31б). Выбрав координатные оси, как показано на рисунке 31б, запишем следующие уравнения равновесия указанной системы сил:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0, \\ \sum_i F_{iy} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \cdot \sin b - T = 0. \quad (1) \\ N_1 - Q \cdot \cos b = 0. \quad (2) \end{array} \right.$$

Далее запишем уравнения равновесия барабана (рис.31в). На барабан действуют: сила тяжести \dot{P} , реакция нити \dot{T}' , реакция шарнирно-неподвижной опоры О, представленная двумя взаимно перпендикулярными составляющими \dot{X}_o , \dot{Y}_o , давление \dot{N} тормозной колодки и сила трения \dot{F}_{mp} . Учитывая, что величины сил \dot{T} и \dot{T}' равны ($T = T'$), уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, действующей на барабан представим в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0, \quad T \cdot \cos b + N \cdot \sin a - F_{mp} \cdot \cos a + X_o = 0, \quad (3) \\ \sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_o - P - T \cdot \sin b - F_{mp} \cdot \sin a - N \cdot \cos a = 0, \quad (4) \\ \sum_i m_o(\dot{F}_i) = 0, \quad F_{mp} \cdot 2 \cdot R - T \cdot R = 0. \quad (5) \end{array} \right.$$

Затем рассмотрим равновесие стержня АЕ с тормозной колодкой (рис.31г). На стержень АЕ с тормозной колодкой действует следующая плоская произвольная система сил: сила \dot{F} , нормальная реакция \dot{N}' барабана, сила трения \dot{F}'_{mp} и реакция шарнирно-неподвижной опоры А, представляемая составляющими \dot{X}_A , \dot{Y}_A . Согласно аксиоме о равенстве действия и противодействия величины сил \dot{N} и \dot{N}' , а также \dot{F}_{mp} и \dot{F}'_{mp} равны

$$N = N', \quad F_{mp} = F'_{mp}. \quad (6)$$

Уравнения равновесия указанной системы сил с учетом соотношений (6) будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i F_{ix} = 0, \quad X_A + F - N \cdot \sin a + F_{mp} \cdot \cos a = 0, \quad (7) \\ \sum_i F_{iy} = 0, \quad Y_A + N \cdot \cos a + F_{mp} \cdot \sin a = 0, \quad (8) \\ \sum_i m_o(\dot{F}_i) = 0, \quad N \cdot a + F_{mp} \cdot l - F \cdot (a + b) \cdot \sin a = 0. \quad (9) \end{array} \right.$$

И, наконец, запишем условия равновесия конструкции при наличии трения:

$$F_{mp} \leq f \cdot N \quad (10)$$

Система полученных линейных алгебраических уравнений (1) – (5), (7) – (9) с учетом неравенства (10) позволяет полностью решить поставленную задачу.

Прежде всего необходимо найти, при каких значениях силы F конструкция будет находиться в равновесии (то есть будет удовлетворяться неравенство (10)). С этой целью найдем на основании уравнений (1), (5) и (9) величины сил F_{mp} и N , входящих в неравенство (10):

$$F_{mp} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b, \quad (11)$$

$$N = \frac{1}{a} \cdot \left[F \cdot (a + b) \cdot \sin a - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \cdot l \right] \quad (12)$$

В результате подстановки (11) и (12) в (10) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \leq \frac{f}{a} \cdot \left[F \cdot (a + b) \cdot \sin a - \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \sin b \cdot l \right] \quad (13)$$

На основании (13) можно найти значения величины силы F , при которых рассматриваемая конструкция будет находиться в состоянии равновесия:

$$F \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot \sin b \cdot (a + f \cdot l)}{f \cdot (a + b) \cdot \sin a} \quad (14)$$

При заданных параметрах, входящих в правую часть (14), значения величины силы F , при которых конструкция будет находиться в равновесии, определится неравенством:

$$F \geq 1.43 \text{ кН} \quad (15)$$

В случае предельного состояния равновесия конструкции сила F будет иметь минимальное значение

$$F_{\min} = 1.43 \text{ кН}. \quad (16)$$

Учитывая (16) и данные задачи, на основании (1), (3), (4), (7), (8), (11) и (12) найдем реакции неподвижных опор O и A в случае предельного состояния равновесия конструкции:

$$X_o = -1.86 \text{ кН}, \quad Y_o = 2.12 \text{ кН}, \quad X_A = -0.17 \text{ кН}, \quad Y_A = -1.22 \text{ кН}.$$

Следует заметить, что уравнение равновесия (2) оказалось не востребованным так как по условию задачи не требовалось определить нормальную реакцию N наклонной плоскости.

ЗАДАНИЕ К-2

Тело D (рис.2.1-2.6) вращается вокруг неподвижной оси по закону $j = j(t)$ (j измеряется в радианах, t - в секундах; положительное направление отсчета угла j показано на рисунках дуговой стрелкой). По телу вдоль прямой AB (рис.2.1, 2.5, 2.6), или по окружности радиуса R (рис.2.2-2.4) движется точка M по закону $S=OM=f(t)$ см (положительное и отрицательное направления отсчета координаты S от точки O указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t=t_1$ сек. Необходимые данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ вар.	№ рис.	Уравнение вращательного движения $j = j(t)$ (рад)	Уравнение движения точки M $OM = S = f(t)$ (см)	t_1 (сек)	R (см)	a (см)
1	2.1	$2pt^2$	$16 \cos(pt/4)$	2	-	16
2	2.2	$2pt^2$	$10pt$	0.5	10	-
3	2.3	$2pt$	$5pt$	0	5	4
4	2.4	pt^2	$20p \sin(pt/3)$	0,5	20	-
5	2.5	$\sin(pt/6)$	$5 - 2t^2$	1	-	5
6	2.6	t^3	$7 - 4t^2$	1	-	7
7	2.1	$2t$	$5 - 5t^2$	1	-	5
8	2.2	pt^3	$20pt$	1	20	-
9	2.3	$3pt^2$	$20pt^2$	1	80	60
10	2.4	pt^3	$5pt^2$	1	5	-
11	2.5	$\cos(pt/3)$	$3t - t^2$	1	-	3
12	2.6	t^2	$4 \sin(pt/4)$	2	-	4
13	2.1	pt^2	$6 \sin(pt/6)$	1	-	6
14	2.2	$2pt$	$10pt^2$	1	10	-
15	2.3	pt^3	$p(2 - t^2)$	1	1	2
16	2.4	$2pt$	$10p \cos(pt/6)$	2	10	-
17	2.5	$\cos(pt/2)$	t^2	1	-	2
18	2.6	$2t$	$8 \sin(pt/2)$	2	-	8
19	2.1	$p(t^2 + 3t)$	$3t^2 - 8t$	1	-	8
20	2.2	pt^2	$8pt$	1,5	8	-
21	2.3	$4pt^2$	$2p(t + t^2)$	2	12	10
22	2.4	$4 + 2pt^2$	$3p(2 - t^3)$	1	2	-
23	2.5	$\cos(pt/6)$	$2 - 4t^2$	1	-	4
24	2.6	$3t - t^2$	$2t^2 - 4$	1	-	6
25	2.1	$8pt + pt^2$	$4 \cos(pt/2)$	1	-	4
26	2.2	$3pt^2$	$40pt^2$	0,5	20	-
27	2.3	$2pt^3$	$20pt$	1	8	6

№ вар.	№ рис.	Уравнение вращательного движения $j = j(t)$ (рад)	Уравнение движения точки M $OM = S = f(t)$ (см)	t_1 (сек)	R (см)	a (см)
28	2.4	$0,6 pt^2$	$p(10t - 2t^2)$	1	16	-
29	2.5	$\sin(pt/3)$	$1 - 2t^2$	1	-	2
30	2.6	$2t$	$4 \cos(pt/3)$	1	-	4

Пример выполнения задания К-2

Диск радиуса $R = 0,5$ м вращается вокруг своего вертикального диаметра OB (рис.2.7) по закону $j = t^3 - 2t^2$ (j измеряется в радианах, t - в секундах; положительное направление отсчета угла j показано на рисунке дуговой стрелкой). По ободу диска движется точка M по закону $S = OM = \frac{pR}{6}(7t - 2t^2)$ м. (положительное и отрицательное направления отсчета дуговых координат S от точки O указаны соответственно знаками плюс (+) и минус (-)). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1$ секунда.

Решение. Для определенности свяжем жестко с диском систему координат O_1xyz (координатная плоскость O_1yz совмещена с плоскостью диска). Движение точки M рассматриваем как сложное. Вращение диска (подвижной системы координат O_1xyz) вокруг вертикальной неподвижной оси O_{3z_1} считаем переносным. При этом движение точки M по ободу диска будет относительным. Рассмотрим более полно эти движения.

1. Закон переносного вращательного движения задан уравнением

$$j = t^3 - 2t^2 \quad . \quad (1)$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение переносного вращения как алгебраические величины:

$$\begin{aligned} w_e = \dot{j} &= 3t^2 - 4t & ; \\ e_e = \ddot{j} &= 6t - 4 & . \end{aligned}$$

В момент времени $t_1 = 1$ сек.

$$w_e = -1 \text{ с}^{-1} \quad ; \quad e_e = 2 \text{ с}^{-2} \quad . \quad (2)$$

Знак угловой скорости определяет направление вращения тела вокруг неподвижной оси. В рассматриваемом случае $w_e < 0$. Это означает, что вращение в момент времени $t_1 = 1$ сек. происходит в направлении убывания угла j (то есть в отрицательном направлении отсчета j). Путем сопоставления знаков угловой скорости и углового ускорения можно установить характер вращательного движения, то есть является оно ускоренным или замедленным. В рассматриваемом случае, как следует из (2), знаки угловой скорости и углового ускорения разные ($w_e < 0$, $e_e > 0$). Это

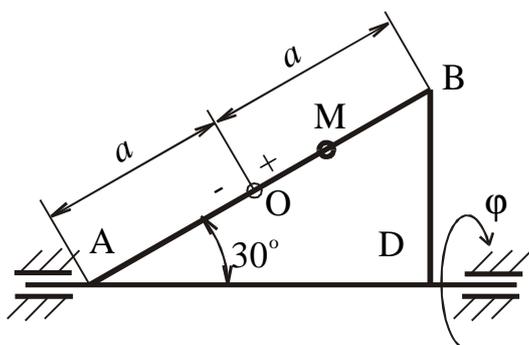


Рис. 2.1

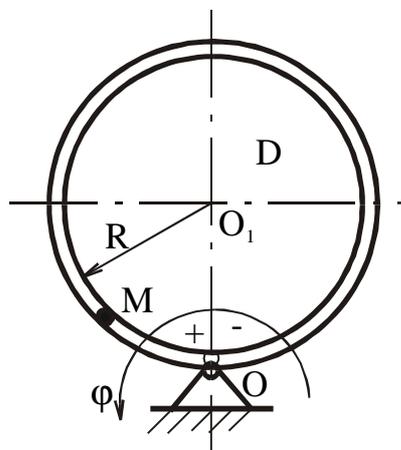


Рис. 2.2

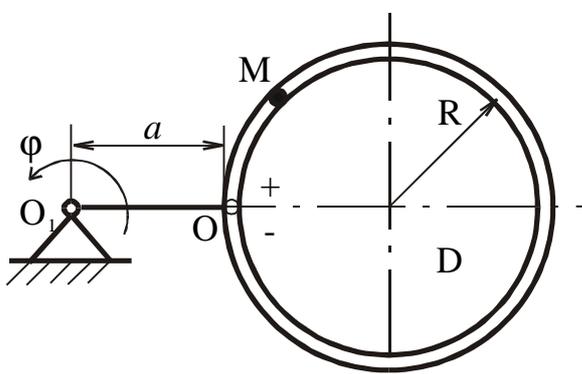


Рис. 2.3

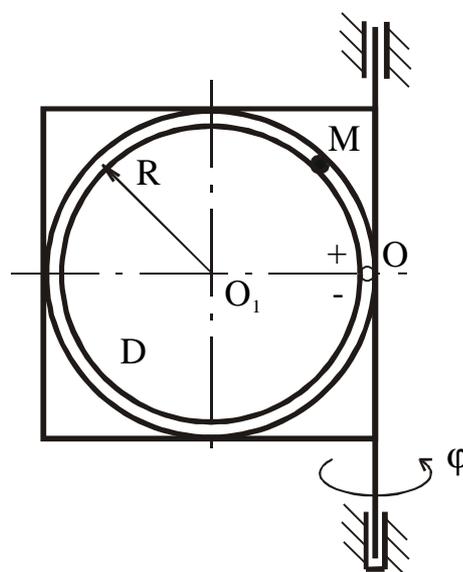


Рис. 2.4

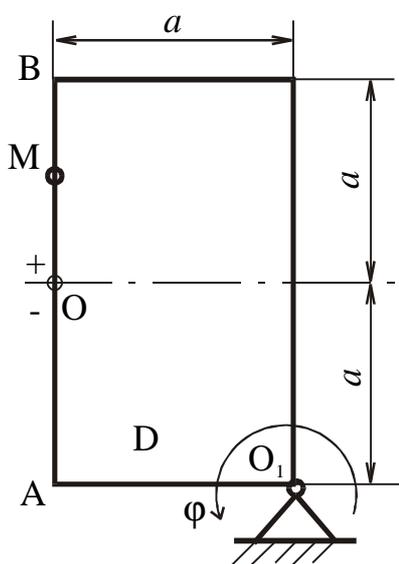


Рис. 2.5

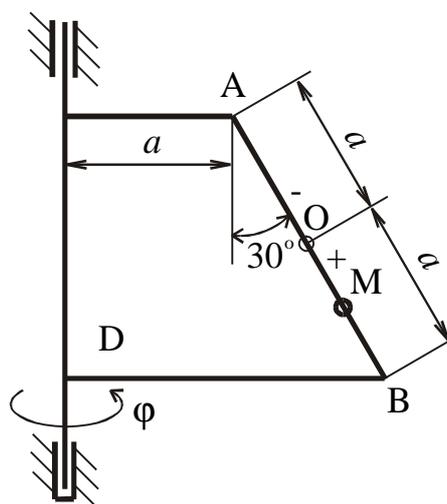


Рис. 2.6

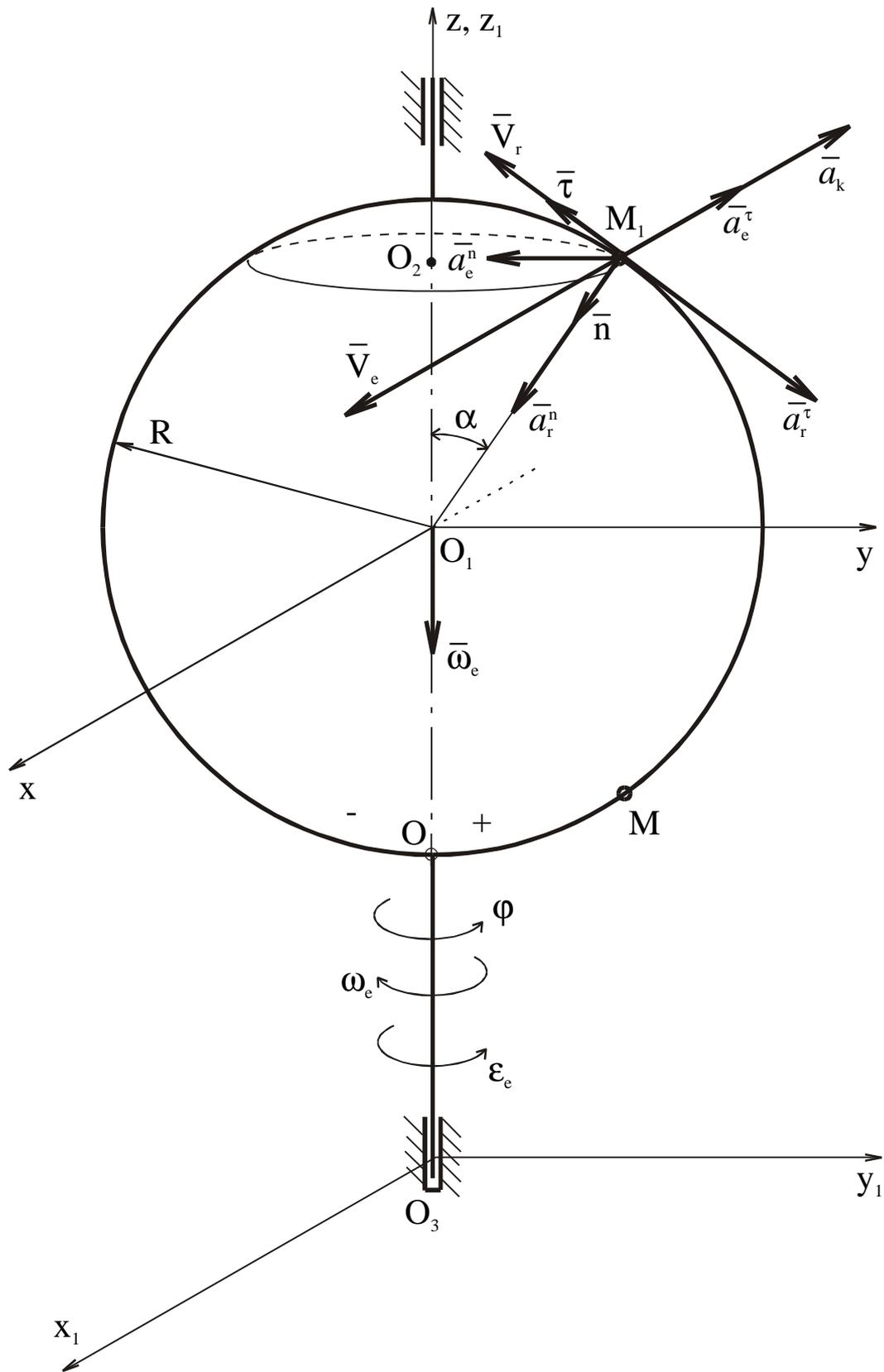


Рис. 2.7

показывает, что в момент времени $t_1=1$ сек. абсолютная величина угловой скорости убывает, то есть вращение диска является замедленным. Угловая ско-

рость и угловое ускорение на рисунке 2.5 условно показаны дуговыми стрелками вокруг оси вращения.

2. Относительное движение точки M задано естественным способом, так как известны: траектория относительного движения (окружность радиуса $R=0,5$ м с центром в точке O_1), начало и положительное направление отсчета дуговых координат S , а также закон движения точки по траектории, определяемый уравнением

$$S = \frac{pR}{6} (7t - 2t^2) \quad \text{м} . \quad (3)$$

Сначала установим положение точки M на дуге окружности в момент времени $t_1=1$ сек. Подставляя в уравнение (3) $t_1=1$ сек., получим

$$S_1 = \frac{5pR}{6} \quad (\text{м}) \quad (4)$$

Центральный угол, соответствующий дуге окружности (4), определится по формуле

$$\angle OO_1M_1 = \frac{S_1}{R} = \frac{5p}{6} \quad \text{рад.}$$

Таким образом, как следует из рисунка 2.5, угол

$$a = p - \frac{5p}{6} = \frac{p}{6} \quad \text{рад.}$$

В положении точки M_1 , покажем орты двух естественных осей \dot{t} и \dot{n} (орт \dot{t} направляется по касательной к окружности радиуса R в сторону возрастания дуговых координат S , а орт главной нормали \dot{n} - к центру окружности O_1).

3. Найдем абсолютную скорость точки M по формуле:

$$\dot{V}_a = \dot{V}_e + \dot{V}_r \quad , \quad (5)$$

где \dot{V}_e и \dot{V}_r соответственно переносная и относительная скорости точки.

Для определения переносной скорости точки в момент времени $t_1=1$ сек. нужно мысленно остановить относительное движение точки в положении M_1 , и определить ее скорость как точки, жестко связанной с подвижной системой координат, то есть с диском. Диск, как было указано выше, совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси O_3z_1 . В силу этого величина переносной скорости (V_e) определится по формуле

$$V_e = |w_e| h \quad (6)$$

где h - расстояние от точки M_1 до оси вращения. Из прямоугольного треугольника $O_1M_1O_2$ (рис.2.5)

$$h = M_1O_2 = R \cdot \sin a = 0,5 \cdot \sin \frac{p}{6} = 0,25 \quad \text{м.} \quad (7)$$

Таким образом, на основании (6) с учетом (2) и (7) величина переносной скорости точки M в момент $t_1=1$ сек. будет

$$V_e = 0,25 \quad \text{м/с.} \quad (8)$$

Вектор \dot{V}_e направлен перпендикулярно плоскости диска (значит параллельно оси O_1x) в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой w_e .

Для определения относительной скорости точки M_1 (\dot{V}_r) нужно мысленно остановить переносное движение (вращательное движение диска) и найти скорость точки при ее движении по окружности радиуса R по закону (3). Проекция вектора \dot{V}_r на направление орта \dot{t} определяется по формуле:

$$V_{rt} = \mathfrak{S} = \frac{pR}{6}(7 - 4t) \quad . \quad (9)$$

В момент времени $t_1=1$ секунда

$$V_{rt} = \frac{pR}{2} = \frac{p}{4} \quad \text{м/с.} \quad (10)$$

Положительный знак проекции V_{rt} указывает, что вектор \dot{V}_r направлен в сторону \dot{t} . В общем случае величина относительной скорости (V_r) определяется по формуле

$$V_r = |V_{rt}| = \frac{p}{4} \approx 0,785 \quad \text{м/с.} \quad (11)$$

Так как векторы \dot{V}_e и \dot{V}_r взаимно перпендикулярны (вектор \dot{V}_r расположен в координатной плоскости O_1yz , а вектор \dot{V}_e параллелен оси O_1x), величина абсолютной скорости (V_a) может быть определена на основании теоремы Пифагора. В момент времени $t_1=1$ сек.

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = 0,82 \quad \text{м/с.} \quad (12)$$

4. Определим абсолютное ускорение точки M .

В рассматриваемом случае переносное движение не является поступательным. В силу этого найдем абсолютное ускорение точки на основании теоремы Кориолиса по формуле

$$\dot{a}_a = \dot{a}_e + \dot{a}_r + \dot{a}_k \quad , \quad (13)$$

где \dot{a}_e , \dot{a}_r , \dot{a}_k - соответственно переносное, относительное и кориолисово ускорения точки.

При определении абсолютного ускорения целесообразно разложить \dot{a}_e и \dot{a}_r на нормальную и касательную составляющие

$$\mathbf{r} \dot{a}_e = \mathbf{r} \dot{a}_e^n + \mathbf{r} \dot{a}_e^t \quad , \quad \mathbf{r} \dot{a}_r = \mathbf{r} \dot{a}_r^n + \mathbf{r} \dot{a}_r^t \quad .$$

При этом соотношение (13) примет вид

$$\mathbf{r} \dot{a}_a = \mathbf{r} \dot{a}_e^n + \mathbf{r} \dot{a}_e^t + \mathbf{r} \dot{a}_r^n + \mathbf{r} \dot{a}_r^t + \mathbf{r} \dot{a}_k \quad (14)$$

При определении переносного ускорения точки в момент времени $t_1=1$ сек. аналогично, как и при определении переносной скорости, мысленно останавливаем относительное движение и определяем ускорение точки M_1 как точки, неизменно связанной с диском (с подвижной системой координат). При вращательном движении диска вокруг неподвижной оси O_3z_1 величины нормального и касательного ускорения точки M_1 диска определяются соответственно по формулам

$$|\mathbf{a}_e^n| = w_e^2 h = 0,25 \quad \text{м/с}^2, \quad (15)$$

$$|\mathbf{a}_e^t| = |e_e| h = 0,5 \quad \text{м/с}^2. \quad (16)$$

Вектор \mathbf{a}_e^n направлен по радиусу окружности, описываемой точкой M_1 диска, к центру этой окружности - точке O_2 (\mathbf{a}_e^n параллелен оси O_1y). Ускорение \mathbf{a}_e^t направлено по касательной к этой окружности, то есть перпендикулярно \mathbf{a}_e^n (\mathbf{a}_e^t параллелен оси O_1x). Так как диск в указанный момент времени $t_1=1$ сек. вращается замедленно, то векторы \dot{V}_e и \mathbf{a}_e^t направлены в противоположные стороны, то есть направление вектора \mathbf{a}_e^t определяется направлением углового ускорения e_e , которое показано на рис. 2.7 дуговой стрелкой.

Относительное движение, как было подчеркнуто выше, задано естественным способом. При этом проекции относительного ускорения точки на естественные оси, положительные направления которых определяются ортами \hat{t} и \hat{n} , можно найти по формулам

$$a_{rt} = \mathfrak{S} = -\frac{2}{3} pR = -\frac{p}{3} = -1,047 \quad \text{м/с}^2, \quad (17)$$

$$a_m = \frac{V_r^2}{r} = \frac{V_r^2}{R} = 1,232 \quad \text{м/с}^2. \quad (18)$$

Отрицательный знак проекции a_{rt} указывает, что вектор \mathbf{a}_r^t направлен в противоположную сторону орта \hat{t} . Нормальное ускорение всегда направлено в сторону орта \hat{n} , то есть по главной нормали к центру кривизны траектории точки. Таким образом, в рассматриваемом случае вектор \mathbf{a}_r^n направлен к центру O_1 , окружности радиуса R , являющейся траекторией относительного движения точки. Величины относительного касательного ($|\mathbf{a}_r^t|$) и относительного нормального ($|\mathbf{a}_r^n|$) ускорений согласно (17) и (18) будут соответственно равны

$$|\mathbf{a}_r^t| = |a_{rt}| = 1,047 \quad \text{м/с}^2, \quad (19)$$

$$|\mathbf{a}_r^n| = a_m = 1,232 \quad \text{м/с}^2. \quad (20)$$

Ускорение Кориолиса ($|\mathbf{a}_k|$) определяется по формуле

$$\mathbf{a}_k = 2\mathbf{w}_e \times \dot{V}_r. \quad (21)$$

Вектор угловой скорости переносного вращения \mathbf{w}_e направлен по оси вращения в ту сторону, откуда вращение наблюдается против хода часовой стрелки (рис.2.5). В момент времени $t_1=1$ сек., учитывая (2),

$$|\mathbf{w}_e| = 1 \quad \text{сек}^{-1}. \quad (22)$$

Модуль ускорения Кориолиса ($|\mathbf{a}_k|$) на основании свойств векторного произведения двух векторов, очевидно, равен

$$|\mathbf{a}_k| = 2 \cdot |\mathbf{w}_e| \cdot |\dot{V}_r| \cdot \sin(\mathbf{w}_e \wedge \dot{V}_r). \quad (23)$$

Учитывая (22), (11), на основании (23) получим:

$$|\dot{\mathbf{a}}_k| = 2 \cdot 1 \cdot 0,785 \cdot \sin 120^\circ = 1,36 \quad \text{м/с}^2. \quad (24)$$

Направление ускорения Кориолиса определяется направлением векторного произведения векторов $\dot{\mathbf{W}}_e$ и $\dot{\mathbf{V}}_r$, то есть направлено перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\dot{\mathbf{W}}_e$ и $\dot{\mathbf{V}}_r$ (вектор $\dot{\mathbf{W}}_e$ при этом нужно перевести в точку M_1) в сторону, откуда кратчайшее совмещение $\dot{\mathbf{W}}_e$ с $\dot{\mathbf{V}}_r$ видно против хода часовой стрелки. Так как векторы $\dot{\mathbf{W}}_e$ и $\dot{\mathbf{V}}_r$ расположены в координатной плоскости O_1yz , то $\dot{\mathbf{a}}_k$ направлено параллельно оси O_1x в сторону, противоположную оси O_1x .

Направление ускорения Кориолиса можно найти другим способом, применив правило Н.Е.Жуковского. Суть правила Н.Е.Жуковского состоит в следующем. Прежде всего нужно найти проекцию вектора $\dot{\mathbf{V}}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (на плоскость O_1xy). В данном случае эта проекция направлена также, как вектор \mathbf{r}_e^n . Затем необходимо повернуть найденную проекцию в направлении вращения, указанному дуговой стрелкой w_e , на угол $\pi/2$. Полученное в результате поворота направление проекции относительной скорости будет соответствовать направлению $\dot{\mathbf{a}}_k$.

Для определения абсолютного ускорения найдем его проекции на оси координат x, y, z . Согласно (14) проекция абсолютного ускорения на любую ось равна алгебраической сумме проекций ускорений $\mathbf{a}_e^n, \mathbf{a}_e^t, \mathbf{a}_r^n, \mathbf{a}_r^t, \dot{\mathbf{a}}_k$ на ту же ось. Проекции этих ускорений на оси координат легко найти из чертежа. Таким образом, для момента времени $t_1 = 1$ сек.

$$a_{ax} = -|\mathbf{a}_e^t| - |\dot{\mathbf{a}}_k| = -0,5 - 1,36 = -1,86 \quad \text{м/с}^2,$$

$$a_{ay} = -|\mathbf{a}_e^n| - |\mathbf{a}_r^n| \cdot \cos 60^\circ + |\mathbf{a}_r^t| \cdot \cos 30^\circ = -0,25 - 1,232 \cdot \frac{1}{2} + 1,047 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,04 \quad \text{м/с}^2,$$

$$a_{az} = |\mathbf{a}_r^n| \cdot \cos 30^\circ - |\mathbf{a}_r^t| \cdot \cos 60^\circ = 1,232 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1,047 \cdot \frac{1}{2} = 1,59 \quad \text{м/с}^2.$$

По найденным трем проекциям абсолютного ускорения нетрудно найти его модуль и направление. Модуль абсолютного ускорения

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{1,86^2 + 0,04^2 + 1,59^2} = 2,45 \quad \text{м/с}^2.$$

ЗАДАНИЕ К-3

В планетарном механизме (рис.3.1-3.6) шестерня I радиуса R_1 неподвижна, а кривошип OA , вращаясь вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, приводит в движение свободно насаженную на его конец A шестерню II радиуса R_2 . Для указанного на рисунке положения механизма найти скорости и ускорения точек A и B , если для соответствующего момента времени известны абсолютные величины угловой скорости и углового ускорения кривошипа (w_{OA} , e_{OA}). На рисунках условно показаны направления угловой скорости и углового ускорения дуговыми стрелками вокруг оси вращения. При этом направление угловой скорости соответствует направлению вращательного движения кривошипа. Угловое ускорение направлено в сторону угловой скорости при ускоренном вращении и в противоположную - при замедленном. Необходимые данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

№ варианта	№ рисунка	w_{OA} (с ⁻¹)	e_{OA} (с ⁻²)	R_1 (м)	R_2 (м)	α (град.)
1	3.1	1	9	0,5	0,1	0
2	3.2	1	8	0,6	0,1	30
3	3.3	2	7	0,7	0,2	60
4	3.4	2	6	0,8	0,2	90
5	3.5	2	3	0,6	0,1	60
6	3.6	3	5	0,7	0,2	120
7	3.1	3	5	0,9	0,3	120
8	3.2	3	4	0,5	0,5	150
9	3.3	4	3	0,6	0,4	180
10	3.4	4	2	0,7	0,4	210
11	3.5	2	4	0,7	0,2	90
12	3.6	3	6	0,7	0,2	150
13	3.1	5	1	0,8	0,5	240
14	3.2	1	1	0,5	0,1	0
15	3.3	2	2	0,5	0,2	30
16	3.4	3	1	0,6	0,3	60
17	3.5	4	7	0,8	0,3	180
18	3.6	5	9	0,8	0,3	240
19	3.1	4	2	0,6	0,4	90
20	3.2	5	1	0,7	0,5	120
21	3.3	6	2	0,7	0,1	150
22	3.4	7	1	0,8	0,2	180
23	3.5	4	8	0,8	0,3	210
24	3.6	1	1	0,5	0,1	0
25	3.1	8	2	0,8	0,3	210
26	3.2	9	1	0,9	0,4	240

№ варианта	№ рисунка	w_{OA} (с ⁻¹)	e_{OA} (с ⁻²)	R_1 (м)	R_2 (м)	a (град.)
27	3.3	1	1	0,6	0,1	0
28	3.4	1	2	0,6	0,1	30
29	3.5	1	2	0,6	0,2	30
30	3.6	2	3	0,6	0,3	60

Пример выполнения задания К-3

Дано: кинематическая схема планетарного механизма (рис.3.7); $R_1=0,6$ м ; $R_2=0,4$ м ; $w_{OA} = 1$ с⁻¹ ; $e_{OA} = 1$ с⁻². Определить скорости и ускорения точек A и B , показанных на рисунке, если $a = 60^\circ$.

Решение: Рассмотрим последовательно движения каждого из двух подвижных звеньев планетарного механизма. Начинать при этом необходимо со звена, угловая скорость и угловое ускорение которого заданы. Таким образом, начнем исследование кинематики механизма с кривошипа.

1. Кривошип OA совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка. Определим скорость и ускорение точки A кривошипа, которая одновременно принадлежит и подвижной шестерне II.

Абсолютная величина скорости точки A (V_A) определяется по формуле

$$V_A = w_{OA} \cdot |OA| = w_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad . \quad (1)$$

Для заданного положения механизма

$$V_A = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с} \quad . \quad (2)$$

Вектор скорости \dot{V}_A направлен перпендикулярно OA (радиусу вращения) в направлении вращения, указанному на рис.3.5 дуговой стрелкой w_{OA} .

Ускорение точки A представим разложенным на касательную и нормальную составляющие

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t \quad . \quad (3)$$

Величины нормального (a_A^n) и касательного (a_A^t) ускорений определяются соответственно по формулам:

$$a_A^n = w_{OA}^2 \cdot |OA| = w_{OA}^2 \cdot (R_1 + R_2) \quad , \quad (4)$$

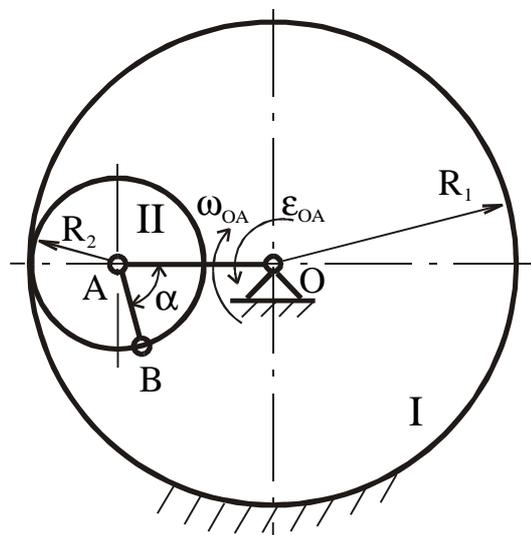
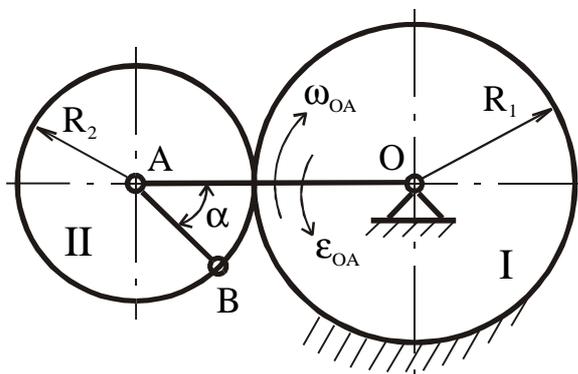
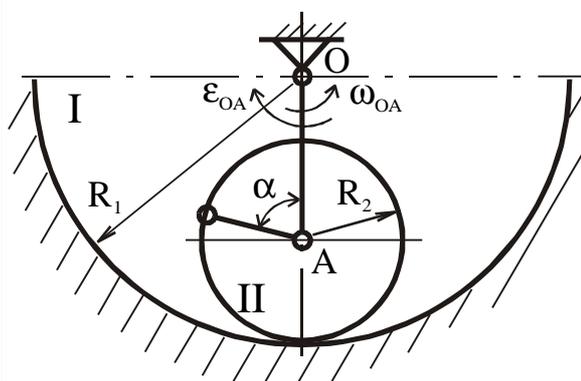
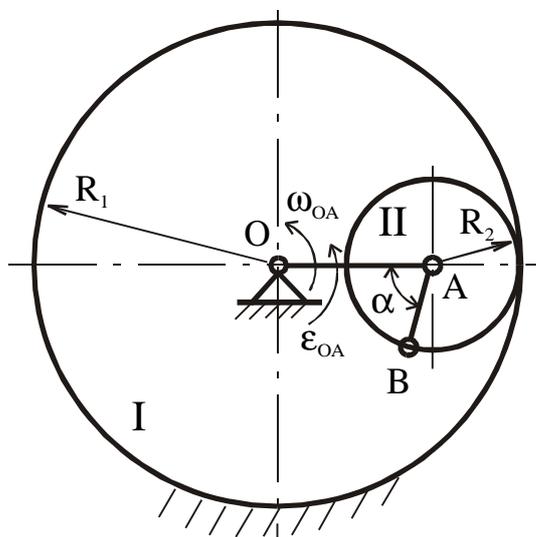
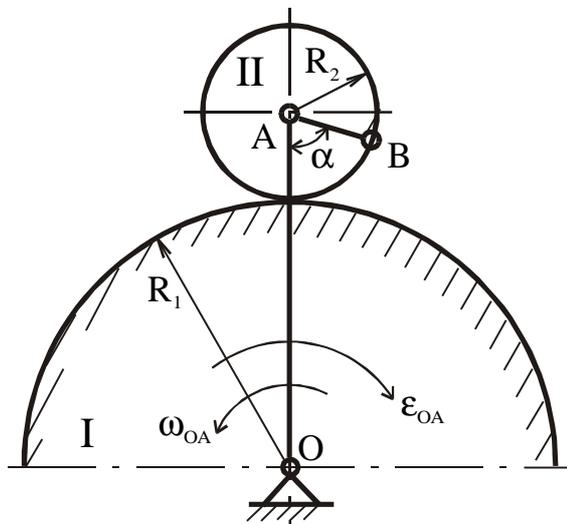
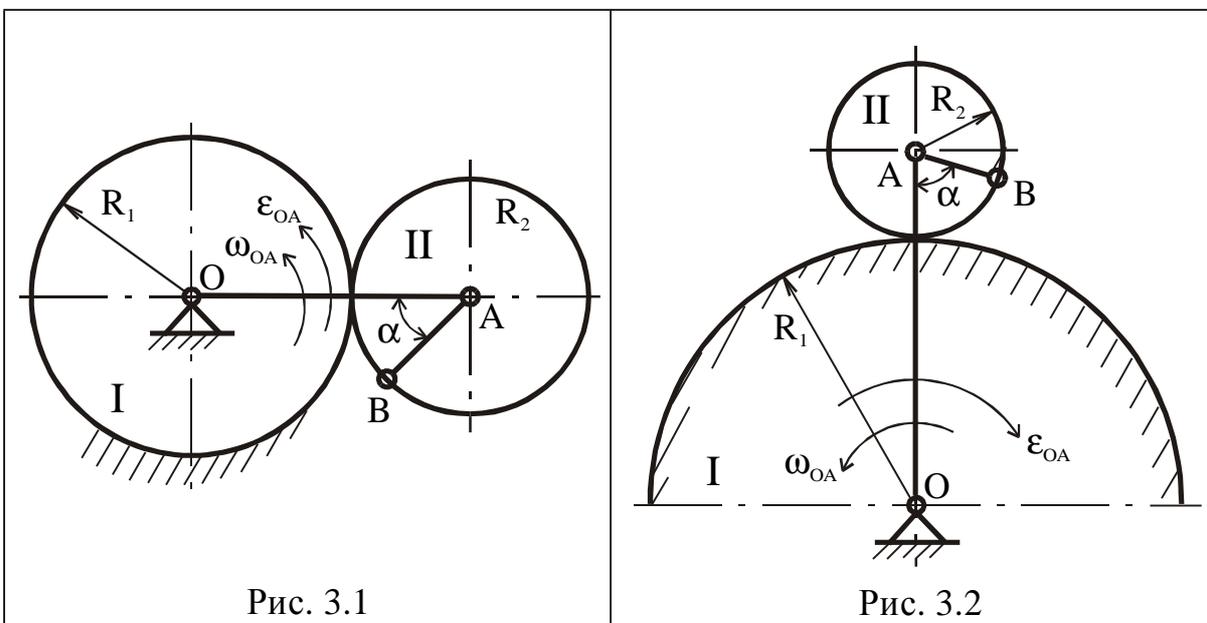
$$a_A^t = e_{OA} \cdot |OA| = e_{OA} \cdot (R_1 + R_2) \quad . \quad (5)$$

Для заданного положения механизма

$$a_A^n = 1^2 (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2 \quad . \quad (6)$$

$$a_A^t = 1 \cdot (0,6 + 0,4) = 1 \text{ м/с}^2 \quad . \quad (7)$$

При этом нормальное ускорение точки A (\mathbf{a}_A^n) направлено по радиусу окружности, описываемой точкой к центру этой окружности - к точке O .



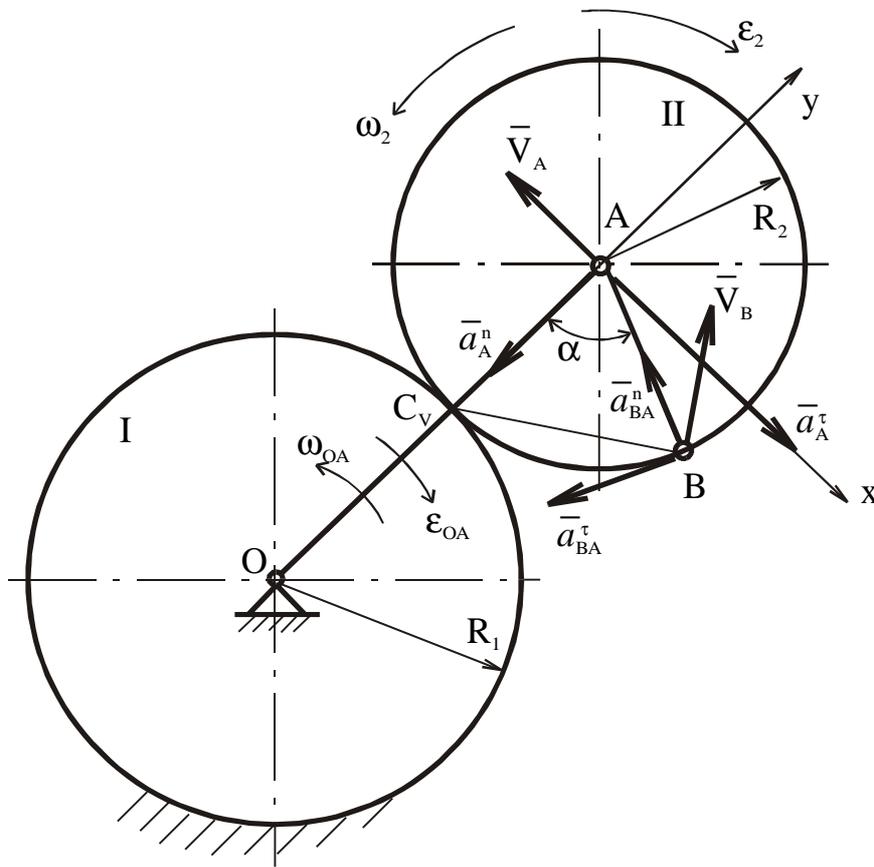


Рис. 3.7

Касательное ускорение (\mathbf{a}_A^t) направлено по касательной к этой окружности (перпендикулярно OA) в сторону, указанную дуговой стрелкой ϵ_{OA} . Это объясняется тем, что при замедленном вращении (по условию задачи кривошип OA вращается замедленно) касательное ускорение направляется в сторону, противоположную направлению вращения, указанного дуговой стрелкой ω_{OA} . В то же время при замедленном вращении угловое ускорение направляется также в сторону, противоположную направлению угловой скорости.

Величина ускорения точки A в соответствии с соотношением (3) и с учетом (6) и (7) для заданного положения механизма определится по формуле:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^t)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ м/с}^2.$$

2. Шестерня II совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Учитывая, что шестерня II катится без скольжения по неподвижной шестерне I, мгновенный центр скоростей (точка C_V) подвижной шестерни будет находиться в точке соприкосновения двух шестерен (рис.3.5).

Для заданного положения планетарного механизма выше определена скорость центра шестерни II (точки A). Таким образом, зная величину скорости одной из точек и положение мгновенного центра скоростей подвижной шестерни, можно определить величину ее мгновенной угловой скорости (ω_2) по формуле

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V}, \quad (7)$$

где расстояние $AC_V = R_2$.

В результате подстановки значения $AC_V = R_2$ и (1) в соотношение (7) получим

$$w_2 = \frac{w_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} . \quad (8)$$

Для заданного положения механизма

$$w_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} = 2,5 \text{ с}^{-1} . \quad (9)$$

Направление мгновенного вращения шестерни II вокруг мгновенного центра скоростей (точки C_V), определяемое направлением скорости точки A (\dot{V}_A), условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой w_2 .

Шестерня II в указанном положении движется замедленно. Это следует из сопоставления направлений векторов \dot{V}_A и \dot{a}_A^t (они направлены в противоположные стороны). Следовательно угловое ускорение шестерни II (e_2) направлено в сторону, противоположную направлению угловой скорости w_2 , что условно показано на рис.3.5 дуговой стрелкой e_2 .

Величину углового ускорения e_2 определим по формуле

$$e_2 = |\dot{w}_2| . \quad (10)$$

Учитывая (8), на основании (10) получим

$$e_2 = \frac{|\dot{w}_{OA}| \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} = \frac{e_{OA} \cdot (R_1 + R_2)}{R_2} . \quad (11)$$

где e_{OA} - величина углового ускорения кривошипа OA . Для заданного положения механизма

$$e_2 = \frac{1 \cdot (0,6 + 0,4)}{0,4} = 2,5 \text{ с}^{-2} . \quad (12)$$

Таким образом, для некоторого момента времени найдены положение мгновенного центра скоростей, угловая скорость, угловое ускорение подвижной шестерни II, а также ускорение точки A . Это позволяет найти скорость и ускорение любой точки шестерни.

Прежде всего определим абсолютную величину скорости точки B (V_B) по формуле

$$V_B = w_2 \cdot BC_V , \quad (13)$$

где BC_V - расстояние от точки B до мгновенного центра скоростей.

Расстояние BC_V определим из треугольника ABC_V . Этот треугольник равнобедренный и, следовательно,

$$BC_V = R_2 = 0,4 \text{ м} . \quad (14)$$

Для заданного положения механизма, учитывая (9) и (14), на основании (13) получим

$$V_B = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с} . \quad (15)$$

Вектор скорости \dot{V}_B направлен перпендикулярно прямой BC_V . Ускорение точки B можно найти на основании теоремы об ускорениях точек плоской фигуры, приняв точку A за полюс

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t, \quad (16)$$

где \mathbf{a}_{BA}^n и \mathbf{a}_{BA}^t - соответственно нормальное и касательное ускорения точки B при относительном вращательном движении шестерни Π вокруг полюса A . Учитывая (3), формулу (16) представим в виде

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A^n + \mathbf{a}_A^t + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t. \quad (17)$$

Величины нормального (a_{BA}^n) и касательного (a_{BA}^t) ускорений точки B при относительном вращательном движении шестерни Π вокруг полюса A определяются по формулам

$$a_{BA}^n = w_2^2 \cdot BA = w_2^2 \cdot R_2, \quad (18)$$

$$a_{BA}^t = e_2 \cdot BA = e_2 \cdot R_2. \quad (19)$$

Для заданного положения механизма на основании (18) и (19) с учетом (9) и (12) получим

$$a_{BA}^n = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2, \quad (20)$$

$$a_{BA}^t = 2,5 \cdot 0,4 = 1 \text{ м/с}^2. \quad (21)$$

При этом нормальное ускорение \mathbf{a}_{BA}^n направлено вдоль BA к центру относительного вращения (к полюсу A), а касательное ускорение \mathbf{a}_{BA}^t направлено перпендикулярно прямой AB в сторону, указанную дуговой стрелкой e_2 .

Таким образом, найдены модули четырех векторов ускорений, стоящих в правой части векторного равенства (17), и показаны их направления в точке B на рис. 3.5. Найдем ускорение точки B как геометрическую сумму четырех показанных в точке ускорений аналитическим способом. Для этого спроектируем векторы, стоящие в правой и левой части равенства (17), на две оси координат x, y (рис.3.5)

$$a_{Bx} = a_A^t - a_{BA}^n \cdot \cos 30^\circ - a_{BA}^t \cdot \cos 60^\circ, \quad (22)$$

$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^n \cdot \cos 60^\circ - a_{BA}^t \cdot \cos 30^\circ. \quad (23)$$

Учитывая (6), (7) (20) и (21), на основании (22) и (23) найдем для заданного положения механизма проекции ускорения точки B на оси x, y

$$a_{Bx} = 1 - 2,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -1,665 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{By} = -1 + 2,5 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,616 \text{ м/с}^2.$$

Проекция вектора ускорения \mathbf{a}_B (лежащего в плоскости xy) на две оси координат полностью определяют его модуль и направление. Итак, величина

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{1,665^2 + 0,616^2} = 1,775 \text{ м/с}^2.$$

Задание К-5

Приняв угловую скорость w_0 кривошипа OA постоянной, определить для заданного положения механизма (рис.5.1-5.6):

1. скорости точек A, B, C, D механизма и угловые скорости звеньев AB и CD при помощи мгновенных центров скоростей;
2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;
3. ускорения точек A, B, C , а также угловое ускорение звена AB (аналитическим способом).

Необходимые для решения данные приведены в таблице 5.

Таблица 5

№ варианта	№ рис.	w_0 (с ⁻¹)	OA (см)	j (град.)	AB (см)	AC (см)	CD (см)	h (см)	l (см)	O_1D (см)
1	5.1	$\pi/2$	40	90	80	40	70	-	10	-
2	5.2	$\pi/4$	50	45	60	60	80	20	-	-
3	5.3	$\pi/2$	30	90	60	20	50	-	25	-
4	5.4	$\pi/4$	20	45	100	50	60	10	80	-
5*	5.5	$\pi/3$	12	60	55	36	23	22	19	19
6*	5.6	$2\pi/3$	15	135	50	15	40	54	17	40
7	5.1	$\pi/4$	20	45	40	20	35	-	5	-
8	5.2	$\pi/6$	100	30	120	120	160	40	-	-
9	5.3	$\pi/6$	60	30	120	40	100	-	50	-
10	5.4	$\pi/3$	30	60	150	75	90	15	120	-
11*	5.5	$\pi/3$	24	60	110	72	46	44	38	38
12*	5.6	$2\pi/3$	30	120	100	30	80	108	34	80
13	5.1	$\pi/3$	60	60	120	60	105	-	15	-
14	5.2	$\pi/3$	60	60	72	72	96	24	-	-
15	5.3	$\pi/4$	36	45	72	24	60	-	30	-
16	5.4	$\pi/3$	10	60	50	25	30	5	40	-
17*	5.5	$\pi/3$	18	60	82,5	54	34,5	33	28,5	28,5
18*	5.6	$2\pi/3$	7,5	120	25	7,5	20	27	8,5	20
19	5.1	$\pi/6$	30	30	60	30	52,5	-	7,5	-
20	5.2	$2\pi/3$	75	120	90	90	120	30	-	-
21	5.3	$\pi/3$	27	60	54	18	45	-	22,5	-
22	5.4	$\pi/6$	15	30	75	37,5	45	7,5	60	-
23*	5.5	$\pi/3$	36	60	165	108	69	66	57	57
24*	5.6	$2\pi/3$	22,5	120	75	22,5	60	81	22,5	60
25	5.1	$\pi/4$	10	45	20	20	18,5	-	2,5	-
26	5.2	$3\pi/4$	150	135	180	180	240	60	-	-
27	5.3	$\pi/2$	15	90	30	10	25	-	12,5	-

№ варианта	№ рис.	w_0 (c^{-1})	OA (см)	j (град.)	AB (см)	AC (см)	CD (см)	h (см)	l (см)	O_1D (см)
28	5.4	$\pi/2$	40	90	200	100	120	20	160	-
29*	5.5	$\pi/3$	6	60	27,5	18	11,5	11	9,5	9,5
30*	5.6	$2\pi/3$	45	120	150	45	120	162	51	120

* **Примечание:** в вариантах с рис. 5.5, 5.6 из двух возможных положений механизма выбрать для расчета такое, при котором шарнир D наиболее удален от ползуна B.

Пример выполнения задания К-5

Дано: схема механизма в заданном положении (рис. 5.7). $j = 30^\circ$; $OA = 30$ см; $AB = 70$ см; $BC = 35$ см; $CD = 40$ см; $l = 90$ см; $w_0 = \pi/6$ c^{-1} .

Определить:

1. скорости точек A, B, C, D механизма и угловые скорости всех его звеньев при помощи мгновенных центров скоростей;
2. скорости этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки;
3. ускорения точек A, B, C , а также угловое ускорение звена AB (аналитическим способом).

Решение: Построим механизм в выбранном масштабе $m_e = 1:10$ (рис.5.7).

При исследовании кинематики плоского механизма будем рассматривать последовательно движение каждого звена механизма, начиная с ведущего звена, угловая скорость которого задана.

1. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма с помощью мгновенных центров скоростей.

а) Звено OA совершает вращательное движение вокруг неподвижного центра O . Определим скорость точки A кривошипа, которая одновременно принадлежит следующему звену AB . Величина скорости точки A определяется по формуле

$$V_A = w_{OA} \cdot OA = \frac{\pi}{3} \cdot 30 \approx 16 \quad \text{см/с.}$$

Вектор скорости \dot{V}_A перпендикулярен прямой OA и направлен в сторону вращения кривошипа, указанную дуговой стрелкой w_0 (рис.5.7).

б) Звено AB совершает плоскопараллельное (плоское) движение. Выше найдена скорость точки A этого звена и известна линия действия (направления) скорости точки B (\dot{V}_B - вдоль прямой OB). Мгновенный центр скоростей звена AB (точка C_{VI}) находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных в точках A и B к направлениям их скоростей (\dot{V}_A и \dot{V}_B). Точка C принадлежит звену AB . Соединим точку C с мгновенным центром

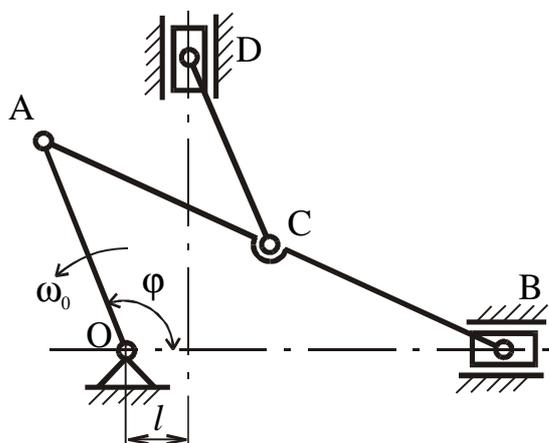


Рис. 5.1

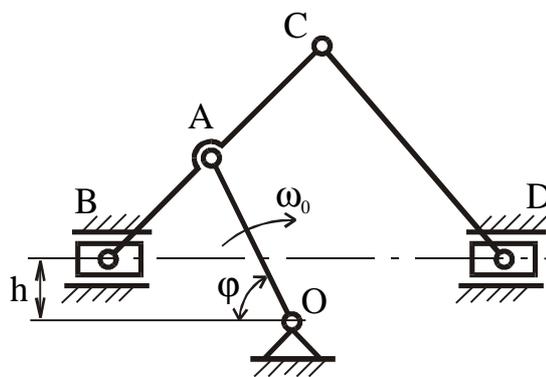


Рис. 5.2

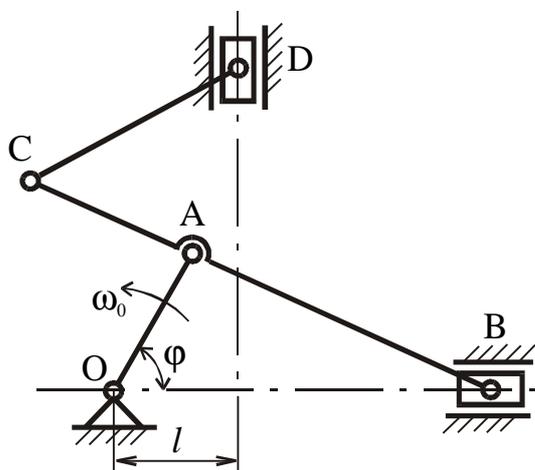


Рис. 5.3

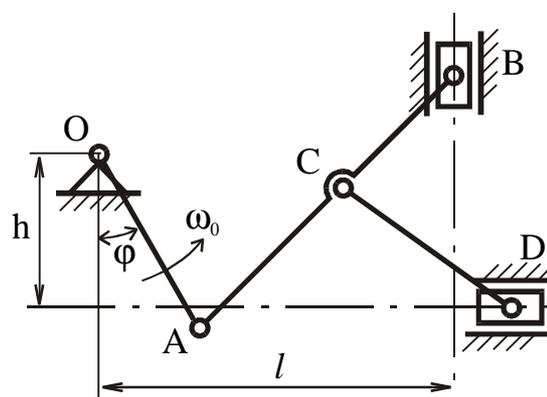


Рис. 5.4

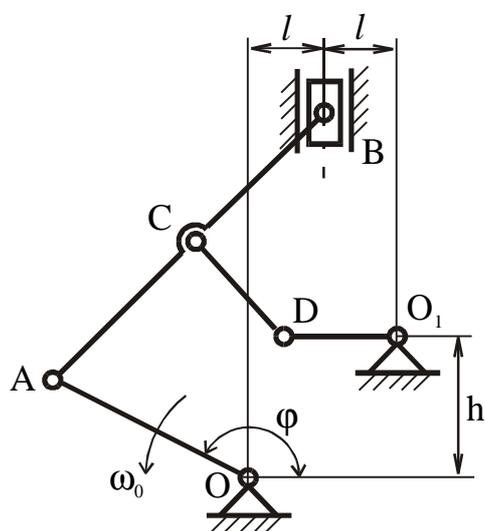


Рис. 5.5

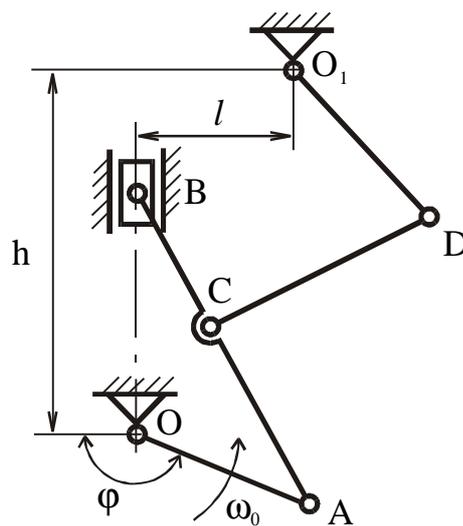


Рис. 5.6

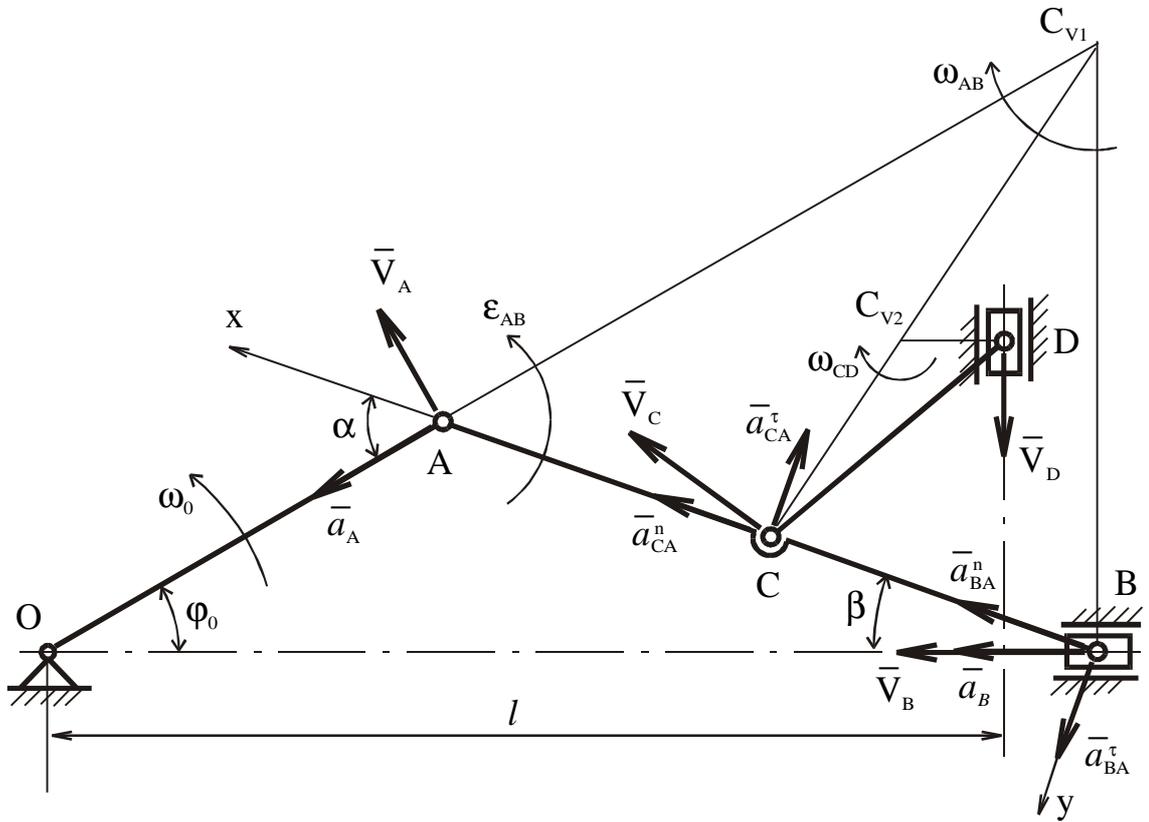


Рис. 5.7

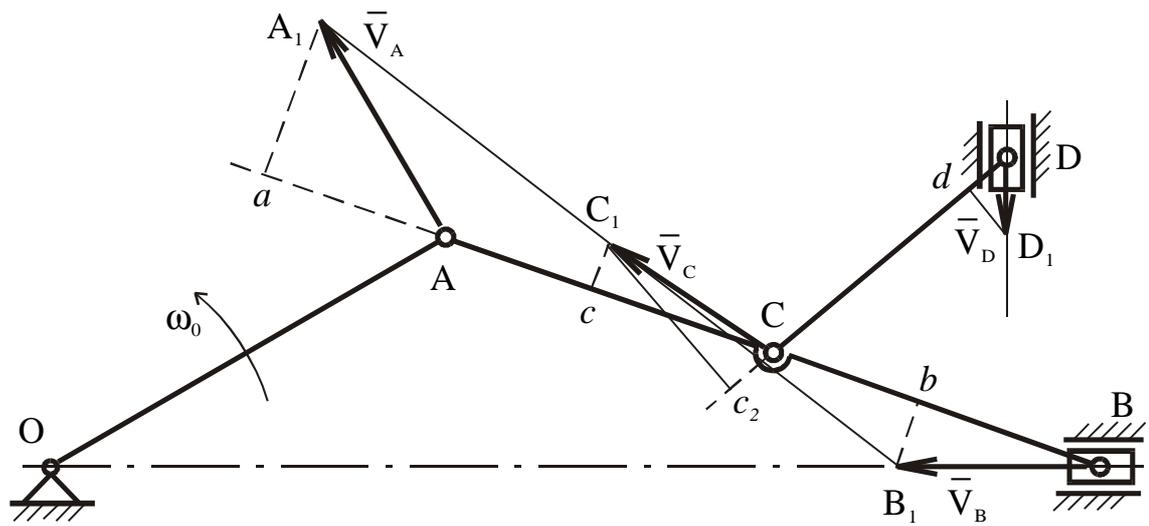


Рис. 5.8

скоростей C_{V1} . Вектор скорости точки C (\vec{V}_C) направлен перпендикулярно к прямой CC_{V1} .

Для звена CD мгновенный центр скоростей определяем аналогично.

Известна линия действия скорости точки C (\vec{V}_C) и линия действия (направления) скорости в точке D (по вертикали). Восстанавливаем перпендикуляр в точке D к вертикали до пересечения с прямой CC_{V1} в точке C_{V2} . Точка C_{V2} и есть мгновенный центр скоростей звена CD .

Измеряем расстояния от точек A , B , C и D до соответствующих мгновенных центров скоростей

$$|AC_{V1}| = 8 \text{ см}, \quad |BC_{V1}| = 6 \text{ см}, \quad |CC_{V1}| = 6,1 \text{ см} .$$

$$|CC_{V2}| = 3 \text{ см} . \quad |DC_{V2}| = 1,4 \text{ см} .$$

Учитывая масштаб m_e , получаем

$$AC_{V1} = 80 \text{ см}, \quad BC_{V1} = 60 \text{ см}, \quad CC_{V1} = 61 \text{ см},$$

$$CC_{V2} = 30 \text{ см}, \quad DC_{V2} = 74 \text{ см} .$$

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны расстояниям до мгновенных центров скоростей. Для звена AB имеем

$$\frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{V_B}{BC_{V1}} = \frac{V_C}{CC_{V1}} .$$

Отсюда находим

$$V_B = V_A \frac{BC_{V1}}{AC_{V1}} = 12 \text{ см/с}, \quad V_C = V_A \frac{CC_{V1}}{AC_{V1}} = 12,2 \text{ см/с} .$$

Аналогично для звена CD получим

$$\frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{V_D}{DC_{V2}} , \quad V_D = V_C \frac{DC_{V2}}{CC_{V2}} = 5,6 \text{ см/с} .$$

в) Определим величины угловых скоростей звеньев механизма. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей

$$V_A = \omega_{AB} \cdot AC_{V1} , \quad V_B = \omega_{AB} \cdot BC_{V1} , \quad V_C = \omega_{AB} \cdot CC_{V1} ,$$

$$V_C = \omega_{CD} \cdot CC_{V2} , \quad V_D = \omega_{CD} \cdot DC_{V2} .$$

Отсюда

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_{V1}} = \frac{16}{80} = 0,2 \text{ см/с},$$

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CC_{V2}} = \frac{12,2}{30} \approx 0,41 \text{ см/с} .$$

Из рис.5.7. следует, что вращения звеньев AB и CD вокруг мгновенных центров скоростей происходят по часовой стрелке.

2. Определение скоростей этих же точек методом проекций на прямую, соединяющую точки.

Для определения скоростей точек методом проекций вновь строим механизм в заданном масштабе ($m_e = 1:10$) (рис.5.8). С помощью теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, их соединяющую, и теоремы о геометрическом месте концов векторов скоростей точек прямой, определяем скорости точек B , C и D .

На рис.5.8 находим проекцию вектора скорости \vec{V}_A , который построен в масштабе ($m_v=1:4$), на прямую AB . Откладываем от точки B отрезок $Aa = Bb$ вдоль прямой AB . Восстанавливаем в точке b перпендикуляр к прямой AB до пересечения с прямой OB , по которой направлен вектор скорости в точке B (\vec{V}_B). Соединяем концы векторов скоростей точек A и B прямой A_1B_1 . От точки C вдоль прямой AB откладываем отрезок $Cc = Aa$ и восстанавливаем из точки c перпендикуляр до пересечения с прямой A_1B_1 в точке C_1 . Отрезок CC_1 опреде-

ляет вектор скорости \dot{V}_C в точке C .

Скорость точки D определяем аналогично. Находим проекцию скорости \dot{V}_C на прямую CD . Откладываем от точки D отрезок $Dd = Cc_2$. Восстанавливаем перпендикуляр из точки d до пересечения в точке D_1 с вертикалью, по которой направлен вектор скорости в точке D (\dot{V}_D). Отрезок DD_1 изображает вектор скорости \dot{V}_D .

Измеряя длины отрезков BB_1 , CC_1 , и DD_1 , и учитывая масштаб скорости m_v , найдем величины скоростей в точках B , C и D

$$V_B = 12 \text{ см/с}, \quad V_C = 12,2 \text{ см/с}, \quad V_D = 5,6 \text{ см/с}.$$

3. Определение ускорений точек A , B и C , а также углового ускорения e_{AB} звена AB .

Так как кривошип OA вращается равномерно, ускорение точки A направлено к центру O и равно

$$a_A = w_{OA}^2 \cdot OA = 8,215 \text{ см/с}^2.$$

Для определения ускорения точки B звена AB воспользуемся теоремой об ускорениях точек плоской фигуры. Считая точку A полюсом, запишем

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^t. \quad (1)$$

Нормальное ускорение точки B во вращательном движении вокруг полюса A направлено от точки B к точке A вдоль AB и равно

$$a_{BA}^n = w_{AB}^2 \cdot AB = 2,8 \text{ см/с}^2.$$

Что касается ускорений \mathbf{a}_B точки B и \mathbf{a}_{BA}^t , то известны только линии действия этих векторов: \mathbf{a}_B - по прямой OB вдоль направляющих ползуна, \mathbf{a}_{BA}^t - перпендикулярно AB . Зададимся произвольно их направлениями по указанным линиям (рис.5.7). Эти ускорения определим из уравнений проекций векторного равенства (1) на оси координат. Знак в ответе показывает, соответствует ли истинное направление вектора расчетному. Выбрав направления осей x и y как показано на рис.5.7, получим

$$\begin{aligned} a_B \cdot \cos b &= a_A \cdot \cos a + a_{BA}^n, \\ a_B \cdot \sin b &= a_A \cdot \sin a + a_{BA}^t. \end{aligned} \quad (2)$$

Углы a и b измеряем на рис.5.7 с помощью транспортира. Из уравнений (2) получим

$$\begin{aligned} a_B &= \frac{a_A \cdot \cos a + a_{BA}^n}{\cos b} = 9 \text{ см/с}^2, \\ a_{BA}^t &= a_B \cdot \sin b - a_A \cdot \sin a = -4,15 \text{ см/с}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку a_{BA}^t отрицательно, следовательно, направление вектора \mathbf{a}_{BA}^t противоположно выбранному на рис.5.7.

Угловое ускорение шатуна AB с учетом того, что здесь a_{BA}^t - алгебраическая величина, определяется по формуле

$$|\mathbf{e}_{AB}| = \frac{|a_{BA}^t|}{AB} = 0,06 \text{ c}^{-1}. \quad (4)$$

Направление ускорения \mathbf{a}_{BA}^t относительно полюса A определяет направление углового ускорения ϵ_{AB} , которое показано на рис 5.7 дуговой стрелкой.

Для определения ускорения точки C примем за полюс точку A и в соответствии с теоремой об ускорениях точек плоской фигуры запишем равенство

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{CA}^n + \mathbf{a}_{CA}^t. \quad (5)$$

Направление вектора ускорения \mathbf{a}_C точки C заранее неизвестно.

Нормальное и тангенциальное ускорения точки C во вращательном движении вокруг полюса A

$$a_{CA}^n = w_{AB}^2 \cdot AC = 1,4 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{CA}^t = \mathbf{e}_{AB} \cdot AC = 2,1 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \mathbf{a}_{CA}^t перпендикулярен вектору \mathbf{a}_{CA}^n и направлен соответственно угловому ускорению \mathbf{e}_{AB} .

Ускорение точки C находим способом проекций

$$a_{Cx} = a_A \cdot \cos \alpha + a_{CA}^n = 7,5 \text{ см/с}^2,$$

$$a_{Cy} = a_A \cdot \sin \alpha - a_{CA}^t = 3,39 \text{ см/с}^2.$$

Найдем величину вектора ускорения точки C по формуле

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 8,22 \text{ см/с}^2.$$

ЗАДАНИЕ Д-1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Материальная точка M массой m , получив в точке A начальную скорость V_0 , движется в изогнутой трубе ABC (рис. 1.1, 1.2), расположенной в вертикальной плоскости. Участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный. Угол наклона трубы $\alpha=30^\circ$.

На участке AB на материальную точку действует сила тяжести \dot{P} , постоянная сила \dot{Q} (ее направление указано на рисунках) и сила сопротивления среды \dot{R} , зависящая от скорости \dot{V} груза (направлена сила против движения). Трением груза о трубу на участке AB пренебрегаем.

В точке B материальная точка, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на нее действует сила тяжести \dot{P} , сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f=0,2$) и переменная сила \dot{F} , проекция которой F_x на ось x приведена в таблице Д-1.

Известно расстояние $AB=l$ или время t_1 движения от точки A до точки B . Требуется найти закон движения материальной точки на участке BC : $x=f(t)$.

Указание. Решение задачи разбивается на две части. Сначала составляем и интегрируем методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке AB , учитывая начальные условия. В случае, когда задана длина отрезка AB , целесообразно перейти от интегрирования по t к интегрированию по переменной z с помощью формулы:

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_z}{dt} \cdot \frac{dz}{dz} = V_z \frac{dV_z}{dz} .$$

Зная время движения на участке AB или длину этого участка, определяем скорость материальной точки в конце участка, в точке B . Эта скорость принимается за начальную при исследовании движения материальной точки на участке BC . После этого составляем и интегрируем дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке BC .

Пример выполнения задания Д-1

На вертикальном участке AB трубы (рис.1.3) на точку массой $m=1$ кг действует сила тяжести и сила сопротивления $R=mV^2$. Скорость материальной точки M в начальный момент времени $t=0$ в точке A равна нулю. Длина участка $AB=2$ (м). На наклонном участке BC трубы ($\alpha=30^\circ$) на материальную точку действует сила тяжести, сила трения (коэффициент трения $f=0,2$) и переменная сила $F_x=16\sin(3t)$. Требуется определить закон движения материальной точки на участке BC .

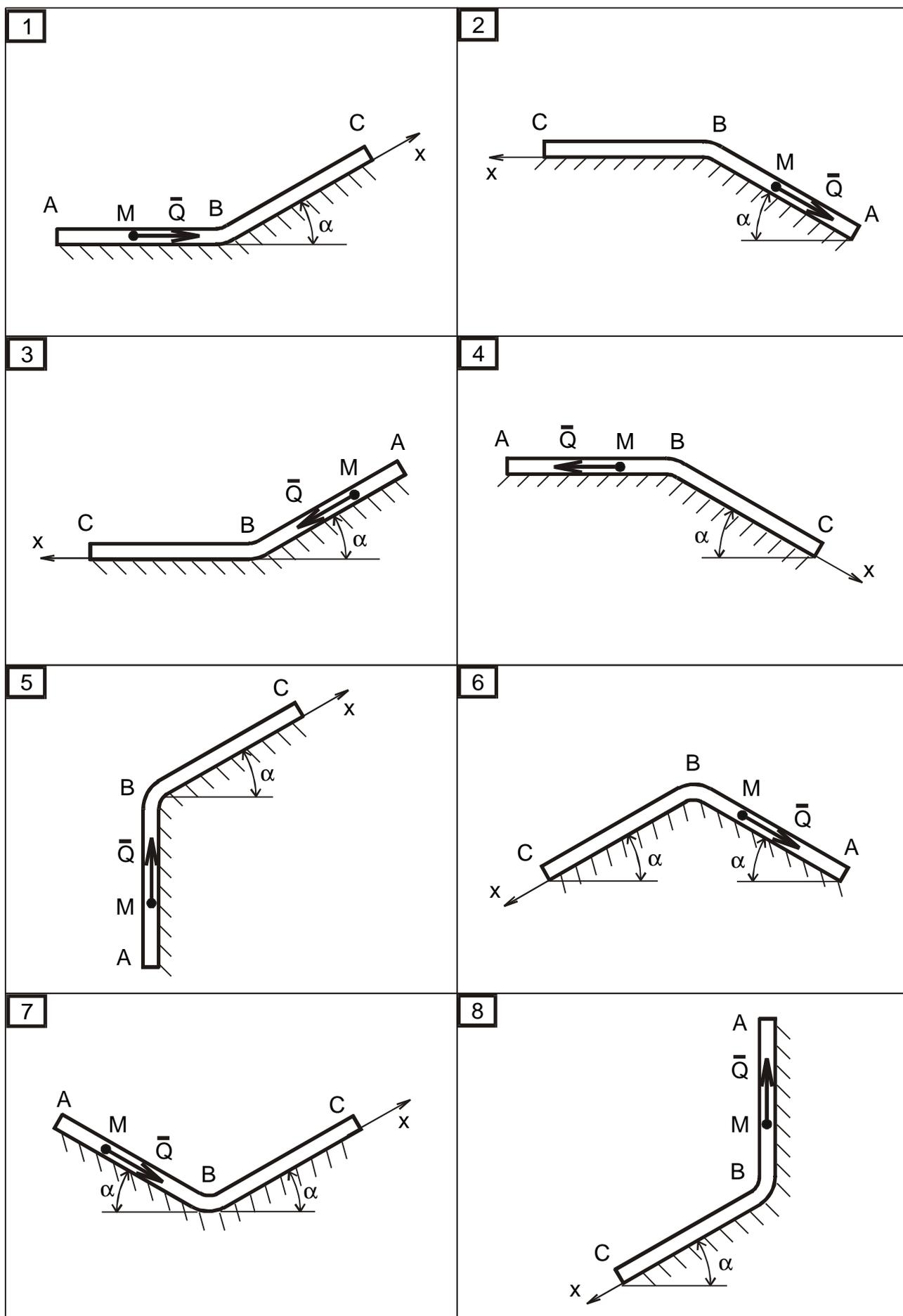


Рис. 1.1

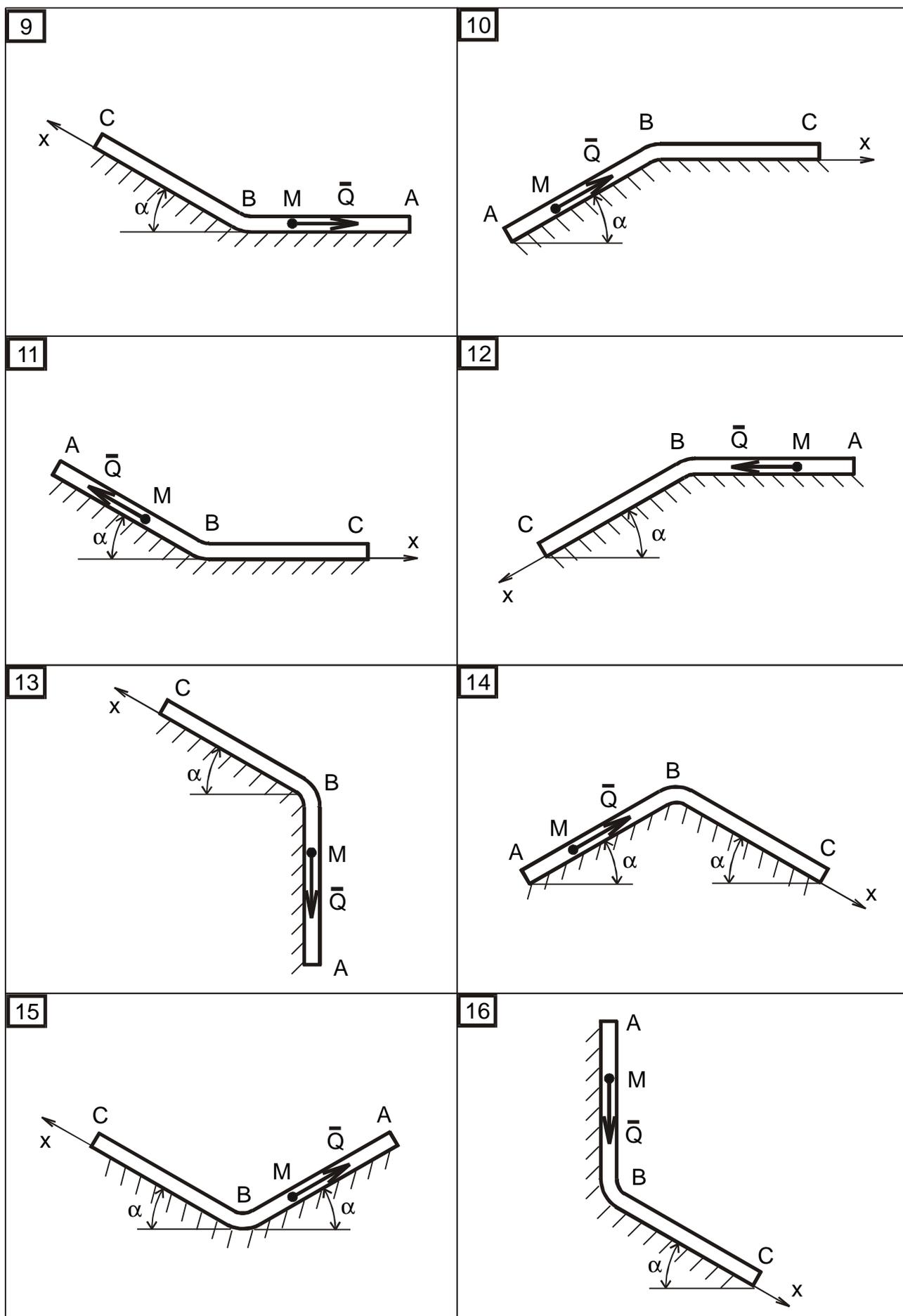


Рис. 1.2

Таблица Д-1

№ варианта	Рис.	m (кг)	V_0 , м/с	Q , Н	R , Н	m	l , м	t_1 , с	F_x , Н
1	1	4,5	18	9	mV	0,45	-	5	$3\sin 2t$
2	2	3	32	4	mV^2	0,8	2,5	-	$-8\cos 4t$
3	3	2	2	2	mV	0,4	-	2,5	$2\sin 4t$
4	4	6	14	18	mV^2	0,6	5	-	$-3\cos 2t$
5	5	1,6	18	4	mV	0,4	-	2	$4\cos 4t$
6	6	1,2	22	2	mV^2	0,8	0,5	-	$6t$
7	7	2	5	2	mV	0,4	-	2,5	$2\sin 4t$
8	8	2,4	12	6	mV^2	0,48	1,5	-	$6t$
9	9	1,8	15	6	mV	0,3	-	3	$9t^2$
10	10	4	12	12	mV^2	0,8	2,5	-	$-8\cos 4t$
11	11	2	20	6	mV	0,4	-	2,5	$2\sin 4t$
12	12	4,8	5	12	mV^2	0,24	5	-	$-6\sin 2t$
13	13	1,2	24	2	mV	0,4	-	1	$4\cos 4t$
14	14	2,4	12	6	mV^2	0,8	0,5	-	$6t$
15	15	4	10	6	mV	0,8	-	5	$3\sin 2t$
16	16	2,4	12	2	mV^2	0,48	1,5	-	$6t$
17	1	6	2,5	18	mV^2	0,6	5	-	$-3\cos 2t$
18	2	2	26	3	mV	0,6	-	5	$2\cos 2t$
19	3	4	2	4	mV^2	0,2	5	-	$-6\sin 4t$
20	4	1,6	18	4	mV	0,4	-	2	$4\cos 4t$
21	5	6	14	18	mV^2	0,6	5	-	$-3\cos 2t$
22	6	2,1	28	3	mV	0,5	-	3	$8\sin 2t$
23	7	2,4	1,2	2	mV^2	0,8	1,5	-	$6t$
24	8	2	20	6	mV	0,4	-	2,5	$2\sin 4t$
25	9	8	10	16	mV^2	0,8	15	-	$-6\cos 2t$
26	10	1,8	15	6	mV	0,3	-	2	$9t^2$
27	11	2,5	1,5	8	mV^2	0,75	2,5	-	$3\sin 2t$
28	12	3	2,2	9	mV	0,6	-	2,5	$2\cos 2t$
29	13	2	28	5	mV^2	0,6	0,5	-	$-3\cos 2t$
30	14	4,5	18	9	mV	0,5	-	3	$8\sin 2t$

Решение

Рассмотрим движение материальной точки на участке AB . Изобразим на чертеже материальную точку M в произвольном положении. На точку действуют силы \vec{P} и \vec{R} . Введем ось z в направлении от точки A к точке B . Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось z

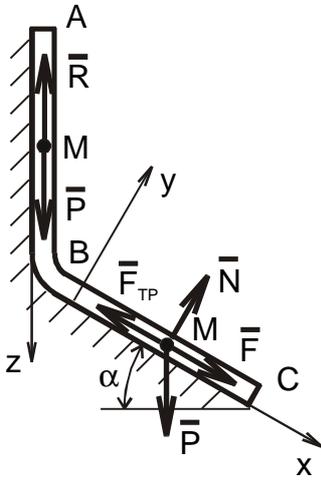


Рис. 1.3

$$m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{KZ} \quad \text{или} \quad m \frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z .$$

Учитывая, что $P_z = mg$, $R_z = -mV^2$, $V_z = V$, получим

$$m \frac{dV}{dt} = mg - mV^2, \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} = g - \frac{m}{m} V^2 . \quad (1)$$

Введем обозначение $b = \frac{m}{m} = \frac{0,5}{1} = 0,5$ (1/м).

Тогда (1) запишется так

$$\frac{dV}{dt} = g - bV^2 . \quad (2)$$

Так как в условии задачи задана длина участка AB , то целесообразно при интегрировании перейти от переменной t к переменной z в уравнении (2). Домножим на dz правую и левую части уравнения (2), получим

$$dz \frac{dV}{dt} = (g - bV^2) dz, \quad \text{т. к.} \quad \frac{dz}{dt} = V, \quad \text{то имеем}$$

$$V dV = (g - bV^2) dz . \quad (3)$$

Разделим переменные в уравнении (3) и вычислим интегралы от обеих частей равенства

$$\frac{V dV}{g - bV^2} = dz, \quad -\frac{1}{2b} \ln(g - bV^2) = z + C_1 . \quad (4)$$

Из начальных условий $V_0 = 0$, $z_0 = 0$ следует, что

$$C_1 = -\frac{1}{2b} \ln g . \quad (5)$$

Подставим (5) в (4), получим

$$-\frac{1}{2b} \ln \frac{g - bV^2}{g} = z \quad \text{или} \quad \frac{g - bV^2}{g} = e^{-2bz} .$$

Так как длина участка трубы $AB = 2$ (м), то скорость в конце участка в точке B будет равна

$$V_B^2 = g \frac{1 - e^{-2bz}}{b} = 10 \frac{1 - e^{-2 \cdot 0,5 \cdot 2}}{0,5} = 20 \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) ,$$

$$V_B = 4,15 \text{ м/с} . \quad (6)$$

Рассмотрим движение материальной точки на участке BC . Изобразим в произвольном положении точку и действующие на нее силы $P=mg$, N , F_{TP} и F . Введем оси координат x и y и составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на оси x и y

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg \sin a - F_{TP} + F_x , \quad (7)$$

$$0 = N - mg \cos a . \quad (8)$$

Найдем силу N из уравнения (8)

$$N = mg \cos a .$$

Из этого равенства и закона Кулона $F_{TP}=fN$ определим силу трения

$$F_{TP} = fmg \cos a .$$

Подставим значения сил трения и F_x в уравнение (7)

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg(\sin a - f \cos a) + 16 \sin(3t) . \quad (9)$$

Разделим обе части уравнения (9) на m и подставим численные значения параметров

$$g(\sin a - f \cos a) = 9,8(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2 .$$

Имеем
$$\frac{dV_x}{dt} = 3,2 + 16 \sin(3t) . \quad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, получим

$$V_x = 3,2t - \frac{16}{3} \cos(3t) + C_2 . \quad (11)$$

Из начального условия $V(0) = V_B$ и (6) получим

$$C_2 = 4,15 + \frac{16}{3} \cos 0 = 9,48 .$$

Подставим значение C_2 в (11)

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - \frac{16}{3} \cos 3t + 9,48 \quad .$$

Умножаем обе части уравнения на dt и интегрируем по t

$$x = 1,6t^2 - \frac{16}{9} \sin 3t + 9,48t + C_3 \quad . \quad (12)$$

Из начального условия $x(0)=0$, получим $C_3=0$. Поставляем значение C_3 в (12) и находим закон движения точки на участке ВС

$$x = 1,6t^2 - \frac{16}{9} \sin 3t + 9,48t \quad .$$

ЗАДАНИЕ Д-3

Теорема об изменении кинетического момента механической системы

На звено 1 механизма, угловая скорость которого равна ω_{10} , с некоторого момента времени ($t=0$) начинает действовать пара сил с моментом M (движущий момент) или движущая сила P .

Массы звеньев 1 и 2 механизма равны соответственно m_1 и m_2 , а масса поднимаемого груза 3 - m_3 . Момент сил сопротивления вращению ведомого звена 2 равен M_C . Радиусы больших и малых окружностей звеньев 1 и 2: R_1, r_1, R_2, r_2 .

Схемы механизмов показаны на рис. 3.1-3.3, а необходимые для решения данные приведены в табл. 3.1.

Найти уравнение вращательного движения звена механизма, указанного в последней графе табл. 3.1. Определить также натяжение нитей в заданный момент времени, а в вариантах, где имеется соприкосновение звеньев 1 и 2, найти окружное усилие в точке их касания. Звенья 1 и 2, для которых радиусы инерции r_1 и r_2 в табл. 3.1 не заданы, считать сплошными однородными дисками.

Пример выполнения задания Д-3

Дано: $m_1=100$ кг; $m_2=150$ кг; $m_3=400$ кг; $M=4200+200t$ Нм; $M_C=2000$ Нм=const; $R_1=60$ см; $R_2=40$ см; $r_2=20$ см; $r_1=20\sqrt{2}$ см; $r_2=30$ см; $w_{10}=2$ сек⁻¹.

Найти уравнение $j_2=f(t)$ вращательного движения звена 2 механизма, а также окружное усилие S в точке касания звеньев 1 и 2 и натяжение нити T в момент времени $t_1=1$ сек (рис. 3.4.а).

Решение

К звену 1 механизма приложены (рис. 3.4.б) сила тяжести \dot{G}_1 , движущий момент M , составляющие реакции подшипника \dot{Y}_A, \dot{Z}_A , окружное усилие \dot{S}_1 и нормальная реакция \dot{N}_1 звена 2.

К звену 2 механизма приложены сила тяжести \dot{G}_2 , момент сил сопротивления M_C , составляющие реакции подшипника \dot{Y}_B, \dot{Z}_B , натяжение нити \dot{T} , к которой подвешен груз 3, окружное усилие \dot{S}_2 и нормальная реакция \dot{N}_2 звена 1.

К грузу 3 приложены сила тяжести \dot{G}_3 и натяжение нити \dot{T} .

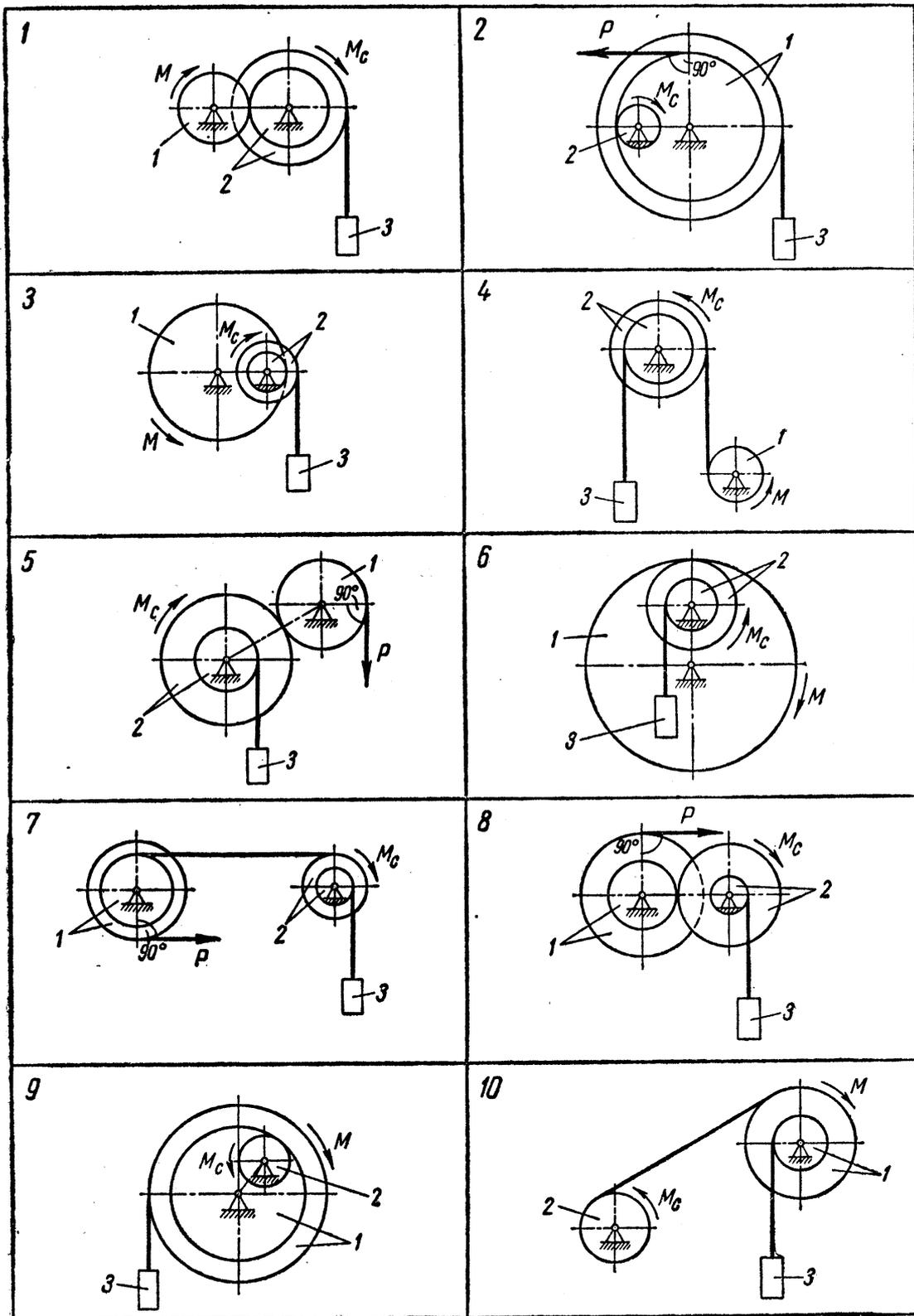


Рис. 3.1

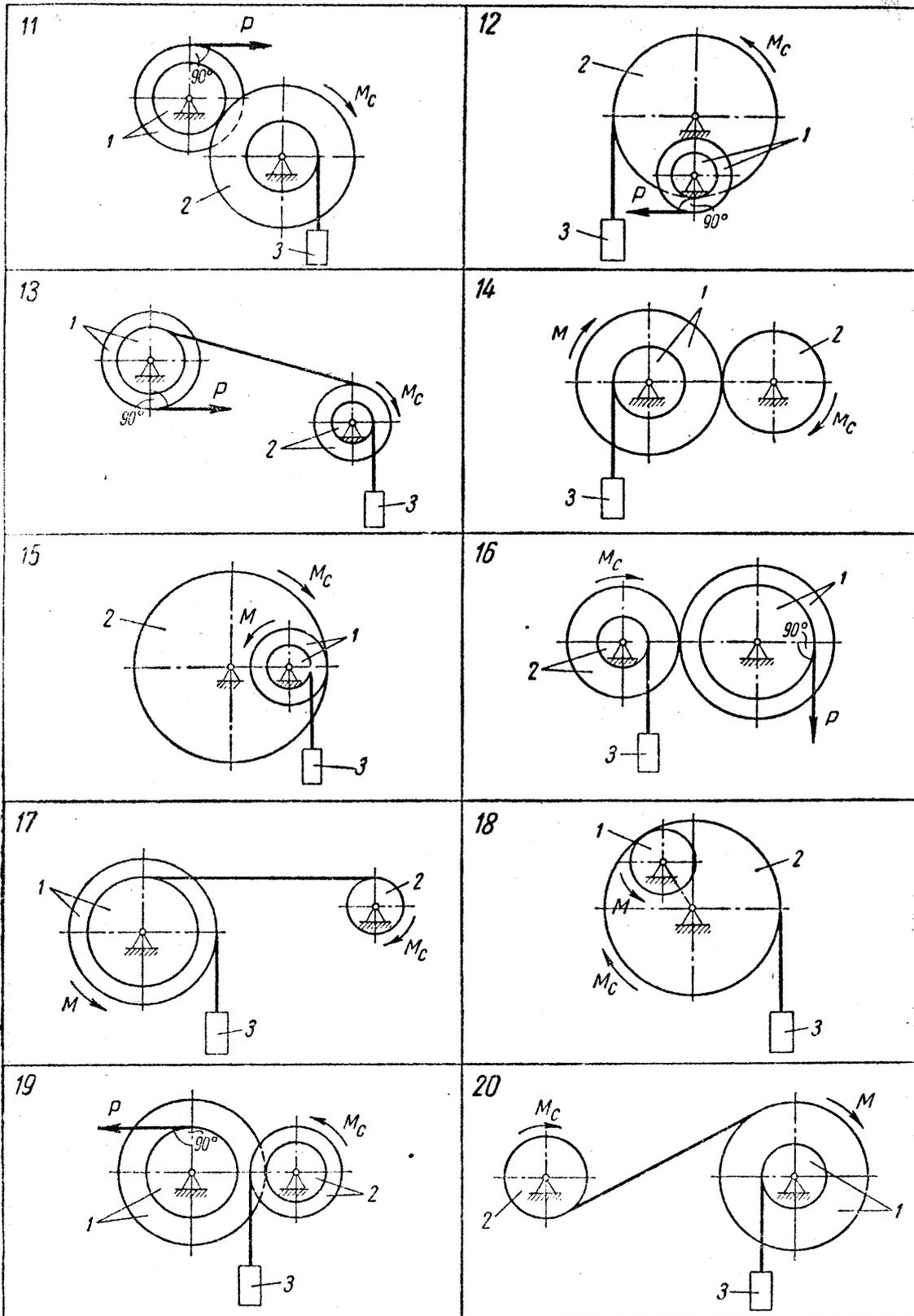


Рис. 3.2

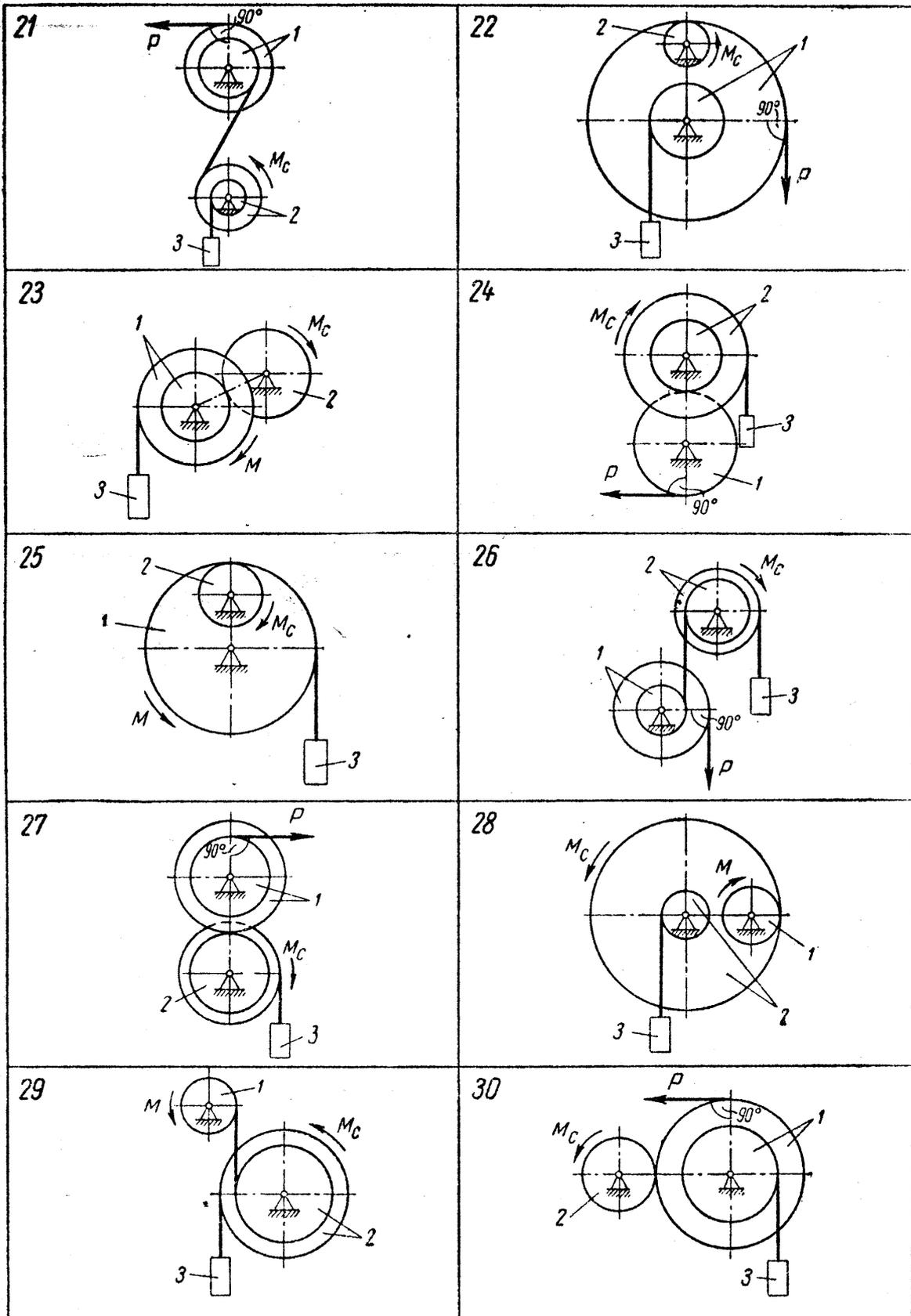


Рис. 3.3

Таблица Д-3

№ Вари- анта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_1 , см	r_1 , см	R_2 , см	r_2 , см	r_1 , см	r_2 , см	M , Нм	P , Н	M_C , Нм	w_{10} , с ⁻¹	t , с	Най- ти
1	100	300	500	20	-	60	40	-	60	2100+20t	-	1000	2	2	φ_1
2	300	80	500	70	50	20	-	60	-	-	10200+100t ²	600	1	0,5	φ_2
3	200	100	400	60	-	30	20	60	$20\sqrt{2}$	6100+20e ^t	-	800	0,5	2,5	φ_1
4	100	250	300	20	-	50	30	-	40	1000+40t ²	-	1400	1,5	2	φ_1
5	150	300	600	30	-	50	20	-	30	-	5500+200t	1500	2	1	φ_2
6	400	250	600	70	-	30	20	70	$20\sqrt{2}$	4800+10e ^{2t}	-	800	3	4	φ_1
7	300	200	400	60	40	30	20	50	20	-	3000+100t ²	500	0	3	φ_2
8	300	250	700	50	30	40	20	40	30	-	9700+50t ³	500	1	2	φ_1
9	200	100	500	80	60	20	-	$50\sqrt{2}$	-	5900+30t	-	600	2	3	φ_2
10	250	100	400	40	20	30	-	30	-	2500+50e ^t	-	1200	0	1,5	φ_2
11	150	300	700	40	30	60	30	30	40	-	3900+50t ²	1000	1	2	φ_1
12	100	200	600	30	20	60	-	$20\sqrt{2}$	60	-	5700+50t	1500	2	2	φ_1
13	180	100	300	50	40	30	20	$30\sqrt{2}$	20	-	2700+200t ³	400	0,5	1	φ_2
14	150	80	400	40	20	30	-	30	-	1800+20t	-	700	1,5	2,5	φ_1
15	300	180	500	20	10	50	-	$10\sqrt{2}$	50	700+40t ²	-	300	0	1,5	φ_1

Продолжение таблицы Д-3

№ Вари- анта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	R_1 , см	r_1 , см	R_2 , см	r_2 , см	r_1 , см	r_2 , см	M , Нм	P , Н	M_C , Нм	w_{10} , с ⁻¹	t , с	Най- ти
16	300	250	400	60	40	50	30	50	40	-	7300+100t	1200	1	2	φ_1
17	250	100	800	50	30	20	-	40	-	5400+50t ²	-	900	2	2	φ_1
18	200	100	600	20	-	50	-	-	50	1900+20e ^{2t}	-	1500	0,5	1	φ_2
19	250	150	400	50	30	30	20	40	20 $\sqrt{2}$	-	14200+200t ²	500	0,5	2	φ_1
20	400	100	800	50	20	30	-	40	-	3700+50e ^t	-	1200	2	1	φ_2
21	200	150	300	50	40	30	20	30 $\sqrt{2}$	20	-	3800+100t	800	1	1,5	φ_2
22	250	100	800	60	20	10	-	50	-	-	9700+200t ³	700	2	0,5	φ_1
23	200	80	400	40	20	30	-	30	-	2300+20t	-	900	0,5	1	φ_2
24	100	200	500	30	-	40	20	-	30	-	12600+100t ²	500	1,5	1	φ_1
25	150	80	400	60	-	20	-	60	-	4900+40e ^{3t}	-	800	0	1,5	φ_2
26	250	200	500	50	20	40	30	40	30	-	3500+150t	600	2	2	φ_1
27	250	150	500	50	30	40	30	30 $\sqrt{2}$	30	-	15200+100t ³	700	1,5	1	φ_1
28	60	200	900	20	-	60	10	-	50	900+10t ²	-	1500	0	2	φ_2
29	50	200	500	20	-	40	30	-	25 $\sqrt{2}$	2100+20e ^t	-	1000	2	0,5	φ_1
30	300	60	600	50	30	20	-	40	-	-	7200+50t	700	1,5	1	φ_2

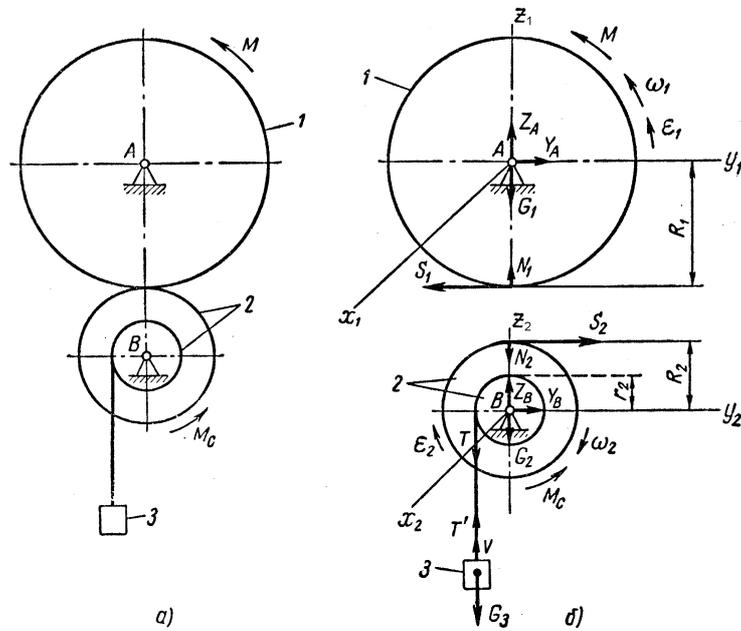


Рис. 3.4

Очевидно: $\dot{S}_2 = -\dot{S}_1$, $\dot{N}_1 = -\dot{N}_2$, $\dot{T}' = -\dot{T}$.

Составим дифференциальное уравнение вращения звена 1 вокруг неподвижной оси x_1 :

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = M_1^e .$$

Главный момент M_1^e внешних сил, приложенных к звену 1 (рис. 3.4,б), относительно оси x_1

$$M_1^e = M - S_1 R_1 .$$

Момент M задает направление w_1 , приводит в движение систему и поэтому принят положительным, а момент, создаваемый усилием \dot{S}_1 , направлен противоположно w_1 , препятствует вращению звена 1 и, следовательно, отрицателен.

Дифференциальное уравнение вращательного движения звена 1 примет вид

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = M - S_1 R_1 . \quad (1)$$

Выразим угловое ускорение $\ddot{\varphi}_1$ звена 1 через угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$ звена 2. Так как

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \frac{R_2}{R_1} , \quad \text{то} \quad \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 \frac{R_2}{R_1} .$$

Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$I_2 \dot{\omega}_2 \frac{R_2}{R_1} = M - S_1 R_1 \quad . \quad (2)$$

Для составления дифференциального уравнения вращения вокруг оси x_2 звена 2, к которому подвешен груз 3, применим теорему об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK_2}{dt} = M_2^e \quad . \quad (3)$$

Кинетический момент системы 2-3 относительно оси x_2

$$K_2 = I_2 \omega_2 + m_3 V r_2 \quad ,$$

где $I_2 \omega_2$ - кинетический момент звена 2, вращающегося с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси x_2 ;

$m_3 V r_2$ - момент количества движения груза 3, движущегося поступательно со скоростью V .

Так как $V = \omega_2 r_2$, то

$$K_2 = (I_2 + m_3 r_2^2) \omega_2 = I_{np_2} \dot{\omega}_2 \quad ,$$

где $I_{np_2} = I_2 + m_3 r_2^2$ - приведенный к оси x_2 момент инерции системы 2-3.

Главный момент M_2^e внешних сил, приложенных к системе 2-3 (рис.3.4), относительно оси x_2

$$M_2^e = S_2 R_2 - G_3 R_2 - M_C \quad .$$

Момент, создаваемый усилием \dot{S}_2 , задает направление ω_2 , приводит в движение систему 2-3 и поэтому принят положительным, а момент силы тяжести груза \dot{G}_3 и момент сил сопротивления \dot{M}_C направлены противоположно ω_2 , препятствуют движению системы и, следовательно, отрицательны.

Таким образом, из уравнения (3)

$$\frac{d}{dt} (I_{np_2} \dot{\omega}_2) = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C \quad .$$

и получаем следующее дифференциальное уравнение вращения звена 2:

$$I_{np_2} \ddot{\omega}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C \quad . \quad (4)$$

В полученной системе уравнений (2) и (4) неизвестны усилия $S_1=S_2=S$ и угловое ускорение \ddot{j}_2 . Для исключения S первое из уравнений этой системы домножим на R_2 , второе на R_1 и сложим их. Тогда получим

$$\left(I_1 \frac{R_2^2}{R_1} + I_{np_2} R_1 \right) \ddot{j}_2 = MR_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1 ,$$

или

$$\ddot{j}_2 = \frac{MR_1 R_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1^2}{I_1 R_2^2 + I_{np_2} R_1^2} . \quad (5)$$

Выражение (5) определяет в общем виде угловое ускорение звена 2 механизма. Учитывая исходные данные, найдем:

$$I_1 = m_1 r_1^2 = 100(0,2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 ,$$

$$I_{np_2} = I_2 + m_3 r_2^2 = m_2 r_2^2 + m_3 r_2^2 = 150 \cdot 0,3^2 + 400 \cdot 0,2^2 = 29,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2 .$$

Подставляем числовые данные в (5)

$$\begin{aligned} \ddot{j}_2 &= \frac{(4200 + 200t)0,6 \cdot 0,4 - (400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000) \cdot 0,6^2}{8 \cdot 0,4^2 + 29,5 \cdot 0,6^2} = \\ &= 4,034t + 0,4597 \text{ (сек}^{-2}\text{)}. \end{aligned}$$

Интегрируем это уравнение дважды:

$$\dot{j}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + C_1 ;$$

$$j_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + C_1 t + C_2 .$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия задачи:

$$\text{при } t=0 \quad j_2=0 , \quad \dot{j}_2(0) = w_2(0) = w_1(0) \cdot \frac{R_1}{R_2} = 2 \cdot \frac{60}{40} = 3 \text{ сек}^{-1} .$$

Следовательно,

$$\dot{j}_2(0) = C_1 , \quad j_2(0) = C_2 ,$$

т. е.

$$C_1 = 3 \text{ сек}^{-1} ; \quad C_2 = 0 .$$

Уравнение угловой скорости звена 2 имеет вид

$$j\ddot{\alpha}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + 3 \quad (\text{сек}^{-1}).$$

Искомое уравнение вращательного движения звена 2 имеет вид:

$$j_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + 3t \quad (\text{рад}).$$

Окружное усилие S можно определить из уравнения (4):

$$S = S_2 = \frac{I_{np_2} j_2 + G_3 r_2 + M_C}{R_2}.$$

При $t_1=1$ сек

$$S = \frac{29,5(4,034 \cdot 1 + 0,4597) + 400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000}{0,4} = 7295 \quad \text{Н}.$$

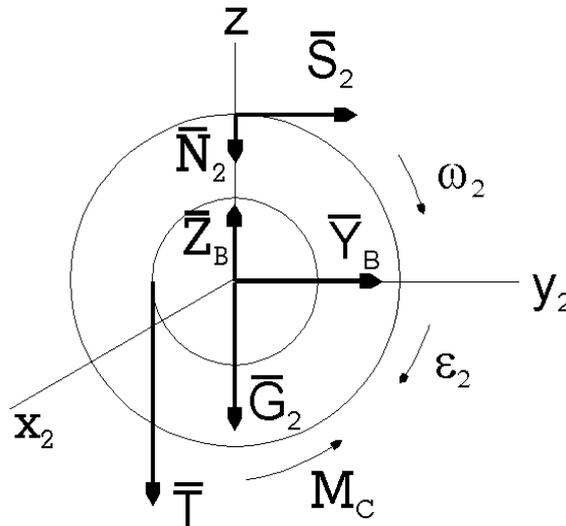


Рис. 3.5

Для определения натяжения нити T составим дифференциальное уравнение вращения звена 2 (рис. 3.5) в следующем виде:

$$I_2 j_2 = S_2 R_2 - T r_2 - M_C,$$

из которого

$$T = \frac{S_2 R_2 - M_C - I_2 j_2}{r_2}.$$

При $t_1=1$ сек

$$T = \frac{7295 \cdot 0,4 - 2000 - 13,5(4,0334 \cdot 1 + 0,4597)}{0,2} = 4285 \quad \text{Н}.$$

ЗАДАНИЕ Д-4

Плоскопараллельное движение твердого тела

Барабан радиуса R весом P имеет проточку (как у катушки) радиуса $r=0,5R$ (рис.4.1, табл. Д-4). К концам намотанных на барабан нитей приложены постоянные силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , направления которых определяются углом b . Кроме сил на барабане действует пара с моментом M . При движении, начинающимся из состояния покоя, барабан катится без скольжения по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона a так, как показано на рисунках.

Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра масс барабана, т.е. $x_C=f(t)$, и наименьшее значение коэффициента трения f_{min} о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Барабан рассматривать как сплошной однородный цилиндр радиуса R .

Указания. При решении задачи Д-4 следует использовать дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует, во избежание ошибок в знаках, направить координатную ось x в ту сторону, куда предполагается направление движения центра масс барабана (точка C), и считать положительными моменты, направленные в сторону вращения барабана. Если фактически направление движения центра C является другим, то в результате получится $a_C < 0$ и найденная величина будет верной. Силу трения, когда не ясно, куда она направлена, можно направлять в любую сторону.

Определяя наименьшее значение коэффициента трения, при котором возможно качение без скольжения, следует учесть, что сила трения не может быть больше предельной, т.е. что $|F_{TP}| \leq fN$, откуда $f \geq \frac{|F_{TP}|}{N}$. Следовательно

$f_{min} = \frac{|F_{TP}|}{N}$. Очень существенно, что во все эти выражения входят модули сил (мы не пишем $|N|$, так как в данной задаче не может быть $N < 0$). Если при расчетах получится $F_{TP} < 0$, то это означает лишь, что фактически сила F_{TP} направлена в другую сторону.

Пример выполнения задания Д-4

Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиусом R и весом P начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом a . На барабан действует сила и пара сил с моментом M (рис.4.2).

Дано: P , $F = 0,8P$, $M = 1,1PR$, $a = 30^\circ$, $b = 30^\circ$.

Определить: 1) $x_C=f(t)$ - закон движения центра масс барабана; 2) f_{min} - наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

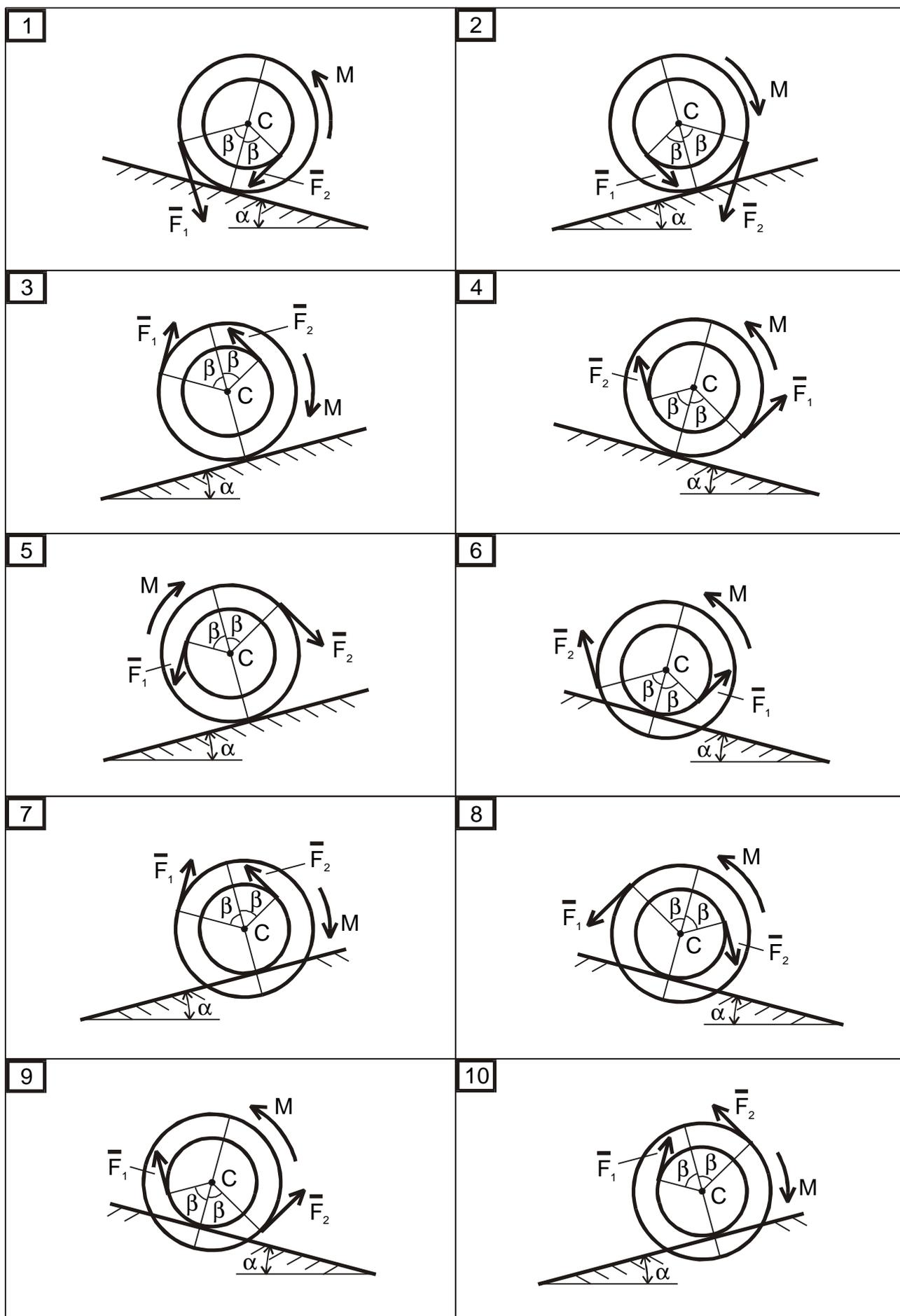


Рис. 4.1

Таблица Д-4

№ варианта	№ рисунка	$a, ^\circ$	$b, ^\circ$	F_1	F_2	M
1	1	30	60	0	0,4P	0
2	2	30	30	0,2P	0	0
3	3	0	30	0	0,2P	0,1PR
4	4	30	-	0	0	0,4PR
5	5	30	90	0,1P	0	0,2PR
6	6	0	60	0,3P	0,1P	0
7	7	30	0	0	0,3P	0,2PR
8	8	0	60	0,2P	0	0,3PR
9	9	30	90	0	0,2P	0,4PR
10	10	30	60	0,1P	0	0,3PR
11	1	30	60	0,4P	0	0
12	2	0	30	0	0,2P	0,3PR
13	3	30	30	0,2P	0,3P	0
14	4	0	60	0,1P	0	0,1PR
15	5	30	30	0	0,2P	0,4PR
16	6	0	90	0,1P	0	0,3PR
17	7	30	60	0,2P	0	0,4PR
18	8	30	30	0	0,1P	0,3PR
19	9	0	90	0,4P	0	0,1PR
20	10	30	60	0	0,3P	0,4PR
21	1	30	60	0,1P	0,2P	0
22	2	0	30	0	0,3P	0,5PR
23	3	30	90	0,1P	0	0,2PR
24	4	30	60	0	0,4P	0,1PR
25	5	30	30	0,2P	0	0,2PR
26	6	0	60	0,1P	0,2P	0
27	7	30	90	0,3P	0	0,1PR
28	8	30	60	0	0,1P	0,4PR
29	9	0	30	0,2P	0	0,1PR
30	10	30	90	0	0,4P	0,2PR

Решение

Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил: \dot{P} , \dot{F} , \dot{N} и \dot{F}_{TP} и момента M . Так как направление силы трения \dot{F}_{TP} нам заранее неизвестно, выбираем его произвольно. Выбираем оси Ox , Oy и составляем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx} \quad , \quad m\ddot{y}_C = F \cos b + P \sin a + F_{TP} \quad ; \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ky} \quad , \quad m\ddot{x}_C = N - P \cos a - F \sin b \quad ; \quad (2)$$

$$I_{Cz}\ddot{\omega} = \sum M_{Cz}(\dot{F}_k) \quad , \quad \frac{mR^2}{2}\ddot{\omega} = FR - F_{TP}R - M \quad . \quad (3)$$

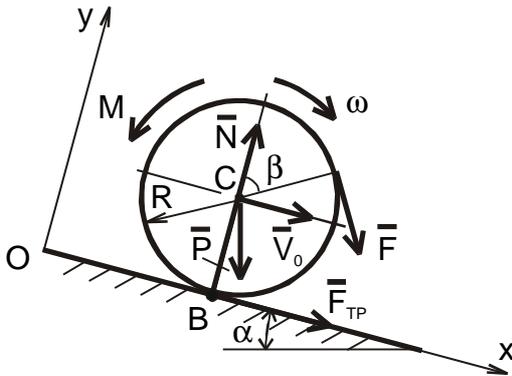


Рис. 4.2

За положительное направление для моментов принято направление угловой скорости ω , т.е. в ту сторону, куда будет вращаться барабан при движении центра от оси Oy .

В систему уравнений (1), (2), (3) входят пять неизвестных (\ddot{x}_C , $\ddot{\omega}$, ε , F_{TP} , N). Но так как $y_C = \text{const} = R$, то $\ddot{y}_C = 0$, следовательно осталось четыре неизвестных (\ddot{x}_C , ε , F_{TP} , N). Для решения задачи необходимо воспользоваться соотношением из кинематики. Так как точка B является мгновенным

центром скоростей, то

$$V_C = \dot{x}_C = \omega R \quad , \quad a_C = \ddot{x}_C = \dot{\omega}R = \varepsilon R \quad . \quad (4)$$

1) Определение $\ddot{x}_C = f(t)$.

Чтобы определить $\ddot{x}_C = f(t)$, исключим ε из уравнения (3), подставив в него (4)

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_C = F - F_{TP} - \frac{M}{R} \quad . \quad (5)$$

Далее из (1) и (5) исключим неизвестную силу F_{TP} , для этого сложим отдельно левые и правые части уравнений

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = F(1 + \cos b) + P \sin a - \frac{M}{R} \quad ,$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = 0,8P(1 + \cos 30^\circ) + P \sin 30^\circ - 1,1P \quad ,$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = 0,89P \quad .$$

Отсюда, так как $P = mg$ получим для определения $x_C = f(t)$ следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_C = 0,6g \quad . \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), получим

$$\ddot{x}_C = 0,6gt + C_1, \quad x_C = 0,3gt^2 + C_1t + C_2. \quad (7)$$

На основании начальных условий $\ddot{x}_C(0)=0$, $x_C(0)=0$ и уравнений (7) имеем $C_1=0$, $C_2=0$.

Таким образом получим закон движения центра масс

$$x_C = 0,3gt^2. \quad (8)$$

2) Определение f_{min} .

Для определения f исходим из того, что при качении без скольжения сила трения должна удовлетворять неравенству

$$|F_{TP}| \leq fN. \quad (9)$$

В (9) входят модули сил. Величину N находим из (2), учитывая, что $\ddot{x}_C = 0$. Получим

$$N = P \cos a + F \sin b = P \cos 30^\circ + 0,8P \sin 30^\circ = 1,27P. \quad (10)$$

Значение F_{TP} можно найти из (5), подставив в него \ddot{x}_C из (6).

Получим

$$0,3mg = F - F_{TP} - \frac{M}{R}, \quad \text{т. к. } mg = P, \quad \text{то}$$

$$F_{TP} = F - \frac{M}{R} - 0,3P = 0,8P - 1,1P - 0,3P = -0,6P. \quad (11)$$

Знак указывает, что сила $\overset{\cdot}{F}_{TP}$ имеет направление, противоположное указанному на рисунке.

Подставляя значения F_{TP} и N из равенств (10) и (11) в неравенство (9), получим $0,6P \leq 1,27Pf$, откуда $f \geq 0,47$.

Следовательно наименьшим коэффициентом трения, при котором возможно качение барабана без скольжения, будет $f_{min} = 0,47$.

ЗАДАНИЕ Д-5

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Учитывается трение скольжения тела A и сопротивление качению тела D , катящегося без скольжения. Другими силами сопротивления и массами нерастяжимых нитей пренебрегаем. Требуется определить скорость и ускорение тела A в тот момент, когда оно пройдет путь $S_A = S$ ¹.

В задаче обозначено:

m_A, m_B, m_D, m_E - массы тел A, B, D, E ;

$R_B, r_B, R_D, r_D, R_E, r_E$ - радиусы больших и малых окружностей тел B, D, E ;

r_B, r_D, r_E - радиусы инерции тел B, D, E относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести;

α - угол наклона плоскости к горизонту;

f - коэффициент трения скольжения тела A ;

k - коэффициент трения качения тела D .

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами. Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Считать величину m равной 10 кг, $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Указания:

1. Выбрать направления S_A и V_A и определить скорости и перемещения всех тел системы в зависимости от V_A и S_A .

2. Вычислить кинетическую энергию системы.

3. Вычислить сумму работ всех внешних сил, действующих на систему. Если сумма работ отрицательна, сменить направления S_A и V_A и вернуться к пункту 1. Если опять сумма работ получится отрицательной, то система под действием сил тяжести не приходит в движение из состояния покоя и $V_A = 0$, $a_A = 0$. Следует отметить, что при смене направлений S_A и V_A в силовой схеме необходимо изменить только направления сил сопротивления.

4. Записать теорему об изменении кинетической энергии системы.

5. Из полученного соотношения определить скорость тела A (а также ускорение тела A в вариантах, перечисленных выше).

¹ **Примечание.** Допускается (в качестве дополнительной расчетно-графической работы) решение данной задачи с использованием общего уравнения динамики. В этом случае последнюю фразу условия следует читать так: «Требуется определить ускорение тела A с помощью общего уравнения динамики».

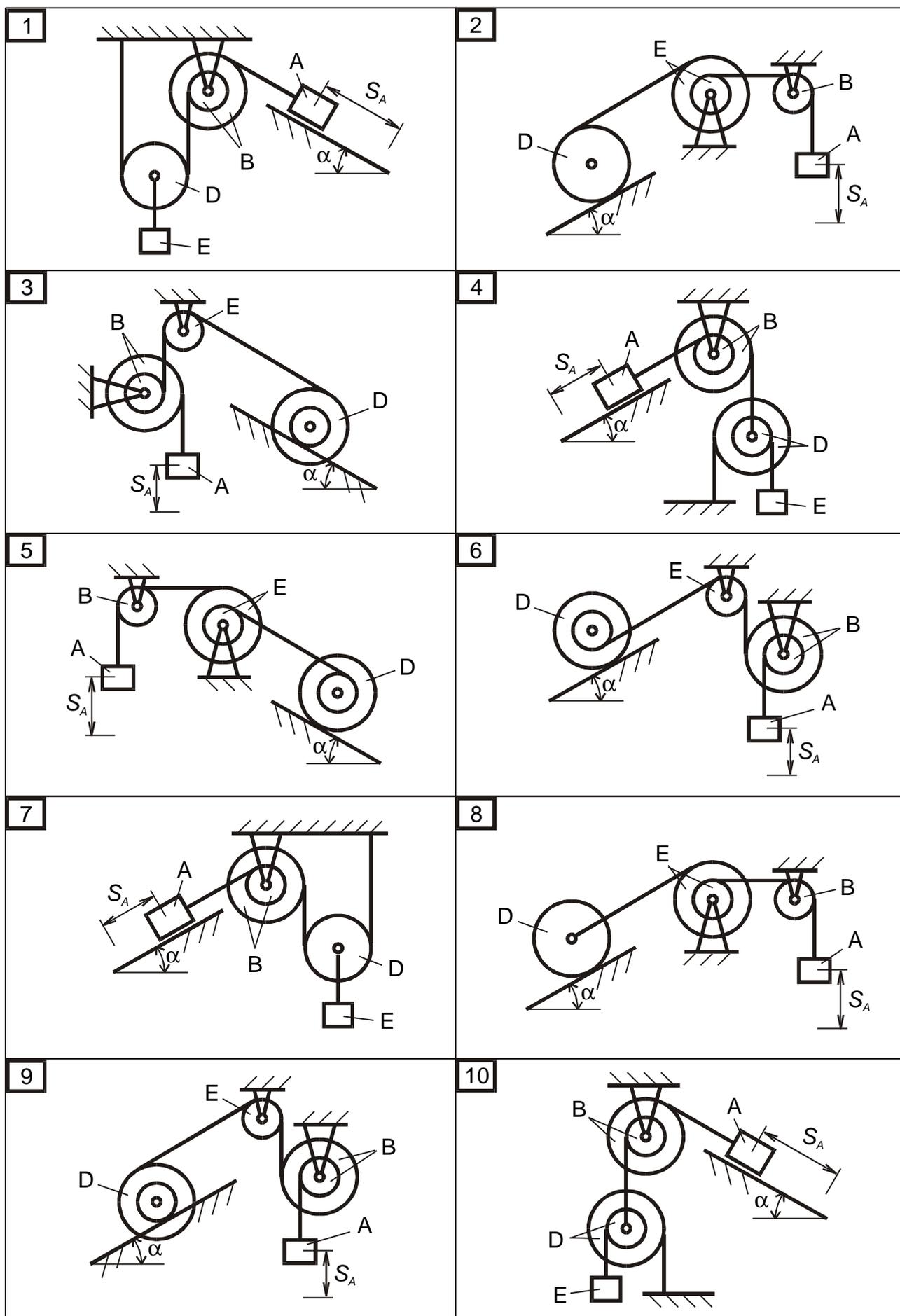


Рис. 5.1

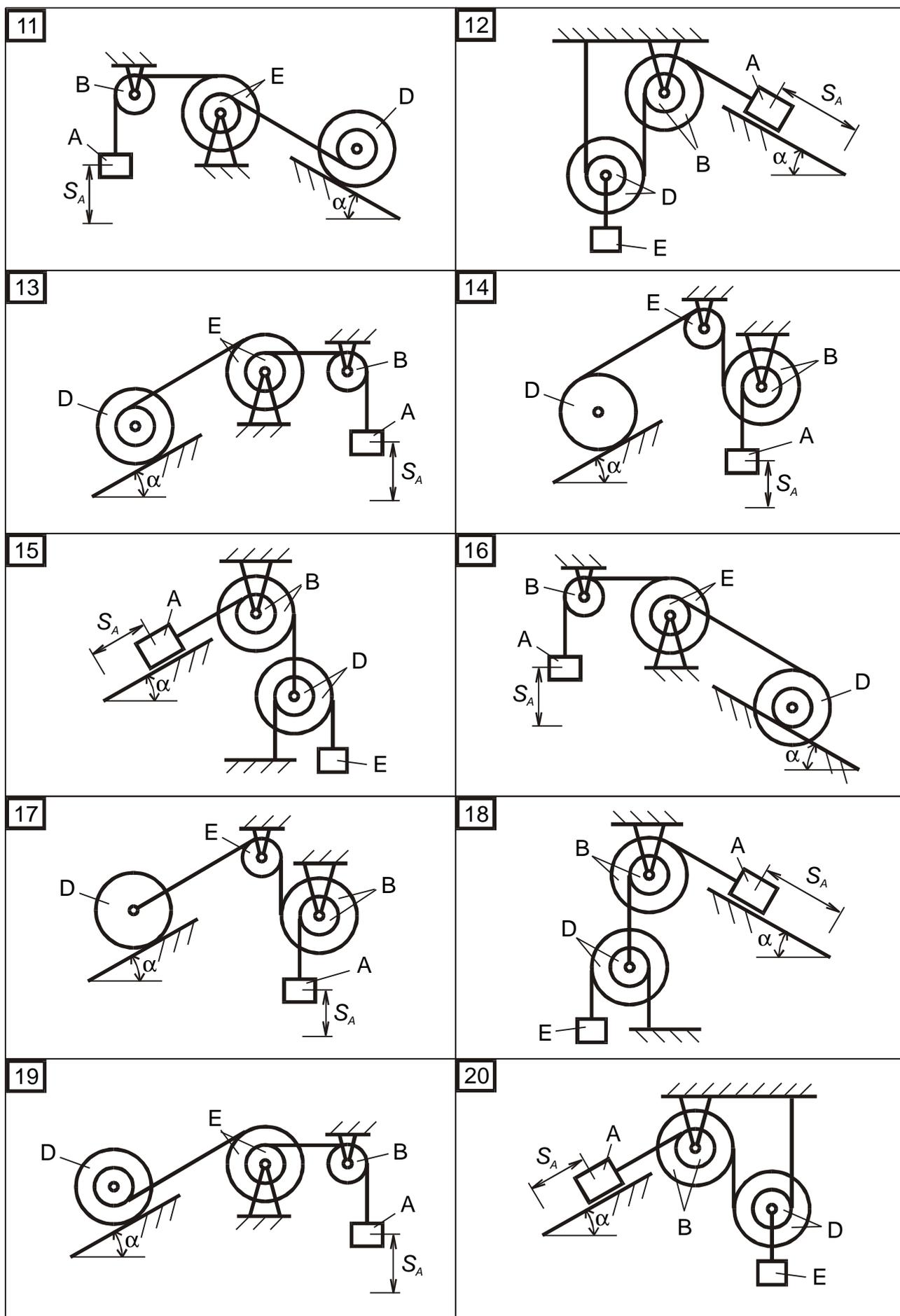


Рис. 5.2

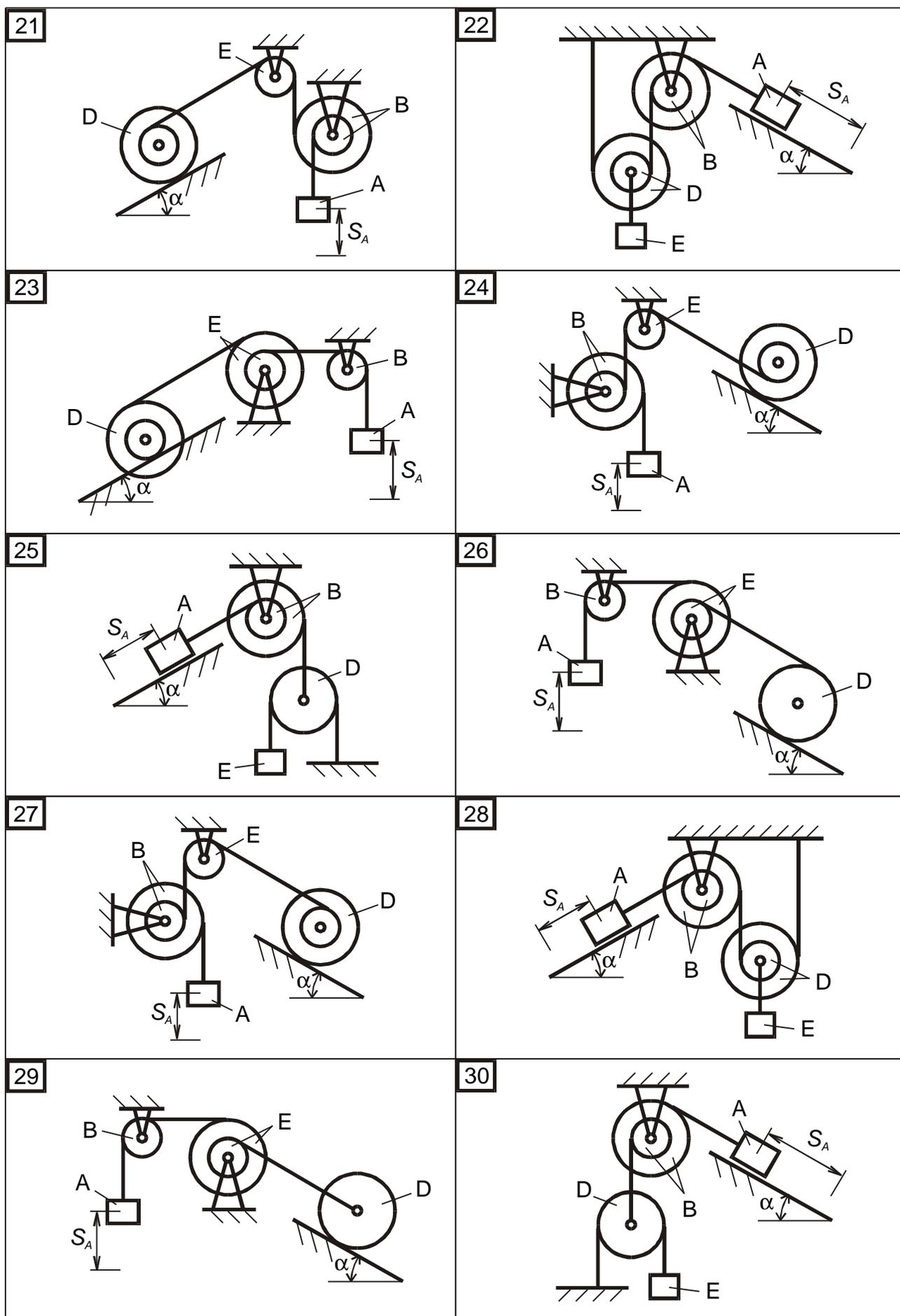


Рис. 5.3

Таблица Д-5

№ варианта	№ рисунка	m_A , кг	m_B , кг	m_E , кг	m_D , кг	R_B , м	r_B , м	r_B , м	R_E , м	r_E , м	r_E , м	R_D , м	r_D , м	r_D , м	a , °	f	k , см	S , м
1	1	5м	4м	2м	м	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,1	-	1
2	2	6м	5м	4м	2м	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	45	-	0,2	2
3	3	4м	м	2м	м	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,6	0,2	0,3	15	-	0,1	1,5
4	4	8м	6м	3м	2м	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	30	0,2	-	3
5	5	7м	5м	4м	м	-	-	-	0,7	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	50	-	0,3	4,5
6	6	9м	8м	3м	3м	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,9	0,3	0,5	20	-	0,4	1,5
7	7	6м	2м	3м	2м	0,4	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	2,5
8	8	4м	2м	м	2м	-	-	-	0,5	0,2	0,3	-	0,4	-	15	-	0,1	4
9	9	7м	5м	3м	3м	0,6	0,3	0,4	-	-	-	0,8	0,5	0,7	20	-	0,4	2
10	10	5м	4м	2м	м	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,7	0,3	0,4	50	0,25	-	1
11	11	8м	5м	3м	2м	-	-	-	0,5	0,1	0,2	0,8	0,4	0,5	30	-	0,3	3,5
12	12	9м	7м	5м	4м	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	70	0,1	-	2
13	13	6м	3м	2м	м	-	-	-	0,5	0,2	0,3	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	4,5
14	14	7м	5м	4м	2м	0,7	0,3	0,4	-	-	-	-	0,6	-	20	-	0,1	3
15	15	4м	3м	2м	м	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	60	0,2	-	1,5
16	16	5м	4м	2м	м	-	-	-	0,6	0,3	0,4	0,7	0,4	0,5	30	-	0,3	1
17	17	6м	5м	4м	2м	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	0,4	-	20	-	0,1	2
18	18	4м	м	2м	м	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	65	0,15	-	1,5
19	19	8м	6м	3м	2м	-	-	-	0,9	0,3	0,5	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	3
20	20	7м	5м	4м	м	0,5	0,1	0,3	-	-	-	0,6	0,3	0,4	45		-	4,5
21	21	9м	8м	3м	3м	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,7	0,3	0,4	30	-	0,3	1,4
22	22	6м	2м	3м	2м	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,5	0,2	0,3	60	0,25	-	2,5
23	23	4м	2м	м	2м	-	-	-	0,4	0,1	0,2	0,5	0,1	0,2	20	-	0,1	4
24	24	7м	5м	3м	3м	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,9	0,3	0,5	15	-	0,3	2
25	25	5м	4м	2м	м	0,5	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	75	0,1	-	1
26	26	8м	5м	3м	2м	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	25	-	0,2	3,5
27	27	9м	7м	5м	4м	0,7	0,4	0,5	-	-	-	0,8	0,5	0,7	30	-	0,3	2
28	28	6м	3м	2м	м	0,4	0,1	0,2	-	-	-	0,6	0,2	0,3	70	0,2	-	4,5
29	29	7м	5м	4м	2м	-	-	-	0,8	0,5	0,7	-	0,6	-	20	-	0,1	3
30	30	4м	3м	2м	м	-	-	-	0,5	0,2	0,3	0,7	0,3	0,4	60	0,15	-	1,5

Пример выполнения задания Д-5

Дано: $m=10$ (кг), $m_A=3m$, $m_B=0,5m$, $m_D=4m$, $m_E=0,5m$, $R_B=20$ (см), $r_B=0,5R_B$, $R_D=10$ (см), $R_E=20$ (см), $r_E=0,5R_E$, $r_B=20$ (см), $r_E=10$ (см), $\alpha=30^\circ$, $k=0,25$ (см), $S=1$ (м), блок D – сплошной цилиндр.

Решение

По условию задачи в начальный момент времени $t_0=0$ система находилась в покое, поэтому $T_0=0$. Предположим, что к моменту времени t тело A прошло путь S_A и приобрело скорость V_A .

Изобразим силовую схему варианта задачи (рис.5.4).

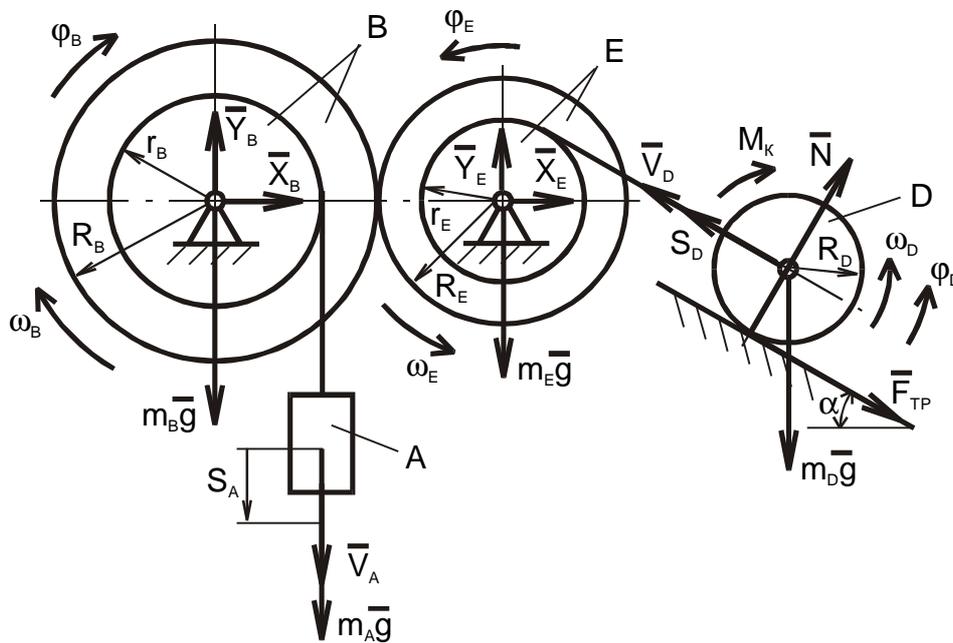


Рис. 5.4

1. Вычислим, в зависимости от V_A , угловые скорости тел B , E , D и скорость V_D центра масс тела D .

$$w_B = \frac{V_A}{r_B}, \quad w_E = w_B \frac{R_B}{R_E} = V_A \frac{R_B}{r_B R_E},$$

$$V_D = w_E r_E = V_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E}, \quad w_D = \frac{V_D}{R_D} = V_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D}.$$

2. Вычислим в зависимости от S_A смещения тел B , E , D .

$$j_B = \frac{S_A}{r_B}, \quad j_E = S_A \frac{R_B}{r_B R_E}, \quad S_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E}, \quad j_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D}.$$

3. Вычислим кинетическую энергию системы для момента времени t

$$T = T_A + T_B + T_E + T_D ,$$

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2} , \quad T_B = \frac{I_B \omega_B^2}{2} = \frac{I_B V_A^2}{2r_B^2} , \quad T_E = \frac{I_E \omega_E^2}{2} = \frac{I_E V_A^2}{2} \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 ,$$

$$T_D = \frac{m_D V_D^2}{2} + \frac{I_D \omega_D^2}{2} = \frac{m_D V_A^2}{2} \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + \frac{I_D V_A^2}{2} \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 ;$$

$$T = \frac{V_A^2}{2} \left(m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 \right) = \frac{V_A^2}{2} \cdot A ,$$

где
$$A = m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 = 75 \text{ (кг)} .$$

4. Подсчитаем сумму работ всех внешних сил, действующих на систему. Работу совершают только силы тяжести тел A и D и момент M_K сил сопротивления качению тела D , $M_K = N \cdot k = m_D g \cos a \cdot k$.

$$\begin{aligned} \sum_k A(\dot{F}_k^e) &= m_A g S_A - m_D g \sin a \cdot S_D - m_D g \cos a \cdot k \cdot j_D = \\ &= g \left(m_A S_A - m_D \sin a \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos a \cdot k \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = \\ &= g S_A \left(m_A - m_D \sin a \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos a \cdot k \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = S_A \cdot B \end{aligned}$$

где
$$B = g \left(m_A - m_D \sin a \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos a \cdot k \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = 91,4 \text{ (кг} \cdot \text{м/с}^2\text{)} .$$

Итак, сумма работ положительна и направление S_A и V_A выбрано верно.

Далее запишем теорему об изменении кинетической энергии для неизменяемой механической системы

$$T - T_0 = \sum_k A(F_k^e) .$$

Подставим выражения для кинетической энергии и суммы работ внешних сил

$$\frac{V_A^2}{2} \cdot A - 0 = S_A \cdot B, \quad (1)$$

откуда

$$V_A = \sqrt{\frac{2 \cdot S_A \cdot B}{A}}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$V_A \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 91,4 \cdot S_A}{75}} \approx 1,56 \quad \text{м/с}.$$

Определим ускорение тела A , для чего возьмем производную по времени от правой и левой части соотношения (1), помня, что $S_A = S_A(t)$, $\frac{dS_A}{dt} = V_A$,

$$\frac{dV_A}{dt} = a_A$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V_A^2}{2} \cdot A \right) = \frac{d}{dt} (S_A \cdot B),$$

$$\frac{A}{2} \cdot 2V_A \cdot \frac{dV_A}{dt} = B \cdot \frac{dS_A}{dt},$$

$$A \cdot V_A a_A = B \cdot V_A.$$

Окончательно

$$a_A = \frac{B}{A} \approx \frac{91,4}{75} \approx 1,21 \quad \text{м/с}^2.$$

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на листах писчей или чертежной бумаги формата А4 (210×297 мм). Текст и рисунки наносятся только на одну сторону листа. Выполнение рисунков «от руки» не допускается.

2. Первая страница представляет собой титульный лист, образец которого приведен ниже.

3. На второй странице записывается условие задания, вычерчивается заданная схема и выписываются из таблицы все данные (для соответствующего варианта).

4. Решение задачи начинается с третьей страницы, на которой вычерчивается расчетная схема механизма. Схема выполняется аккуратно, четко и в таком масштабе, который позволит ясно изобразить все необходимые размеры, векторы сил, моментов и т. д..

Образец титульного листа

<p>МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»</p> <p>Кафедра «Теоретическая механика»</p> <p>РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА _____ Вариант № _____</p> <p>Студент _____</p> <p>Группа _____</p> <p>Преподаватель _____</p> <p>МОСКВА 2005</p>
--

Блохина А.И., Божкова Л.В., Рябов В.Г., Норицына Г.И., Петров В.К.,
Ильина Л.Г., Даншин В.В., Зубков А.И.
Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря Валентина Степановича
Расчетно-графические работы по статике, кинематике и динамике.
Методические указания по курсу «Теоретическая механика» для студентов спе-
циальностей 654500 180800, 657900 210200, 656600 330200, 653800 072000.

Подписано в печать	Заказ	Тираж	экз.
Усл. п. л.	Уч.-изд. л.		
Бумага типографская	Формат 60×90/16		

МГТУ «МАМИ», 107023, Москва, Б. Семеновская, 38.